Prof. TeknD Timo Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis 2 (SS 2019) — Blatt 5

Das Ergebnis habe ich schon, jetzt brauche ich nur noch den Weg, der zu ihm führt.
(Carl Friedrich Gauß; 1777-1855)

Aufgaben zur Abgabe am 9. Mai

5.1. Nutzen Sie Polynomdivision und Partialbruchzerlegung um die folgenden unbestimmten Integrale zu berechnen:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+bx+c}\,\mathrm{d}x,\ b,c\in\mathbb{R}$ **(b)** $\displaystyle\int \frac{3x^2-5x+4}{x^3-3x^2+6x-4}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$ **(d)** $\displaystyle\int \frac{x^4-4x^3-x^2+16x-12}{x^2+x-2}\,\mathrm{d}x$

5.2. Gegeben seien $\alpha,\beta>0$ und die Kurve

$$\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3,\ \gamma(t)=(\alpha\cos(t),\alpha\sin(t),\beta t).$$

(a) Berechnen Sie in jedem Punkt der Kurve den Tangentialvektor und geben Sie die Parametrisierung nach der Bogenlänge an.

(b) Berechnen Sie in jedem Punkt der Kurve den Krümmungsvektor und die Krümmung der Kurve.

(c) Skizzieren Sie die Kurve.

Votieraufgaben

5.3. Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(a-x+b)\,\mathrm{d}x$$

gilt.

(b) Nutzen Sie Aufgabenteil **(a)** um das folgende Integral zu bestimmen:

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^2(x)}{\pi x-2x^2}\,\mathrm{d}x$$

5.4. Gegeben sei die Kurve

$$\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^2,\ \gamma(t)=\begin{cases}(0,0), & t=0\\ (t,t^2\cos(\pi t^{-2})), & t\in(0,1]\end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass γ injektiv und differenzierbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass γ nicht rektifizierbar ist.

5.5. Berechnen Sie die Bogenlängen der beiden ebenen Kurven

(a) $y = x^{\frac{3}{2}},\ 0 \leq x \leq 2,$ **(b)** $\frac{y^2}{2} - \ln(y) = 2x,\ 1 \leq y \leq 2.$

Zusatzaufgaben

5.6. Gegeben sei für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $4\beta > \alpha^2$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ die Funktion

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = (x^2 + \alpha x + \beta)^{-n}.$$

(a) Berechnen Sie

(i) $\int f_1(x)\,\mathrm{d}x,$ **(ii)** $\int x f_1(x)\,\mathrm{d}x.$

(b) Zeigen Sie, dass für $n \geq 2$ folgende Rekursionsgleichungen gelten:

(i) $$\int f_n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(n-1)(4\beta - \alpha^2)} \left((4n-6) \int f_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x + (2x + \alpha) f_{n-1}(x) \right)$$

(ii) $$\int x f_n(x)\,\mathrm{d}x = -\left(\frac{\alpha}{2} \int f_n(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2(n-1)} f_{n-1}(x) \right)$$

(c) Berechnen Sie das folgende unbestimmte Integral:

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$