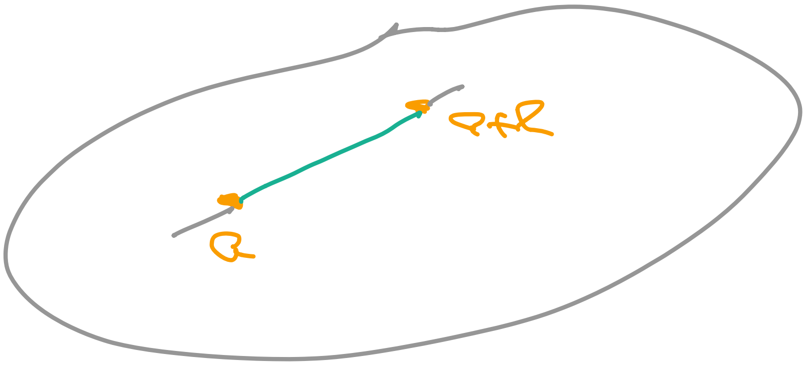
Uü – 6 17.6.2021

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$



$f = f(x)$

Setze $x = a + th$, $\underbrace{0 \le t \le 1}$

Betrachte Hilfsfunktion :

$\varphi(t) = f(a+th)$

$\mathbb{R} \ni (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$

Taylor mit $t=1$

$$\boxed{\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0)\cdot 1 + \int_0^1 (1-t)\,\varphi''(t)\,dt}$$

$$= f(a) + \cancel{Df(a)\cdot h}^{\,0} + \int_0^1 \underbrace{(1-t)}_{\geq 0}\,\underbrace{D^2 f(a+th)(h)(h)}_{\text{st. wegen f. in } t}\,dt$$

$$= f(a) + D^2 f(a+\tau h)(h)(h) \cdot \underbrace{\int_0^1 (1-t)\,dt}_{\frac{1}{2}}$$

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + \frac{1}{2}\langle H_f(x)\,h, h\rangle}$$

$x = a+\tau h \in [a, a+h]$.

Bew: "Standard trick":

$$f(x) - f(y)$$

$$= \varphi(1) - \varphi(0)$$

$$= \int_0^1 \varphi'(t)\,dt$$

mit $\varphi(t) = f(tx + (1-t)y)$

1 Bestimmen sie Lage und Art der lokalen Extrema der Funktion

$$f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^3y^2(1-x-y)$$

und geben sie in den Extremstellen p das Taylorpolynom $T_p^2 f$ an.

$$f(x,y) = x^3y^2 - x^4y^2 - x^3y^3 .$$

Gradient:

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 \\ 2x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\equiv 0$ für $x=0 \vee y=0$.

Sei zunächst $xy \neq 0$: Dann

$$\nabla f = 0 \iff \begin{pmatrix} 3 - 4x - 3y \\ 2 - 2x - 3y \end{pmatrix} = 0$$

$\vdots$

Gst Lsg $p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

2. <u>Hessiana</u> :

$$\nabla f = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2y^2 - 4x^3y^2 - 3x^2y^3 \\ 2x^3y - 2x^4y - 3x^3y^2 \end{pmatrix}$$

$$Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6xy^2 - 12x^2y^2 - 6xy^3 & 6x^2y - 8x^3y - 9x^2y^2 \\ \dots & 2x^3 - 2x^4 - 6x^3y \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{array}\right\} = \begin{pmatrix} \frac{6}{2}\cdot\frac{1}{9} - \frac{12}{4}\frac{1}{9} - \frac{6}{2}\frac{1}{27} & \frac{6}{4}\frac{1}{3} - \frac{8}{8}\frac{1}{3} - \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{9} \\ \dots & \frac{2}{8} - \frac{2}{16} - \frac{6}{8}\cdot\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} & \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ \dots & \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{12} \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{72}\begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} > 0$$

$$\det = 72 - 36 = 36 > 0$$

[illegible]

3. Taylorpolynom:

$$T_p^2 f(h) = f(p) + \langle \underbrace{\cancel{\nabla f(p)}}^{0}, h \rangle + \frac{1}{2} \langle \operatorname{Hess} f(p)\, h, h \rangle$$

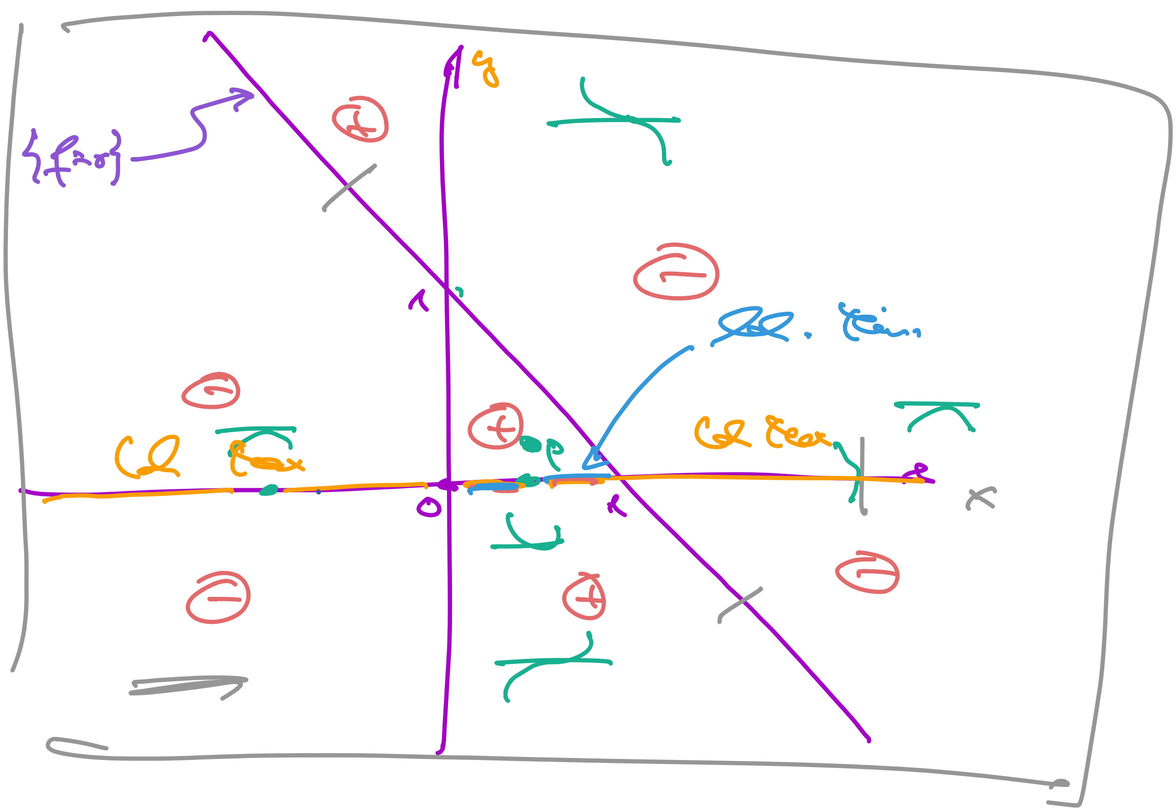
$$= \ldots$$

Diskussion von $x=0$ u $y=0$:

$$= x^3 y^2 (1-x-y)$$

Betrachte $\{(x,y) : f(x,y) = 0\}$

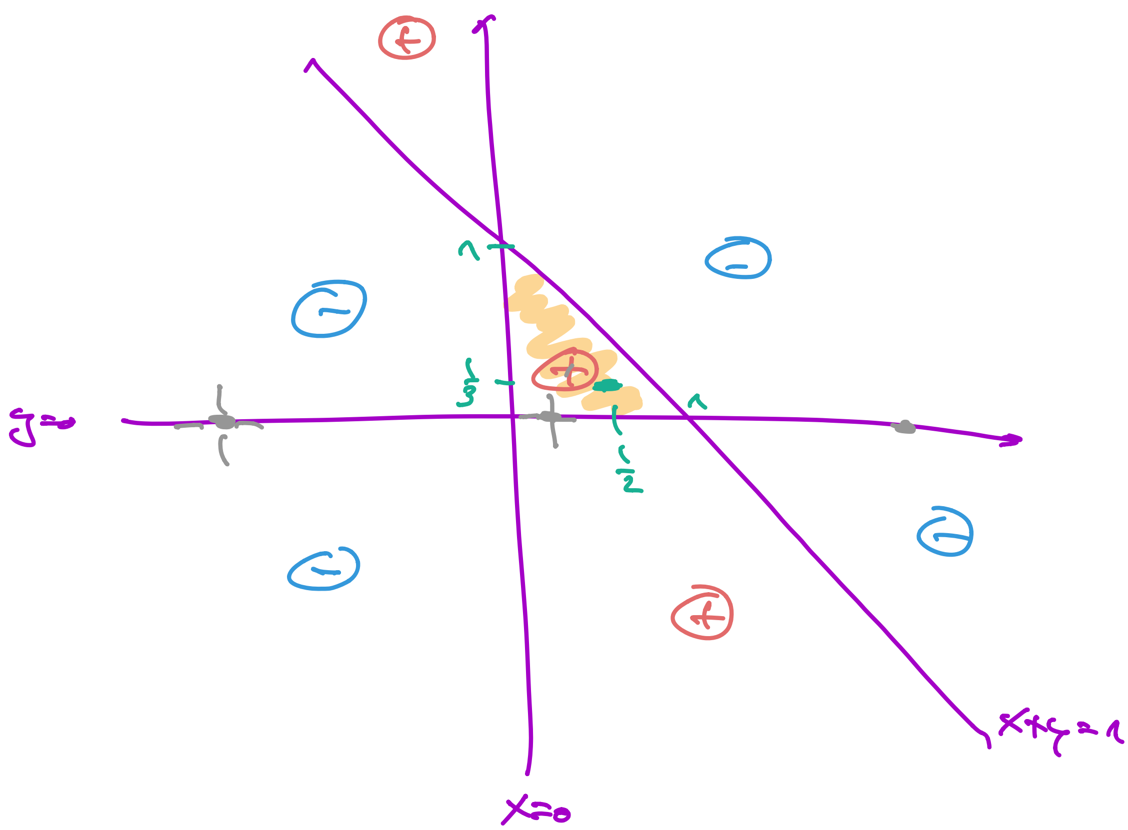
$$= \{x=0\} \cup \{y=0\} \cup \{x+y=1\}$$



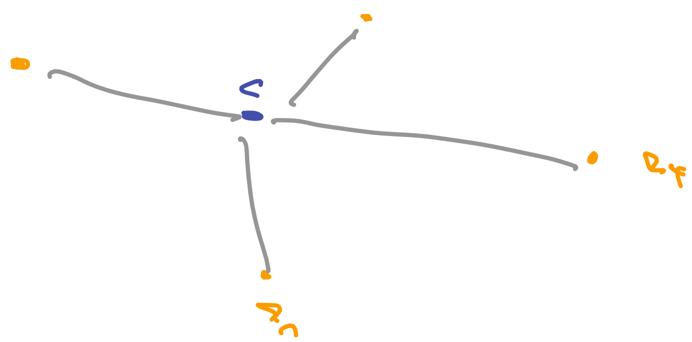
$$x^3y^2(1-x-y)$$

$x<0,\ y<0$: $\underbrace{x^3<0,\ y^2>0,\ (1-x-y)>0}_{<0}$

Nullstellenmenge von f:



2 Gegeben sind m Punkte $a_1, .., a_m$ im $\mathbb{R}^n$. Finden sie den Punkt c im $\mathbb{R}^n$, wo die Summe aller ihrer quadrierten Abstände zum Punkt c minimal wird.



Zielfunktion:

$$f(x) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} \|x - a_i\|_2^2 = \min!$$

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \qquad C^\infty$$

Gesucht: kritische Punkte.

$$\nabla f(x) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} \nabla(\quad)$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (x - a_i)$$

$$\frac{1}{2}\|x\|^2 = \frac{1}{2}\langle x, x\rangle : \quad Df(x)h = \langle x, h\rangle$$

$$\nabla f(x) = x$$

$$\nabla f(x) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{m} \nabla(\quad)$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (x - a_i)$$

$$= \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^{m} x - \sum_{i=1}^{m} a_i \right)$$

$$= x - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} a_i$$

Schwerpunkt

Also

$$x = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} a_i \quad \text{einzige kritische P.}$$

Ferner ... superlinear wachsend auf:

$$\lim_{|x| \to \infty} f(x) = \infty$$

$$f(x) \xrightarrow[|x| \to \infty]{} \infty$$

koerzitiv

Dann muss der einzige kritische Punkt ein globales Min. sein.

Für $n = 2$

$$Hf = E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} > 0.$$

3 Finden sie den Quader, der bei gegebener Kantenlänge das größte Volumen aufweist.

Kanten: x, y, z

$V = xyz = \max!$, $K = x+y+z = $ fest!

Können $K = 3$ fixieren.

Dann

$$z = 3 - x - y \geq 0,$$

$$V = V(x,y) = xy(3-x-y) = \max!$$

wobei $x, y \geq 0$, $x+y \leq 3$. $\quad = 3xy - x^2y - xy^2$

Gradient von V:

$$\nabla V = \begin{pmatrix} 3y - 2xy - y^2 \\ 3x - x^2 - 2xy \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dann 4 Lösungen:

$$\underbrace{(0,0),\ (3,0),\ (0,3)}_{\text{kommen nicht in Frage, weil } V=0},\ (1,1)$$

Kann nur Maximalstelle sein:

$$x = 1,\ y = 1,\ z = 3-x-y = 1$$

$$\nabla U = \begin{pmatrix} 3y - 2xy - y^2 \\ 3x - x^2 - 2xy \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Hess} U(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & 3-2x-2y \\ 3-2x-2y & -2x \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Hess} U(1,1) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad < 0$$

$$\det(\;) = 4 - 1 = 3 > 0$$

Bem:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{cases} > 0 & : \text{definit} \\ = 0 & : \text{semidefinit} \\ < 0 & : \text{indefinit} \end{cases}$$

$$\operatorname{Hess} f(x) : \boxed{\begin{aligned} & D^2 f(x)(h,h) \\ & = \langle \operatorname{Hess} f(x) h, h \rangle \end{aligned}}$$