# Analysis 2 (SS 2019) — Blatt 7

*Die Menschen, die den richtigen Weg gehen wollen, müssen auch von Irrwegen wissen.*
*(Aristoteles)*

**Aufgaben zur Abgabe am 23. Mai**

**7.1.** Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz.

$$\textbf{(i)} \int_1^\infty \frac{x^2}{x^4+2x^2+1}\,\mathrm{d}x \quad \textbf{(ii)} \int_0^1 \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)\mathrm{d}x \quad \textbf{(iii)} \int_0^2 \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x \quad \textbf{(iv)} \int_0^\infty \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$$

**Votieraufgaben**

**7.2.** Es sei $a < c < b$ und $f : [a,c) \cup (c,b] \to \mathbb{R}$ mit $f|_{[a,c-\varepsilon]} \in \mathcal{R}[a-\varepsilon, c]$ und $f|_{[c+\varepsilon,b]} \in \mathcal{R}[c+\varepsilon, b]$ für alle hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie:

**(a)** Ist $f$ die Einschränkung einer Funktion $\tilde{f} \in \mathcal{R}[a,b]$, so konvergiert das uneigentliche Riemann-Integral von $f$ und es gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \tilde{f}(x)\,\mathrm{d}x.$$

**(b)** Konvergiert das uneigentliche Riemann-Integral von $f$, so konvergiert auch der Cauchy'sche Hauptwert von $f$ und es gilt

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

**7.3.** **(a)** Sei $f \in C^4([a,b])$ und $h = \frac{b-a}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Definiere

$$x_k := a + kh,\ k \in \{0,\dots,n\}, \qquad \text{und} \qquad \xi_k := \frac{x_k + x_{k-1}}{2},\ k \in \{1,\dots,n\}.$$

Sei weiterhin für $x \in [x_{k-1}, x_k]$ der Ausdruck $P_2(x)$ gegeben durch

$$\frac{(x-\xi_k)(x-x_{k-1})}{(x_k-\xi_k)(x_k-x_{k-1})} f(x_k) + \frac{(x-x_k)(x-x_{k-1})}{(\xi_k-x_k)(\xi_k-x_{k-1})} f(\xi_k) + \frac{(x-\xi_k)(x-x_k)}{(x_{k-1}-\xi_k)(x_{k-1}-x_k)} f(x_{k-1}).$$

Zeigen Sie, dass für $I_n(f) := \sum\limits_{k=1}^n \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} P_2(x)\,\mathrm{d}x$ folgende Fehlerabschätzung gilt:

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - I_n(f) \right| \le \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4} \max_{x\in[a,b]} \left| f^{(4)}(x) \right|$$

**(b)** Berechnen Sie damit das Integral

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

bis auf einen absoluten Fehler kleiner als $1.6 \cdot 10^{-3}$.

**7.4.** **(a)** Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $F : [0, \infty) \to \mathbb{K}^n$ eine Funktion. Zeigen Sie das Cauchy-Kriterium:

$$\exists_{A \in \mathbb{K}^p} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{R_\varepsilon \geq 0} \forall_{x > R_\varepsilon} \|F(x) - A\| < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{R_\varepsilon \geq 0} \forall_{x, y > R_\varepsilon} \|F(x) - F(y)\| < \varepsilon$$

**(b)** Sei $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine monotone Funktion, so dass das uneigentliche Integral $\int\limits_0^\infty f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ konvergiert. Zeigen Sie $f \overset{x \to +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{1}{x}\right)$.

**(c)** Nutzen Sie das Cauchy-Kriterium um zu zeigen, dass in **(b)** sogar $f \overset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x}\right)$ gilt.

**(d)** Geben Sie ein Beispiel einer Funktion $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ an, welche auf jedem endlichen Intervall Riemann-integrierbar ist, für welche $\int\limits_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert, und welche für $x \to \infty$ nicht gegen Null konvergiert.

**7.5.** Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$. Angenommen, das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f'(x)|\,\mathrm{d}x \tag{$*$}$$

konvergiert. Zeigen Sie, dass die Funktion $f$ dann beschränkt ist. Gilt auch die Umkehrung? Kann also aus der Beschränktheit von $f$ die Konvergenz von $(*)$ gefolgert werden?

**7.6.** Untersuchen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale bzw. die Cauchy'schen Hauptwerte auf Konvergenz.

**(a)** $\int_0^1 x^\alpha\,\mathrm{d}x,\ \alpha \in \mathbb{R}$ **(b)** $\int_1^\infty x^\alpha\,\mathrm{d}x,\ \alpha \in \mathbb{R}$ **(c)** $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x$

**(d)** $\int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x}\,\mathrm{d}x$ **(e)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x$ **(f)** $\int_0^\infty e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x,\ \alpha \in \mathbb{R}$

**(g)** v.p. $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ **(h)** v.p. $\int_0^\infty \frac{1}{x^2-3x+2}\,\mathrm{d}x$ **(i)** v.p. $\int_{-\infty}^\infty \frac{1-x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$