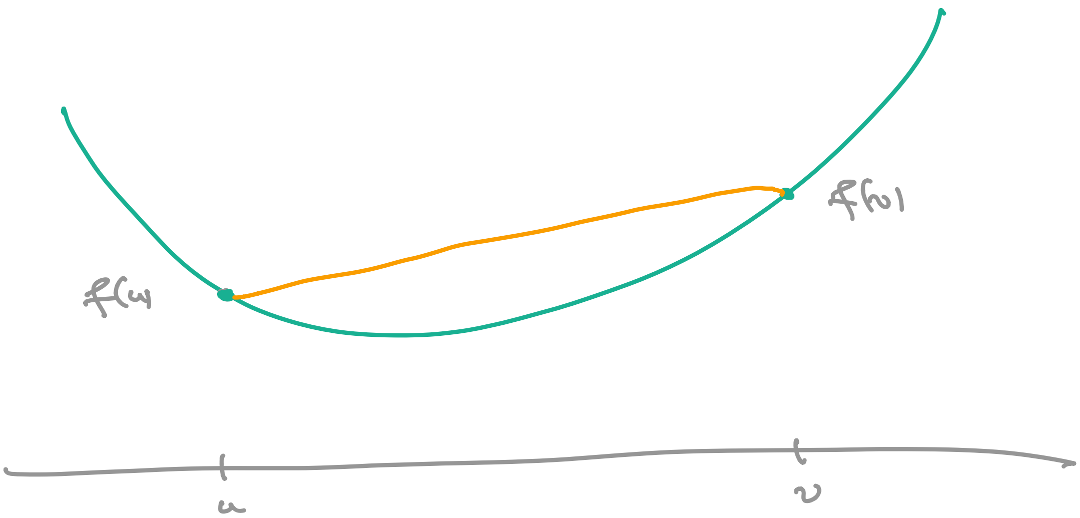
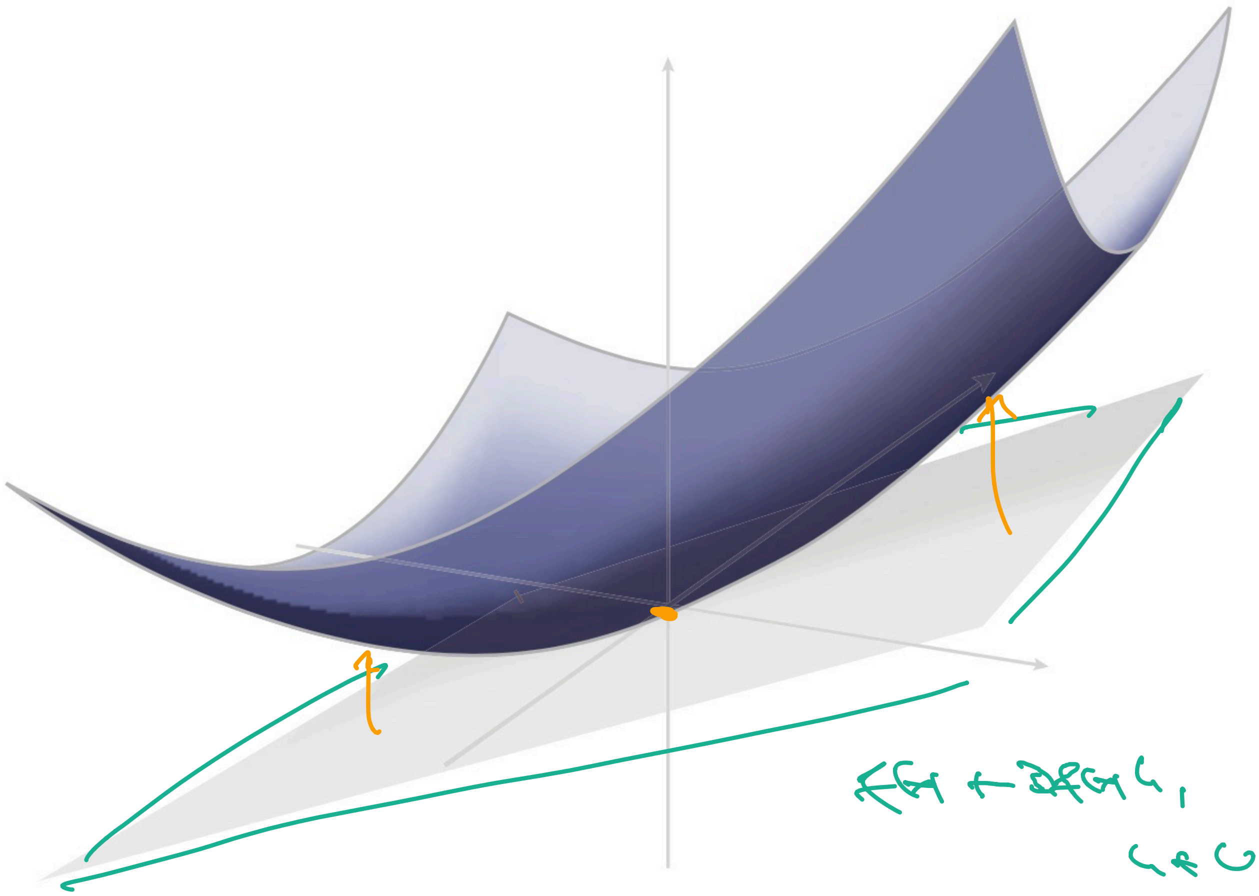
18. Vorlesung 28. 6. 2021

$$f((1-t)u + tv) \le (1-t)\, f(u) + t\, f(v)$$



f anti-konvex $\iff$ $-f$ konvex.



Beweis: $\Rightarrow$ Sei f konvex.

$x,\ x+h \in \Omega$.

Dann
$$x+th = (1-t)x + t(x+h) \in \Omega, \quad 0 \le t \le 1$$

Da f konvex:

$$f(x+th) \le (1-t)f(x) + t\, f(x+h)$$
$$= f(x) + t\,(f(x+h) - f(x)) \quad \Big|\ : t>0$$

Also:

$$f(x+h) - f(x) \ge \frac{1}{t}\Big(\underbrace{f(x+th) - f(x)}\Big)$$
$$= \frac{1}{t}\int_0^t \underbrace{Df(x+sh)}_{\text{stetig in } s}\, h\, ds.$$

Da dies für alle $0<t<1$,

$t \to 0$:

$$f(x+h) - f(x) \ge Df(x)\,h. \quad \checkmark$$

$$f(x+X) - f(x) \overset{>}{\geq} \frac{1}{t}\left(f(x+th) - f(x) \right)$$

$$= \frac{1}{t} \int_0^t Df(x+sh)\, h \, ds .$$

From f strict convex :

$$f(x+X) - f(x) > \frac{1}{t}\left(f(x+th) - f(x) \right)$$

where doing it [illegible] the Bound [illegible] ?

$$\geq \frac{1}{t} \, Df(x)(th)$$

$$= Df(x)h .$$

$\Leftarrow$ Seien $x \neq y$ zwei Punkte in $\mathbb{R}$.

Betrachte:

$$z = (1-t)x + ty$$

Dann:

$$z - x = t(y-x) = th$$

$h = y - x$:

$$\begin{cases} x = z - th \\ y = z + (1-t)h \end{cases}$$

Also:

$$f(x) \overset{>}{\geq} f(z) - t\,Df(z)\,h \qquad \Big|\ \cdot \underset{\geq 0}{(1-t)}$$

$$f(y) \geq f(z) + (1-t)\,Df(z)\,h \qquad \Big|\ \cdot \underset{\geq 0}{t}$$

Also:

$$(1-t)f(x) + t f(y) \geq f(z) + 0$$

$$= f((1-t)x + ty) \checkmark$$

Fall strikt: ersetze $\geq$ durch $>$. $\blacksquare$

Beweis: $\Rightarrow$ $u < v$ in I .

Gilt nach obigem Satz:

$$f(v) \geq f(u) + f'(u)(v-u)$$

$$f(u) \geq f(v) + f'(v)(u-v)$$

Also:

$$f(v) - f(u) \geq f'(u)(v-u)$$

$$f(v) - f(u) \leq f'(v)(v-u)$$

Also:

$$f'(u)(v-u) \leq f'(v)(v-u) \quad \Big| : v-u > 0$$

Also:

$$f'(u) \leq f'(v), \quad u < v. \quad \checkmark$$

$\Leftarrow$ Sei f' monoton wachsend.

Dann gilt

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 \underbrace{f'(x+sh)\, h}\, ds$$

$h>0$: $\geq f'(x)h$

$h<0$: $\geq$ — " —

$$\geq \int_0^1 f'(x)\, h\, ds$$

$$= f'(x)\, h.$$

Also:

$$f(x+h) \geq \underbrace{f(x) + f'(x)h}_{\text{Stützgerade}}$$

$\Rightarrow$ f konvex.

Beweis:

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \underbrace{\tfrac{1}{2} \langle Hf(\xi) h, h \rangle}_{\substack{\geq 0 \\ > 0 \text{ für } h \neq 0}}$$

Gilt $Hf \geq 0$ (> 0):

$$\geq \ (>) \quad f(x) + \nabla f(x) h$$

$$\Longrightarrow \quad f \ \underbrace{\text{konvex.}}_{\text{strikt.}}$$

Umgekehrt: Sei f konvex:

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \tfrac{1}{2} \langle Hf(\xi) h, h \rangle$$

$$\geq f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle$$

Also folgt:

$$\langle Hf(\xi) h, h \rangle \geq 0 \quad \text{mit einem} \quad \xi \in (x, x+h).$$

Ersetze h durch εh:

$$\langle Hf(\xi_\varepsilon) h, h \rangle \geq 0, \quad \varepsilon > 0$$

$$\underset{\varepsilon \to 0}{\Longrightarrow} \quad \langle Hf(x) h, h \rangle \geq 0. \quad \blacksquare$$

Für $\mathbb{R}$: $Hf = f''$

$f'' \geq 0 \iff$ konvex

$f'' > 0 \implies$ strikt konvex

$\not\Leftarrow$ Gegenbeispiel: $f(x) = x^4$.

Bsp:

1. exp strikt konvex auf $\mathbb{R}$

2. log ist strikt anti-konvex $\mathbb{R}$

$$\int_I 1\,dt = 1 \quad , \quad \text{für alle } I$$

Beweis: Treppenf.:

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi(t_{k-1}, t_k)$$

Dann:

$$\int_I \varphi(t)\,dt = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \overbrace{\frac{t_k - t_{k-1}}{|I|}} c_k}_{\text{Konvexkombination von } c_1, \dots, c_n}$$

f linear:

Bew.:

$$\fint_I \varphi(t)\,dt = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{t_k - t_{k-1}}{|I|}\, c_k}_{\text{Konvexkombination der } c_1, \dots, c_n}$$

f konvex:

$$f\Big(\fint \cdots\Big) = f\Big(\sum \quad\Big)$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{t_k - t_{k-1}}{|I|}\, f(c_k)$$

$$= \frac{1}{|I|} \cdot \sum (t_k - t_{k-1})\, f(c_k)$$

$$= \frac{1}{|I|} \int_I f(\varphi(t))\,dt$$

$$= \fint_I f(\varphi(t))\,dt\,.$$

Bsp: I Intervall,

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$$
$$f(t) = t^p.$$

Für $p \geq 1$ ist f konvex.

Jensen:

$$\left(⨍_I |\varphi(t)| \, dt \right)^p \leq ⨍_I |\varphi(t)|^p \, dt$$

Also:

$$⨍_I |\varphi(t)| \, dt \leq \left(⨍_I |\varphi(t)|^p \, dt \right)^{1/p}$$

$$\| \varphi \|_{L^1} \leq \| \varphi \|_{L^p}$$

Beweis: Für $u, v > 0$, $0 \leq \alpha \leq 1$:

$$\alpha \log u + (1-\alpha) \log v \leq \log (\alpha u + (1-\alpha) v)$$

da log anti-konvex. Exp:

$$\boxed{\underbrace{u^{\alpha} v^{1-\alpha}}_{\text{geom. Mittel}} \leq \underbrace{\alpha u + (1-\alpha) v}_{\text{arithm. Mittel}}}$$

Setze

$$\alpha = \frac{1}{p}, \quad 1-\alpha = \frac{1}{q},$$

$$u = a^p, \quad v = b^q:$$

$$\boxed{a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.} \quad \square$$

Selbstkonjugiert: $p = q$

$$\Longleftrightarrow \quad p = q = 2.$$

Bem.:

$$\| f g \|_{L^1} \leq \| f \|_{L^p} \cdot \| g \|_{L^q}.$$

Banal: $\int |f|^p = 0$, $\Rightarrow$ $\int |fg| = 0$ ✓

Setăm:

$$A = \left(\int_I |f|^p \right)^{1/p} > 0$$

$$B = \left(\int_I |g|^q \right)^{1/q} > 0 .$$

Comparăm $\leq$ punct cu punct:

$$\frac{|f|}{A} \cdot \frac{|g|}{B} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|f|^p}{A^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|g|^q}{B^q} .$$

facem și pentru toate pe I.

Conform:

$$\frac{1}{AB} \int |fg| \leq \underbrace{\frac{1}{p} \int \frac{|f|^p}{A^p}}_{=1} + \underbrace{\frac{1}{q} \int \frac{|g|^q}{B^q}}_{=1}$$

$$= \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

$$= 1 .$$

$$\Rightarrow \int |fg| \leq AB = \left(\int |f|^p \right)^{1/p} \left(\int |g|^q \right)^{1/q}$$

∎

Minkowski :

$$\boxed{\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}}$$

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_\Omega |f|^p \right)^{1/p} , \quad p \geq 1$$

Beweis: Für $p=1$ trivial ✓ Sei $p>1$.

$$|f+g|^p = |f+g|^{p-1}|f+g|$$
$$\le |f|\,|f+g|^{p-1} + |g|\,|f+g|^{p-1}$$

Also:

$$\underbrace{\int |f+g|^p}_{0 \neq} \le \int \_\_ \cdot \_\_ + \int \_\_ \cdot \_\_$$

Hölder mit q bzgl. p:

$$\le \left(\int |f|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\int |f+g|^{\overbrace{q(p-1)}^{=p!}}\right)^{1/q}$$
$$+ \left(\int |g|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\int |f+g|^{q(p-1)}\right)^{1/q}$$

$$= \left\{\left(\int |f|^p\right)^{1/p} + \left(\int |g|^p\right)^{1/p}\right\} \underbrace{\left(\int |f+g|^p\right)^{1/q}}_{\neq 0}$$

$$\Rightarrow \left(\int |f+g|^p\right)^{\overbrace{1-\frac{1}{q}}^{=\frac{1}{p}}} \le \{\_\_\_\}$$