

Wegen (D-2) können wir den Integralanteil über das Komplement von  $[-\delta, \delta]$  beschränken durch

$$2 \|f\|_\infty \left\{ \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \varphi_n(t) dt \right\} = 2 \|f\|_\infty \left\{ 1 - \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(t) dt \right\}.$$

Der letzte Ausdruck konvergiert wegen (D-3) für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0. Es gibt somit ein  $N \geq 1$ , so dass

$$\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} |f(x) - f(x-t)| \varphi_n(t) dt < \varepsilon, \quad n \geq N. \quad (2)$$

Die Abschätzungen 1, (1) und (2) ergeben zusammen  $\|f_n - f\|_\infty < 2\varepsilon$  für  $n \geq N$ . Das war zu zeigen.  $\gggg$

#### ■ Approximation durch Polynome

Von den Funktionen einer Diracfolge wird nur verlangt, dass sie stetig sind. Sind sie aber glatt, so sind auch die Faltungen  $f * \varphi_n$  glatt. Eine gleichmäßig stetige Funktion  $f$  ist daher auch gleichmäßiger Limes glatter Funktionen. Die glattesten Funktionen sind die analytischen Funktionen, und unter diesen sind die Polynome die einfachsten. Dies führt zu der Frage, ob man eine beliebige stetige Funktion gleichmäßig durch *Polynome* approximieren kann. Auf einem unbeschränkten Intervall ist dies sicher nicht möglich, da dort jedes nicht konstante Polynom unbeschränkt ist. Für *kompakte* Intervalle dagegen gilt der

- 8 **Approximationssatz von Weierstraß** Sei  $I$  ein kompaktes Intervall. Dann ist jede stetige Funktion auf  $I$  gleichmäßiger Limes von Polynomen.  $\times$

$\llll$  Zunächst bemerken wir, dass wir uns auf den Fall

$$I = [0, 1], \quad f(0) = 0 = f(1)$$

zurückziehen können. Denn ist  $f$  stetig auf  $I = [a, b]$ , so ist  $g = f \circ u$  mit

$$u(t) = (1-t)a + tb$$

stetig auf  $[0, 1]$ , und die Funktion  $h = g - v$  mit

$$v(t) = (1-t)g(0) + tg(1)$$

verschwindet bei 0 und 1. Existieren nun Polynome  $q_n$ , die auf  $[0, 1]$  gleichmäßig gegen  $h$  konvergieren, so sind  $p_n = (q_n + v) \circ u^{-1}$  ebenfalls Polynome, die auf  $I$  gleichmäßig gegen  $(h + v) \circ u^{-1} = f$  konvergieren. Somit können wir von 1 ausgehen.

Durch

$$F := \begin{cases} f & \text{auf } [0, 1], \\ 0 & \text{auf } \mathbb{R} \setminus [0, 1], \end{cases}$$

setzen wir zuerst  $f$  zu einer gleichmäßig stetigen Funktion  $F$  auf  $\mathbb{R}$  fort. Als Diracfolge wählen wir geeignete Polynome auf  $[-1, 1]$ , nämlich

$$\varphi_n = \lambda_n^{-1}(1 - t^2)^n, \quad |t| \leq 1. \quad (3)$$

Diese setzen wir ebenfalls durch 0 auf die restliche reelle Gerade stetig fort und bezeichnen sie dort mit  $\Phi_n$ . Wählen wir

$$\lambda_n := \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt > 0,$$

so sind die Eigenschaften (D-1) und (D-2) offensichtlich erfüllt. Eigenschaft (D-3) zeigen wir im anschließenden Lemma 9.

Betrachte nun die Funktionen

$$p_n = F * \Phi_n.$$

Diese konvergieren gleichmäßig gegen  $F$  7. Also konvergieren sie auf  $[0, 1]$  gleichmäßig gegen  $f$ . Für  $x \in [0, 1]$  gilt außerdem

$$\begin{aligned} F * \Phi_n(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \Phi_n(x - t) dt \\ &= \int_0^1 f(t) \Phi_n(x - t) dt \\ &= \lambda_n^{-1} \int_0^1 f(t) (1 - (x - t)^2)^n dt, \end{aligned}$$

denn im Integral in der zweiten Zeile ist  $|x - t| \leq 1$ , und dort ist  $\Phi_n$  durch (3) gegeben. Aufgrund der binomischen Formel 3.34 ist  $(1 - (x - t)^2)^n$  ein Polynom in  $x$  mit Koeffizienten, die von  $t$  abhängen. Nach Integration bezüglich  $t$  bleibt somit ein polynomialer Ausdruck in  $x$ . Mit anderen Worten, die  $p_n$  sind *Polynome*, und der Satz bis auf das folgende Lemma damit bewiesen. >>>>

*Bemerkung* Der Beweis des Satzes macht keinen Gebrauch von Satz 5. ->

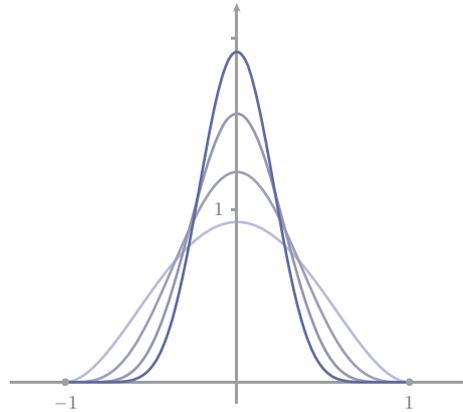
9 **Lemma** Für die Polynome (3) gilt

$$\int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(t) dt \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

für jedes  $\delta \in (0, 1)$ . ✕

Abb 6

Polynomiale Diracfunktionen auf  $[-1, 1]$



«»« Da  $1 - t^2$  auf  $[0, 1]$  monoton fällt, gilt

$$\int_{\delta}^1 (1 - t^2)^n dt \leq (1 - \delta^2)^n.$$

Für den Normierungsfaktor  $\lambda_n$  haben wir andererseits

$$\lambda_n \geq \int_0^1 (1 - t^2)^n dt = \int_0^1 (1 - t)^n (1 + t)^n dt \geq \int_0^1 (1 - t)^n dt = \frac{1}{n + 1}.$$

Also gilt, für jedes  $\delta \in (0, 1)$ ,

$$\int_{\delta}^1 \varphi_n(t) dt \leq (n + 1)(1 - \delta^2)^n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Dasselbe gilt natürlich für das Integral über  $[-1, -\delta]$ . Da das Integral über das gesamte Intervall  $[-1, 1]$  gleich 1 ist, folgt hieraus die Behauptung. »»»

# 13

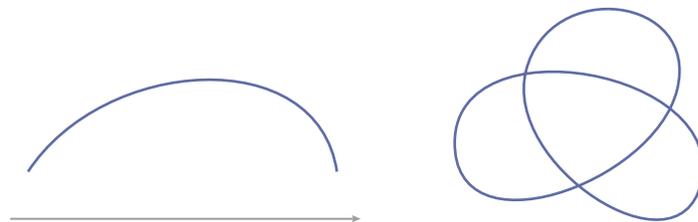
## Kurven und Wege

Bisher kennen wir Kurven vor allem als Graphen reellwertiger Funktionen. Schreibt man aber eine Koordinate als Funktion einer anderen Koordinate, so sind die Darstellungsmöglichkeiten begrenzt. So lässt sich bereits ein Kreis nicht als Graph einer einzigen Funktion darstellen.

Wesentlich flexibler sind *parametrisierte Kurven*. Hier werden *alle* Koordinaten der Kurvenpunkte als Funktionen eines unabhängigen reellen *Parameters* dargestellt. Interpretieren wir diesen Parameter als Zeit, so können wir uns eine parametrisierte Kurve vorstellen als Reiseverlauf eines Punktes, der zu jedem Zeitpunkt angibt, an welchem Raumpunkt er sich befindet. Auf diese Weise lassen sich auch geschlossene oder mehrfach durchlaufene Kurven einfach beschreiben.

Parametrisierte Kurven bilden den ersten Schritt in Richtung der mehrdimensionalen Differenzialrechnung. Dabei können wir auch gleich Kurven in einem beliebigen Banachraum betrachten, denn eine Beschränkung auf endlich dimensionale Räume vereinfacht die Diskussion in keiner Weise.

Abb 1 Graph und Kurve



### 13.1 Kurven

**Definition** Eine *parametrisierte Kurve* oder kurz *Kurve* in einem Banachraum  $E$  ist eine stetige Abbildung  $\gamma: I \rightarrow E$  eines nichtleeren Intervalls  $I$  in den Raum  $E$ , also ein Element des Raumes  $C(I, E)$ . Ihr Bild, also die Menge

$$\gamma(I) := \{\gamma(t) : t \in I\} \subset E,$$

heißt die *Spur* der Kurve  $\gamma$  in  $E$ . ✕

Wir betrachten vor allem kompakte Intervalle  $I = [a, b]$ . Durchläuft  $t$  dieses Intervall von  $a$  nach  $b$ , so durchläuft der Punkt  $\gamma(t)$  die Spur  $\gamma(I)$  der Kurve von ihrem *Anfangspunkt*  $\gamma(a)$  zu ihrem *Endpunkt*  $\gamma(b)$ . Die Abbildung  $\gamma$  selbst stellt eine *Parametrisierung* ihrer Spur dar. Im Allgemeinen erlaubt jede Spur unendlich viele verschiedene Parametrisierungen, da sie als reine Punktmenge keine Information über ihre Parametrisierung enthält.

*Bemerkung* In der Literatur wird allerdings auch die Spur gerne als Kurve bezeichnet, was auch dem allgemeinen Sprachgebrauch näher kommt. Im Bereich der Kurven ist die Terminologie überhaupt recht uneinheitlich. →

**Definition** Eine Kurve  $\gamma: [a, b] \rightarrow E$  heißt *geschlossen*, wenn ihr Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen, also  $\gamma(a) = \gamma(b)$  gilt. Sie heißt *einfach* oder *doppelpunktfrei*, wenn sie auf  $[a, b]$  und  $(a, b]$  injektiv ist. ✕

Eine geschlossene Kurve ist also doppelpunktfrei, wenn Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen, aber alle anderen Punkte ihrer Spur genau einmal durchlaufen werden. Der *Spur* allein sieht man allerdings nicht an, ob sie doppelpunktfrei ist oder nicht, da sie auch mehrfach durchlaufen sein kann.

► A. Jeder Punkt  $p \in E$  ist die Spur einer *konstanten Kurve*

$$\gamma: I \rightarrow E, \quad \gamma(t) \equiv p.$$

Diese ist geschlossen, aber nicht doppelpunktfrei, falls  $|I| > 0$ .

Abb 2

Kurve in der Ebene

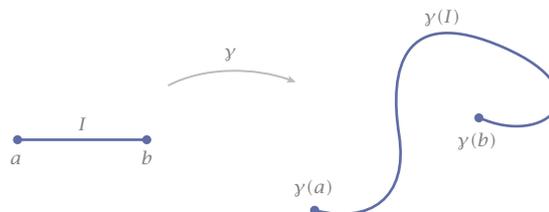
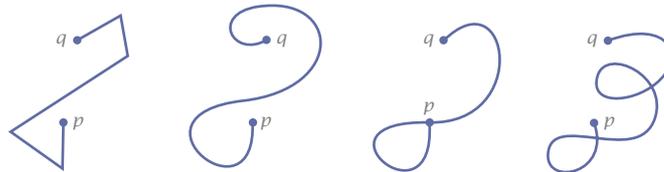


Abb 3 Nichtgeschlossene Kurven



B. Die *Strecke* mit Anfangspunkt  $p$  und Endpunkt  $q$  ist die Spur der Kurve

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow E, \quad \gamma(t) = (1-t)p + tq.$$

Für  $p \neq q$  ist diese Kurve doppeltpunktfrei und nicht geschlossen. Für  $p = q$  ist die Kurve konstant, geschlossen, aber nicht doppeltpunktfrei.

C. Der Graph einer Funktion  $f \in C(I)$  wird durch die Kurve

$$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, f(t))$$

parametrisiert. Diese ist immer doppeltpunktfrei und nicht geschlossen.

D. Der Einheitskreis in der Ebene ist die Spur der geschlossenen, doppeltpunktfreien Kurve 9.12

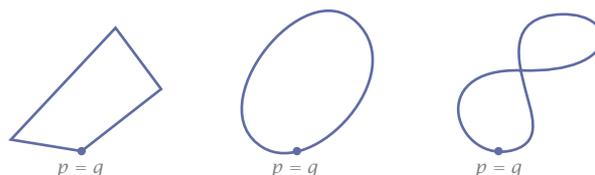
$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t).$$

E. Der  $n$ -mal durchlaufene Einheitskreis wird parametrisiert durch

$$\gamma_n: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_n(t) = (\cos nt, \sin nt), \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Er ist geschlossen, aber für  $|n| \neq 1$  nicht doppeltpunktfrei. Für  $n < 0$  wird er im mathematisch negativen Sinn - also im Uhrzeigersinn - durchlaufen. Für  $n = 0$  degeneriert zu einem Punkt. ◀

Abb 4 Geschlossene Kurven



### ■ Peano- und Jordankurven

Mit dem Begriff der Kurve als stetiger Abbildung eines Intervalls verbindet sich unwillkürlich die Anschauung einer Linie, die man ›ohne abzusetzen‹ von ihrem Anfangs- bis zu ihrem Endpunkt zeichnen kann. Man sollte meinen, ihre Stetigkeit verhindert ein allzu wildes Verhalten. Dem ist jedoch nicht so. Auf Peano geht zum Beispiel folgende Entdeckung zurück.

**Satz von Peano** Es gibt Kurven  $\gamma: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ , die surjektiv sind.  $\times$

Es gibt also Kurven, genannt *Peanokurven*, die ein Quadrat vollständig überdecken. Das stetige Bild einer *eindimensionalen* Menge kann somit *zweidimensional* sein. Somit ist die *Dimension* eines geometrischen Objektes nicht invariant unter *beliebigen* stetigen Abbildungen!

⟨⟨⟨⟨ *Beweisskizze* Die folgende Konstruktion geht auf Hilbert<sup>1</sup> zurück. Dabei wird induktiv eine Folge von Kurven  $\gamma_n: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$  wie in Abbildung 5 konstruiert. Die Kurve  $\gamma_n$  bildet dabei jedes Teilintervall des in  $4^n$  gleichlange Teile zerlegten Einheitsintervalls  $[0, 1]$  in genau eines der  $4^n$  gleichgroßen Teilquadrate von  $[0, 1]^2$  mit Kantenlänge  $2^{-n}$  ab. Beim Übergang von  $\gamma_n$  zu  $\gamma_{n+1}$  wird dabei in jedem dieser Quadrate der Verlauf so verändert, dass jedes Viertel dieses Quadrates in der in Abbildung 5 ersichtlichen Weise durchlaufen wird. Somit gilt auf jeden Fall

$$\|\gamma_n - \gamma_{n+1}\|_{[0,1]} = \max_{t \in [0,1]} \|\gamma_n(t) - \gamma_{n+1}(t)\|_E \leq \frac{2}{2^n}, \quad n \geq 1.$$

Für alle  $m > n$  gilt somit auch

$$\|\gamma_n - \gamma_m\|_{[0,1]} \leq \sum_{k=n}^{m-1} \|\gamma_k - \gamma_{k+1}\|_{[0,1]} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2}{2^k} = \frac{4}{2^n}.$$

<sup>1</sup> Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück. *Math. Ann.* **38** (1891), 459–460.

Abb 5 Konstruktion einer Peanokurve

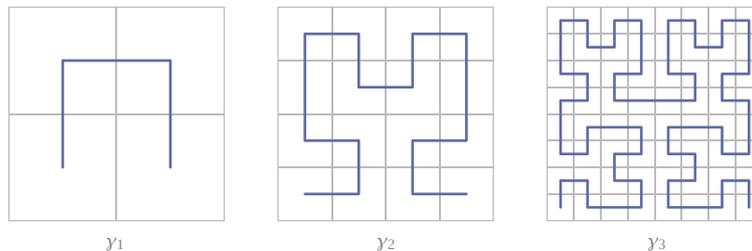
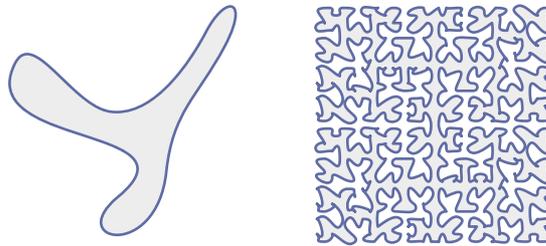


Abb 6

Zwei  
Jordankurven

Somit konvergieren die Kurven  $\gamma_n$  auf  $[0, 1]$  *gleichmäßig* gegen eine Abbildung  $\gamma: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ , die aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz wiederum stetig ist <sup>7.33</sup>, also eine Kurve darstellt.

Andererseits durchläuft jede Kurve  $\gamma_m$  mit  $m \geq n$  jedes Teilquadrat der  $n$ -ten Teilung von  $[0, 1]^2$ . Da die Feinheit dieser Teilung gegen Null strebt, liegt die Spur der Grenzkurve  $\gamma$  dicht in  $[0, 1]^2$ . Als stetiges Bild der kompakten Menge  $[0, 1]$  ist sie aber auch kompakt <sup>7.28</sup>. Also gilt  $\gamma([0, 1]) = [0, 1]^2$ .  $\gggg$

Eine »explizite« Darstellung einer Peanokurve wird in Aufgabe 18 gegeben.

Bei genauem Hinsehen stellt man fest, dass Peanokurven zwar surjektiv, aber nicht injektiv sind. Fordert man zusätzlich noch die Injektivität, so ergibt sich ein Bild, dass der Anschauung schon eher entspricht.

**Jordanscher Kurvensatz** *Ist  $\Gamma$  die Spur einer geschlossenen, doppel­punkt­freien Kurve in der euklidischen Ebene, so besteht ihr Komplement aus genau zwei disjunkten und zusammenhängenden Komponenten, genannt das Innere und das Äußere der Kurve. Dabei ist das Innere beschränkt, das Äußere unbeschränkt, und der Rand beider Komponenten ist genau  $\Gamma$ .  $\times$*

Geschlossene und doppel­punkt­freie Kurven werden daher auch *Jordankurven* genannt. Der Satz scheint anschaulich klar, doch stellt sich heraus, dass der Beweis schwierig ist, wenn man beliebige *stetige* Kurven betrachtet. Tatsächlich ist es so, dass Jordankurven keineswegs »schöne« Kurven sein müssen. Auch sie können eine Fläche mit positivem Inhalt ausfüllen. <sup>2</sup> — Stetige Kurven können also durchaus »wild« sein. Wir werden deshalb vor allem differenzierbare Kurven betrachten.

<sup>2</sup> W.F. Osgood, A Jordan curve of positive area. *Trans. Am. Math. Soc.* **4** (1903), 107–112.  
R. Maehara, The Jordan Curve Theorem via the Brouwer Fixed Point Theorem. *Amer. Math. Monthly* **91** (1984), 641–643.

## 13.2

## Differenzierbare Kurven

Wir erklären nun, wann eine Kurve in einem Punkt differenzierbar ist. Wir gehen dabei wieder von der geometrischen Vorstellung aus, dass es in einem solchen Punkt eine eindeutige Gerade gibt – die *Tangente* – welche die Kurve besser als jede andere Gerade approximiert. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Approximationsfehler bei Annäherung an den Berührungspunkt schneller als eine lineare Funktion gegen Null strebt.

Sei  $I$  ein nichtentartetes Intervall,  $\gamma: I \rightarrow E$  eine Kurve, und  $a \in I$ . Eine Gerade  $\alpha$  durch den Kurvenpunkt  $\gamma(a)$  hat die Parameterdarstellung

$$\alpha(t) = \gamma(a) + v(t - a)$$

mit einem Vektor  $v \in E$ . Dabei lassen wir auch  $v = 0$  zu. Ihr Approximationsfehler zur Kurve  $\gamma$  an der Stelle  $t$  ist  $\|\gamma(t) - \alpha(t)\|_E$ , und für diesen fordern wir also

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{\|\gamma(t) - \alpha(t)\|_E}{|t - a|} = 0.$$

Wie im Fall reeller Funktionen einer Variablen ist dies höchstens für eine Wahl des Vektors  $v$  möglich  $A_3$ . Das heißt, wenn es ein solches  $v$  gibt, so ist es eindeutig bestimmt.

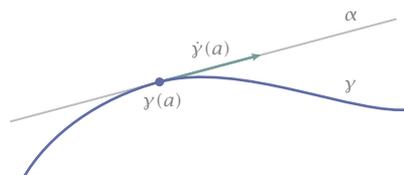
**Definition** Sei  $I$  ein nichtentartetes Intervall. Eine Abbildung  $\gamma: I \rightarrow E$  heißt *differenzierbar im Punkt  $a \in I$* , wenn es einen Vektor  $v \in E$  gibt, so dass

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{\|\gamma(t) - \gamma(a) - v(t - a)\|_E}{|t - a|} = 0. \quad (2)$$

In diesem Fall heißt  $v$  die *erste Ableitung* von  $\gamma$  im Punkt  $a$  und wird mit  $\dot{\gamma}(a)$  oder  $\gamma'(a)$  bezeichnet.  $\times$

Diese Differenzierbarkeit lässt sich wiederum mithilfe von Differenzenquotienten charakterisieren. Diese sind in einem Banachraum wohldefiniert, da es sich dabei um nichts anderes als Linearkombinationen handelt.

Abb 7  
Kurve mit Tangentialvektor  
und Tangente



1 **Differenzierbarkeitssatz** Für eine Abbildung  $\gamma: I \rightarrow E$  und einen Punkt  $a \in I$  sind äquivalent:

- (i)  $\gamma$  ist differenzierbar in  $a$  mit  $\dot{\gamma}(a) = v$ .
- (ii) Es gibt einen Vektor  $v \in E$  und eine im Punkt  $a$  stetige und verschwindende Abbildung  $\varepsilon: I \rightarrow E$ , so dass

$$\gamma(t) = \gamma(a) + v(t-a) + \varepsilon(t)(t-a). \quad (3)$$

(iii) Es existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(a+h) - \gamma(a)}{h} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{\gamma(t) - \gamma(a)}{t-a} = v.$$

(iv) Es gilt

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{\|\gamma(t) - \gamma(a) - v(t-a)\|_E}{|t-a|} = 0. \quad \times$$

⟨⟨⟨ (i)  $\Leftrightarrow$  (ii) Setzen wir

$$\varepsilon(t) = \frac{\gamma(t) - \gamma(a) - v(t-a)}{t-a}, \quad t \neq a,$$

so ist  $\varepsilon$  wegen (2) stetig im Punkt  $a$  durch den Wert 0 fortsetzbar. Es gilt dann (3). Umgekehrt folgt aus (3) unmittelbar (2).

(ii)  $\Leftrightarrow$  (iii) Mit den Bezeichnungen von (3) ist

$$\frac{\gamma(t) - \gamma(a)}{t-a} = v + \varepsilon(t), \quad t \neq a.$$

Verschwindet  $\varepsilon$  stetig im Punkt  $a$ , so ist

$$v = \lim_{t \rightarrow a} (v + \varepsilon(t)) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{\gamma(t) - \gamma(a)}{t-a}.$$

Existiert umgekehrt der Grenzwert auf der rechten Seite, so ist  $\varepsilon$  stetig fortsetzbar im Punkt  $a$  mit dem Wert 0, und es gilt (3).

(iii)  $\Leftrightarrow$  (iv) Das ist klar.  $\rangle\rangle\rangle$

Der Vektor

$$v = \dot{\gamma}(a)$$

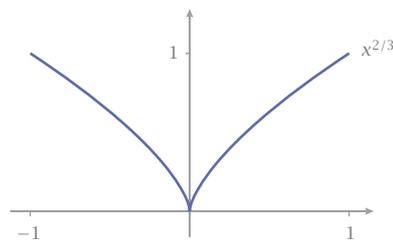
heißt *Tangenten-* oder *Geschwindigkeitsvektor* der Kurve im Punkt  $\gamma(a)$ , seine Länge  $\|\dot{\gamma}(a)\|_E$  ihre (*momentane*) *Geschwindigkeit*. Ist  $\dot{\gamma}(a) \neq 0$ , so ist die *Tangente* an  $\gamma$  im Punkt  $\gamma(a)$  gegeben durch die parametrisierte Gerade

$$\alpha(t) = \gamma(a) + \dot{\gamma}(a)t.$$

Ist dagegen  $\dot{\gamma}(a) = 0$ , so ist die Tangente nicht definiert. Die Kurve kann in diesem Fall eine Ecke oder Spitze bilden.

Abb 8

Die Neilsche Parabel



## 2 ▶ A. Die Kurve

$$\gamma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t^3, t^2)$$

ist in jedem Punkt differenzierbar mit Ableitung und Geschwindigkeit

$$\dot{\gamma}(t) = (3t^2, 2t), \quad \|\dot{\gamma}(t)\|_2 = \sqrt{9t^4 + 4t^2},$$

hat aber im Nullpunkt eine Spitze. Es handelt sich um die (an der Hauptdiagonalen gespiegelte) *Neilsche Parabel*  $x \mapsto x^{2/3}$  Abb 8.

## B. Die Spur der Kurve

$$\gamma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t^3, t^6)$$

ist ein glatter Parabelbogen, aber es ist  $\dot{\gamma}(0) = 0$ . ◀

*Bemerkung* Beschreiben wir die Neilsche Parabel als *Graphen* der Funktion  $x \mapsto x^{2/3}$ , so ist diese im Punkt 0 *nicht* differenzierbar. Beschreiben wir sie jedoch wie im vorangehenden Beispiel als *parametrisierte Kurve*, so ist diese Parametrisierung überall differenzierbar, auch wenn der Tangentialvektor an einer Stelle verschwindet. Letzteres ist unvermeidlich, da die Neilsche Parabel dort eine Spitze ausbildet. Der Graph einer *differenzierbaren* Funktion besitzt dagegen in jedem Punkt eine Tangente <sub>A-4</sub>. ◊