25. und letzte Vorlesung 20.7.2021

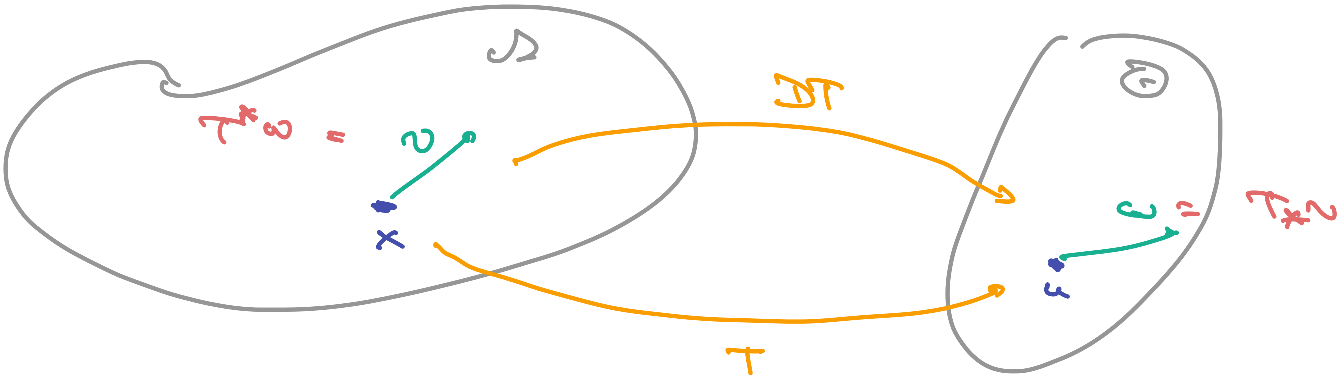
Sei also
$$\psi = T \circ \varphi$$

Dann
$$\dot{\psi} = (T \circ \varphi)^{\cdot}$$
$$= (DT \circ \varphi) \cdot \dot{\varphi}$$
$$= \underbrace{(DT \circ \varphi) \cdot v(\varphi)}$$

und
$$= \omega(\psi) = \underbrace{\omega(T \circ \varphi)}.$$

Es genügt: $t = 0$:

$$\boxed{\begin{aligned} DT \cdot v &= \omega \circ T \\ DT(x) \cdot v(x) &= \omega(T(x)), \quad x \in \Omega \end{aligned}}$$



$$\omega(y) = \omega(T(x)) = DT(x)\cdot v(x)$$

Auflösen nach ω: $\quad (\circ T^{-1}$

$$\omega = DT\cdot v \circ T^{-1} =: T_* v$$

"push forward" von v

nach v: $\quad (DT^{-1} \cdot$

$$v = DT^{-1}\cdot \omega \circ T =: T^* \omega$$

"pull back" von ω.

$$T_* v = DT \cdot v \circ T^{-1}$$

[illegible]

$$T^* \omega = DT^{-1} \cdot \omega \circ T$$

[illegible]

$\psi = T \circ \varphi$ differenzierbar.

Beispiele: 1.

$$\dot{x} = Ax, \qquad y = Tx$$

Dann

$$\dot{y} = (Tx)' = T\dot{x} = TAx$$
$$= By = BTx$$

Also:

$$TA = BT$$

Aufpassen:

$$A = T^{*} B = T^{-1} B T$$
$$B = T_{*} A = T A T^{-1}.$$

nicht die Adjungierte von T.

2. $v(x) = x^2$ auf $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$T : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $x = -\frac{1}{y}$.

Dann:

$$\dot{x} = x^2 = \frac{1}{y^2}$$

$$\overset{!}{=} \left(-\frac{1}{y}\right)^{\cdot} = \frac{\dot{y}}{y^2}$$

Also:

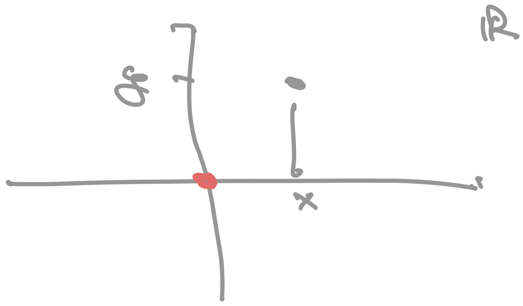
$$\dot{y} = 1$$

Also:

$$T^* v = 1, \quad T_* 1 = v = x^2$$

3. Polarkoordinaten:

$$(r,\theta) \mapsto (x,y) = (r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$



Dann:

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \qquad \Big|\cdot r\cos\theta$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \qquad \Big|\cdot \underbrace{r\sin\theta}_{=y} \quad \Big\}+$$

Erst $\dot{r}$ und $\dot{\theta}$ ausrechnen:

$$\dot{x}x + \dot{y}y = \underbrace{r\dot{r}}\cos^2\theta + \underbrace{r\dot{r}}\sin^2\theta = r\dot{r}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

Analog:

$$\dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2}.$$

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "\varphi^t"] \arrow[d, "T"'] & \Omega \arrow[d] \\ \Theta \arrow[r, "\psi^t"] & \Theta \end{tikzcd}$$

„Kommutiert"

$$\underbrace{T \circ \varphi^t} = \underbrace{\psi^t \circ T}$$

Beweis: $\Leftarrow$ Sei die obige Bez.:

$$T \circ \varphi^t = \psi^t \circ T$$

lokal um jeden Punkt $x \in \Omega$ und ein kleines t-Intervall um 0,

Diff. nach t, dann $t=0$:

$$(DT \circ \varphi^0) \cdot \dot\varphi^0 = \dot\psi^0 \circ T$$

$$DT(x) \cdot v(x) = w(T(x)), \quad x \in \Omega$$

$$DT \cdot v = w \circ T \quad \checkmark.$$

$\Rightarrow$ Wissen nun:

$$DT \cdot v = \omega \circ T.$$

Betrachte $T \circ \varphi^t$:

$$
\begin{aligned}
(T \circ \varphi^t)^{\cdot} &= DT(\varphi^t) \cdot \dot{\varphi}^t \\
&= DT(\varphi^t) \cdot v(\varphi^t) \\
&= (DT \cdot v)(\varphi^t) \\
&= (\omega \circ T) \circ \varphi^t \\
&= \omega \circ (T \circ \varphi^t)
\end{aligned}
$$

Also:
$T \circ \varphi^t$ ist Lösung bzgl. von ω zum AW $T(x)$.

Dasselbe gilt für $\psi^t(T(x))$.

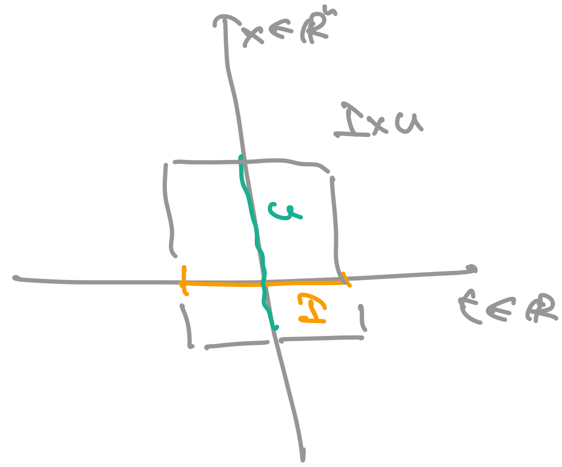
Also: $(T \circ \varphi^t)(x) = \psi^t(T(x))$, $x \in \Omega$

$$T \circ \varphi^t = \psi^t \circ T \qquad \square$$

Beweis: Standardfeld $v = (v_1, \dots, v_n)$ auf $\mathbb{R}^n$

OBdA: $p = 0$, $v_1(0) \neq 0$.

Dann ex. Umgebung $I \times U$ von $(0,0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, s.d. auf ihr der Fluss φ^t von v def. ist.



Define the set $W \subset U$, $0 \in W$,

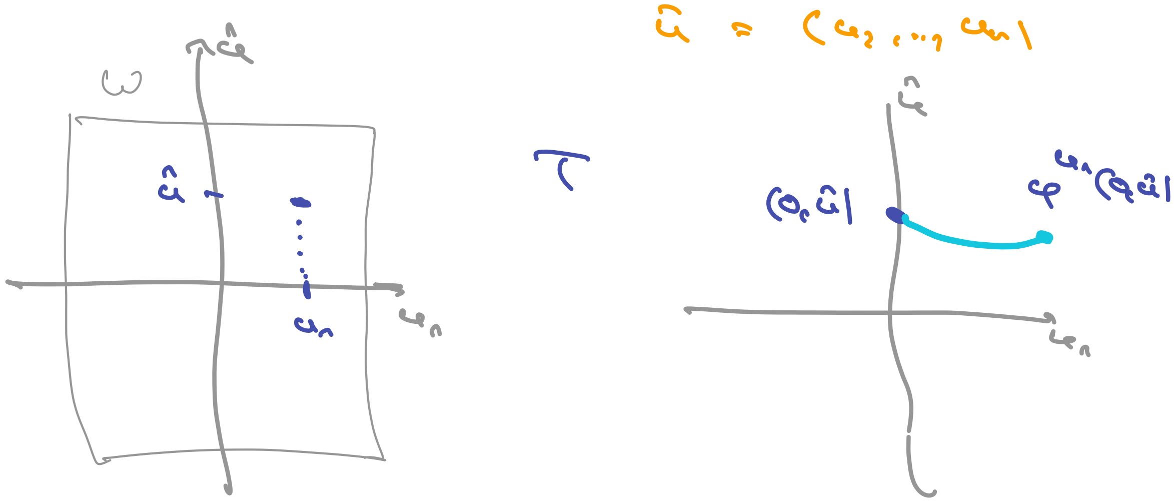
and

$$T : W \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$u \longmapsto T(u) = \varphi^{u_n}(0, \hat{u}),$$

$u = (u_n, \hat{u})$,

$\hat{u} = (u_2, \dots, u_n)$



Für diese Abb T gilt:

$$\frac{\partial T}{\partial x_1}(0) = \dot{\varphi}^t(0, x_1)\Big|_{x_1=0} = v(0)$$

und ($i \geq 2$):

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_i} = e_i \,, \quad 2 \leq i \leq n.$$

Also:

$$DT(0) = \left(\frac{\partial T_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} v_1(0) & 0 & \cdots & 0 \\ v_2(0) & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_n(0) & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

also

$$\boxed{\det DT(0) = v_1(0) \neq 0.}$$

$\Longrightarrow$ T lokaler Diffeo in einer Umg. von 0, $\omega \subset \Omega$

Also:

$$T : \omega \longrightarrow \Omega \quad \underline{\text{Diffeo}}.$$

Zeige: T konjugiert Flüsse von v und e_1:

φ^t $\qquad\qquad\qquad\qquad$ ψ^t

$$\psi^t(u) = u + t e_1$$
$$= (u_1 + t, u_2, \dots, u_n)$$
$$= (u_1 + t, \hat{u}).$$

Nach Def:

$$(\varphi^t \circ T)(u) = \varphi^t(T(u))$$
$$= \underbrace{\varphi^t \circ \varphi^{u_1}}(0, \hat{u})$$
$$= \varphi^{t+u_1}(0, \hat{u})$$
$$= T(\underbrace{t + u_1, \hat{u}})$$
$$= T(\psi^t(u)).$$

Also:

$$\varphi^t \circ T = T \circ \psi^t$$

Also sind v und e_1 C^1-konjugiert.

$\blacksquare$