Prof. TeknD Timo Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis 2 (SS 2019) — Blatt 6

Der Kreis ist eine geometrische Figur, bei der an allen Ecken und Kanten gespart wurde.

Aufgaben zur Abgabe am 16. Mai

6.1. Gegeben sei für $\alpha > 0$ die Kurve Γ_α mit der Parametrisierung

$$\varphi_\alpha : [0, \alpha] \to \mathbb{R}^2,\ \varphi_\alpha(t) = (2t - t^2, 2t^2 - t^3).$$

(a) Bestimmen Sie alle $\alpha^* > 0$ derart, dass Γ_{α^*} eine geschlossene Kurve ist.

(b) Berechnen Sie den von Γ_{α^*} eingeschlossenen Flächeninhalt.

Aufgabe zur Abgabe am 23. Mai

6.2. Gegeben seien drei Punkte A, B, C in der Ebene. Konstruieren Sie geometrisch denjenigen Punkt P, so dass die Summe der Abstände von P zu den vorgegebenen Punkten A, B, C minimal ist.

Votieraufgaben

6.3. Gegeben seien $\beta > \alpha > 0$ und die Menge

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - \beta)^2 \leq \alpha^2,\ |x| \leq \alpha\}.$$

(a) Skizzieren Sie M.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von M.

(c) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch die Rotation von M um die y-Achse entsteht.

(d) Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch die Rotation von M um die x-Achse entsteht.

6.4. Gegeben sei eine ebene Kurve Γ in Polarkoordinaten, d.h.

$$x(\theta) = r(\theta)\cos(\theta), \qquad y(\theta) = r(\theta)\sin(\theta), \qquad \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1,$$

wobei $r : [\theta_0, \theta_1] \to \mathbb{R}$ eine stetig-differenzierbare Funktion ist.

(a) Zeigen Sie, dass

$$L_\Gamma = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\, \mathrm{d}\theta$$

gilt.

(b) Berechnen Sie L_Γ, falls Γ durch die Punktmenge

$$\left\{ r(\theta) = \frac{1}{(1 + \cos(\theta))},\ |\theta| < \frac{\pi}{2} \right\}$$

gegeben ist.

Hinweis: Die Beziehung $1 + \cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ könnte nützlich sein.

6.5. Bestimmen Sie für $\alpha > 0$ das Volumen des Körpers K_α, der durch den Schnitt des Paraboloids

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 2\alpha z\}$$

mit der Kugel

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\alpha^2\}$$

entsteht.

6.6. **(a)** Berechnen Sie die Oberfläche und das Volumen des Körpers, welcher durch die Drehung des Graphen der Funktion

$$f : (-\alpha, \alpha) \to \mathbb{R},\ f(x) = \alpha \cosh\left(\frac{x}{\alpha}\right), \alpha > 0,$$

um die x-Achse entsteht.

Zusatzaufgaben

6.7. Bestimmen Sie für $\alpha > 0$ das Volumen des Körpers K_α, der durch den Schnitt des Zylinders

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq \alpha x\}$$

mit der Kugel

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq \alpha^2\}$$

entsteht.