Prof. TeknD Timo Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis 2 (SS 2019) — Blatt 3

In der Mathematik muss man mit allem rechnen.
(Werner Mitsch)

Aufgaben zur Abgabe am 25. April

3.1. Nutzen Sie die Aussagen der Aufgabe 3.5 um die folgenden Integrale zu bestimmen.

(a) $\int 3\sin(2x)\,\mathrm{d}x$, **(b)** $\int \frac{1}{2+(2+x)^2}\,\mathrm{d}x$, **(c)** $\int \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$, **(d)** $\int \frac{2}{\sqrt{2+x^2}}\,\mathrm{d}x$,

(e) $\int \frac{1}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$, **(f)** $\int \frac{3}{(1-3x)(1+3x)}\,\mathrm{d}x$, **(g)** $\int \frac{1}{x^2+4x+4}\,\mathrm{d}x$, **(h)** $\int \frac{1}{(5x+2)}\,\mathrm{d}x$.

Votieraufgaben

3.2. Sei

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\cos\left(\frac{1}{x}\right), & x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\\ 0, & x=0\end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die Funktion f unstetig ist, jedoch eine Stammfunktion besitzt.
Hinweis: Haben die Funktionen $f_1, f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ jeweils eine Stammfunktion, dann auch f_1+f_2.

3.3. Fassen Sie die folgenden Grenzwerte als geeignete Riemann-Summen auf und berechnen Sie damit

(a) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, **(b)** $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{k^2+n^2}$, **(c)** $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{n}{k^2}$,

(d) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{k(n-k)}$, **(e)** $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}$, **(f)** $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)$.

3.4. Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x)\geq 0$ für alle $x\in[a,b]$ und $f\not\equiv 0$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x>0$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die folgende Ungleichung gilt:

$$\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leq 2\max_{y\in[a,b]}|f(y)|\int_a^b (x-a)f(x)\,\mathrm{d}x$$

Zusatzaufgaben

3.5. Beweisen Sie ausgehend von der Definition oder durch Anwenden der Ableitungsregeln auf schon bewiesene Ableitungen:

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0;$

(b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x = \frac{1}{x}, \quad x > 0;$

(c) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^a = ax^{a-1}, \quad a \neq 0,\ x \neq 0;$

(d) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan x = 1 + \tan^2 x, \quad x + \frac{\pi}{2} \notin \pi\mathbb{Z};$

(e) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot x = -1 - \cot^2 x, \quad x \notin \pi\mathbb{Z};$

(f) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1;$

(g) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1;$

(h) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\arctan x = \frac{1}{1+x^2};$

(i) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arsinh} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$

(j) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{arcosh} x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad x > 1;$

(k) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{artanh} x = \frac{1}{1-x^2}, \quad -1 < x < 1.1;$

(l) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = -\sin x$

© weidl@mathematik.uni-stuttgart.de jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de