Analysis 2 (SS 2019) — Blatt 1

On peut même dire que cette Analyse s'étend au-delá de l'infini : car elle ne se borne pas aux différences infiniment petites ; mais elle découvre les rapports des différences de ces différences, ceux encore des différences troisièmes, quatrièmes et ainsi de suite, sans trouver jamais de terme qui la puisse arrêter.
(Guillaume Francois Antoine, Marquis de L'Hôpital)

1.1. *Folgende Aufgabe wurde in den siebziger Jahren als Teil der Abschlussprüfung an Realschulen in Baden-Württemberg gestellt.* [1]

Von einem Dreieck sind die Winkel $\alpha = 35°$ und $\beta = 75°$, sowie die Seite $\overline{AC} = b = 8{,}2\,\text{cm}$ gegeben.

(a) Konstruieren Sie das Dreieck ABC und den Umkreismittelpunkt M. Berechnen Sie anschließend die Seiten $\overline{AB} = c$ und $\overline{BC} = a$, sowie die Länge des Umkreisradius r.

(b) Außerhalb des Dreiecks ABC liegt ein Punkt D mit $\overline{AD} = \overline{CD} = d = 6\,\text{cm}$. Berechnen Sie die Strecke $\overline{BD} = e$.

(c) Die Gerade $\overline{DM}$ schneidet $\overline{AB}$ in E. Begründen Sie, weshalb D und M auf der Mittelsenkrechten von $\overline{AC}$ liegen, und berechnen Sie sowohl Umfang als auch Inhalt des Dreiecks ADE.

Sollten spezielle trigonometrische Beziehungen am Dreieck benötigt werden, sollten diese entsprechend begründet oder hergeleitet werden.

Aufgabe zur Abgabe in der Übung am 11./12. April

1.2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in einer Umgebung des Punktes $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar und im Punkt $x \in \mathbb{R}$ selbst zweimal differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$$

gilt.

Votieraufgaben

1.3. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte mithilfe der Regel von l'Hôpital.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1-} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{\sqrt{1-x}}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log(x^m+1)}{\log x^n}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\log(x+1)}\right)$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+\arctan x)^{\frac{1}{x}}$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x\right)^{\frac{1}{\log x}}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \cos x - 1}{x}$

[1] Aus: Mathematische Aufgabensammlung Realabschlußprüfung Baden-Württemberg 1971-1977, bearbeitet von Hermann-Dietrich Hornschuh

© weidl@mathematik.uni-stuttgart.de jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de

1.4. Begründen Sie, warum in den folgenden Beispielen die Anwendung von der Regel von l'Hôpital zu einem falschen Ergebnis führt. Überprüfen Sie dabei, ob der angegebene Limes existiert und geben Sie gegebenenfalls den richtigen Wert an.

(a) Es gilt

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+2x-1}{2x} = \lim_{x\to 1} \frac{6x+2}{2} = 4.$$

(b) Seien $f(x) = x + \sin x \cos x$ und $g(x) = f(x)\mathrm{e}^{\sin x}$, dann gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cos x}{x+\sin x\cos x + 2\cos x}\mathrm{e}^{-\sin x} = 0.$$

1.5. **(a)** Sei $m \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ $m-$fach differenzierbare Funktion. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass dann

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{f^{(k)}}{k!}(x_0)h^k + r_m(h)$$

gilt, wobei

$$r_m(h) = o(h^m),\ h \to 0.$$

Angenommen, die Funktion f ist nun $(m+1)$-mal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass dann ein $\xi \in \mathbb{R}$ existiert mit $x_0 < \xi < x_0 + h$, bzw. $x_0 + h < \xi < x_0$, so dass

$$r_m(h) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!}h^{m+1}$$

gilt.

(b) Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine zwei mal differenzierbare Funktion. Angenommen, es gilt

$$f(0) = f(1) = 0 \qquad \text{und} \qquad |f''(x)| \le c$$

für ein $c > 0$ und alle $x \in (0,1)$. Zeigen Sie:

$$|f'(x)| \le \frac{c}{2} \qquad \forall x \in [0,1]$$