Prof. TeknD Timo Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis 2 (SS 2019) — Blatt 14

Es gibt mehr Leute, die kapitulieren, als solche, die scheitern.
(Henry Ford)

Viel Erfolg bei der Scheinklausur!

Votieraufgaben

14.1. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) := \begin{cases} |x_1x_2|^{\frac{1}{4}} \exp\left(-|x_1x_2|^{\frac{1}{2}} \left(x_1^2 + x_2^2\right)^{-1}\right), & (x_1, x_2) \neq (0, 0) \\ 0, & (x_1, x_2) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion f im Punkt $x_0 = (0, 0)$ Gâteaux-differenzierbar ist und berechnen Sie die entsprechende Gâteaux-Ableitung $f_s'(0) = Df(0)[\cdot] \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$.

(b) Zeigen Sie, dass f im Punkt $x_0 = (0, 0)$ nicht Fréchet-differenzierbar ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Folge $h^{(n)} := (h_1^{(n)}, h_2^{(n)})$, wobei

$$h_1^{(n)} := \frac{\cos(\theta_n)}{n}, \qquad h_2^{(n)} := \frac{\sin(\theta_n)}{n}$$

und $\theta_n \in [0, \frac{\pi}{4}]$ die Lösung der Gleichung

$$n^2 \sin(2\theta_n) = 1$$

ist.

14.2. **(a)** Sei $\lambda > 0$ und die Funktion $f : \mathbb{R}^3\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \|x\|^{-1} \mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}\|x\|}.$$

Zeigen Sie, dass f die Eigenwertgleichung in $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ löst, d.h. es gilt

$$\Delta f(x) = \lambda f(x), \quad x \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\},$$

wobei $\Delta f(x) := \sum\limits_{k=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} f(x)$.

(b) Sei $u : (0, \infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$u(t, x) := t^{-\frac{n}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{4t}}, \quad t \in (0, \infty),\ x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass u die Wärmeleitungsgleichung löst, d.h. es gilt

$$\partial_t u(t, x) = \Delta_x u(t, x),$$

wobei $\Delta_x u(t, x) := \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} u(t, x)$.

14.3. **(a)** Beweisen Sie die folgende Aussage:
Gilt für eine Funktion $f \in C([0,1],\mathbb{R})$ die Identität

$$\int_0^1 f(x)h(x)dx = 0$$

für beliebiges $h \in C([0,1],\mathbb{R})$, so ist $f(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$.

(b) Entwicklen Sie die Funktion

$$f(x,y) = x_2^3 + 2x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 - 6x_1 - 3x_2 + 5$$

im Punkt $(1,-2)$ in eine Taylorsumme bis zur Ordnung $o(\|h\|^2)$.

(c) Betrachten Sie die Abbildung

$$T : C[0,1] \to \mathbb{R}, \quad T(v) := \int_0^1 v(x)(1-v(x))(2-v(x))\,\mathrm{d}x.$$

Bestimmen Sie die (kritischen) Punkte $v_* \in C[0,1]$, in welchen die Fréchet-Ableitung von T verschwindet. Entwicklen Sie T in jedem dieser Punkte v_* in eine Taylorsumme bis zur Ordnung $o(\|h\|^2)$.

14.4. Berechnen Sie die Jacobi-Matrizen folgender Abbildungen.

(a) $f : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}^2,\ f(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} x_1x_2 \\ \frac{\sqrt{x_1}}{x_2} \end{pmatrix}$

(b) $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ g(x_1,x_2) = \ln\left(x_1^2 + x_2^2\right)$

(c) $h : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R},\ h = g \circ f$

- **(i)** unter Verwendung, sowie
- **(ii)** ohne Verwendung der Kettenregel

14.5. **(a)** Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiter Ordnung folgender Funktionen.

(i) $f : \mathbb{R} \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\quad f(x_1,x_2) := x_2^{x_1}$ in $(1,1)^\top$

(ii) $g : (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $\quad g(x_1,x_2) := x_1^3x_2^2(1-x_1-x_2)$ in $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)^\top$

(iii) $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}\setminus\{0\} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad h(x_1,x_2,x_3) := x_3 \exp\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$ in $(0,1,1)^\top$

(b) Approximieren Sie die Zahl $\lambda := 0.99^{1.01}$ mithilfe von Aufgabenteil **(a)** zunächst linear und anschließend quadratisch. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Ergebnis eines Taschenrechners.