Prof. TeknD Timo Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis 2 (SS 2019) — Blatt 4

Die Hartnäckigen gewinnen die Schlachten.
(Napoleon I. Bonaparte; 1769-1821)

Aufgaben zur Abgabe am 2. Mai

4.1. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

$$\textbf{(i)} \int \sin(x)\cos(x)\,\mathrm{d}x,\ \textbf{(ii)} \int x^\alpha \ln(x)\,\mathrm{d}x, \alpha \in \mathbb{R},\ \textbf{(iii)} \int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{e^x+1}\,\mathrm{d}x,\ \textbf{(iv)} \int \cos(3x)\mathrm{e}^{\sin(3x)+3}\,\mathrm{d}x.$$

4.2. Berechnen Sie

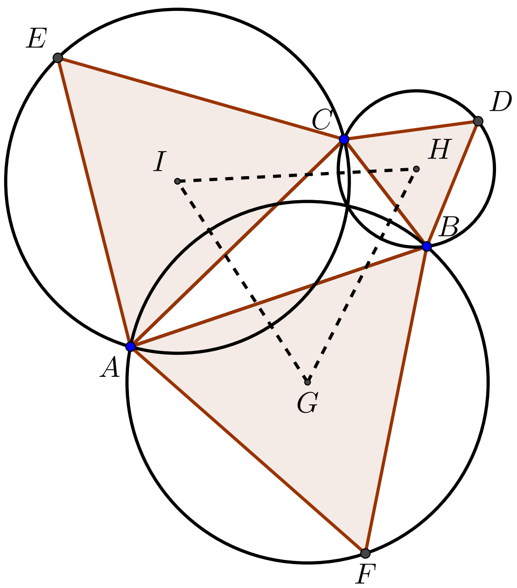
$$\textbf{(i)} \int_0^{\ln(\mathrm{e}-1)} \frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x,\quad \textbf{(ii)} \int_2^{\sqrt{13}} x\sqrt{x^2-4}\,\mathrm{d}x,\quad \textbf{(iii)} \int_{-2}^{-1} \frac{21x^2-1}{x-7x^3}\,\mathrm{d}x,\quad \textbf{(iv)} \int_0^1 \mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe zur Abgabe am 9. Mai

4.3. Gegeben sei ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$. Nun werde über der Seite AB, der Seite BC und der Seite CA wie in der nachfolgenden Abbildung jeweils ein nach außen gerichtetes gleichseitiges Dreieck errichtet.

(a) Zeigen Sie, dass sich die Umkreise der entstehenden gleichseitigen Dreiecke in einem Punkt schneiden.

(b) Beweisen Sie, dass das durch die Mittelpunkte der gleichseitigen Dreiecke bestimmte Dreieck GHI wiederum gleichseitig ist.[1]



[1] Diese Aussage ist als der Satz von Napoleon bekannt.

 weidl@mathematik.uni-stuttgart.de jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de
simon.barth@mathematik.uni-stuttgart.de andreas.bitter@mathematik.uni-stuttgart.de

Votieraufgaben

4.4. **(a)** Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq (2k+1)\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ und $u(x) = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Zeigen Sie

(i) $\sin(x) = \dfrac{2u}{1+u^2}$, **(ii)** $\cos(x) = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$.

(b) Nutzen Sie Aufgabenteil **(a)** zur Berechnung des unbestimmten Integrals

$$\int \frac{1}{\sin(x) + \cos(x) + 1} \, \mathrm{d}x.$$

4.5. Gegeben sei für $n \in \mathbb{N}_0$ der Ausdruck

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) \, \mathrm{d}x.$$

(a) Zeigen Sie, dass für $n \geq 2$ die folgende Rekursinsformel gilt:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

(b) Folgern Sie aus dem Aufgabenteil **(a)**, dass

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{\pi}{2}$$

gilt.

4.6. Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

(a) $\displaystyle\int \sin^2(x) \, \mathrm{d}x$;

(b) $\displaystyle\int x^5 \cos\left(x^3\right) \, \mathrm{d}x$;

(c) $\displaystyle\int x \cos^2(x) \, \mathrm{d}x$;

(d) $\displaystyle\int \frac{\ln(1+x)}{x^{3/2}} \, \mathrm{d}x$;

(e) $\displaystyle\int \tan^2(x) \, \mathrm{d}x$ für $|x| < \frac{\pi}{2}$;

(f) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \, \mathrm{d}x$;

(g) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + \sin x}$ für $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$;

(h) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{2x}(2x+1)\sin(3x) \, \mathrm{d}x$;

(i) $\displaystyle\int \frac{(\ln x)^3}{x} \, \mathrm{d}x$;

(j) $\displaystyle\int x^n \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$ für $n \in \mathbb{N}$.