Prof. TeknD Timo Weidl
Jan Köllner, M.Sc.
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis 2 (SS 2019) — Blatt 8

Alle Pädagogen sind sich darin einig: man muß vor allem tüchtig Mathematik treiben, weil ihre Kenntnis fürs Leben größten direkten Nutzen gewährt.
(Felix Klein)

Aufgaben zur Abgabe am 31. Mai in der jeweiligen Übungsgruppe

8.1. Bestimmen Sie jeweils den Wert folgender Reihen:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_{n}^{3n} e^{-x}\,\mathrm{d}x$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2+8n+3}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{\left[\frac{n}{2}\right]} y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}, \ |xy| < 1$

Für eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ ist $[a] = \max\{k \in \mathbb{Z} |\ k \leq a\}$ die bekannte Gaußklammer.

8.2. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 1, & \exists\, n \in \mathbb{N} : x \in \left[n, n + \frac{1}{n^2}\right) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_{1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

konvergiert, jedoch die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

divergiert. Wieso steht das nicht im Widerspruch zum Integralkriterium von Cauchy?

Aufgabe zur Abgabe am 6. Juni

8.3. Gegeben seien drei verschiede Kreise in der Ebene. Konstruieren Sie einen weiteren Kreis, der diese drei Kreise gleichzeitig berührt. Wie viele solche Kreise gibt es? [1]

[1] Es ist ein Spezialfall des Apollonischen Berührproblems

Votieraufgaben

8.4. **(a)** Beweisen Sie den Umordnungssatz von Riemann:

Satz. *Gegeben sei eine Folge reeller Zahlen* $a_n \in \mathbb{R}$ *mit* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. *Seien weiterhin für* $a_n^+ := \max\{0, a_n\}$ *und* $a_n^- := \max\{0, -a_n\}$ *die beiden Reihen* $\sum_{n=1}^\infty a_n^+$ *und* $\sum_{n=1}^\infty a_n^-$ *divergent. Dann gibt es für jedes* $r \in \mathbb{R}\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$ *eine bijektive Abbildung* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *so dass die Reihe*

$$\sum_{n=1}^\infty a_{\varphi(n)}$$

gegen $r \in \mathbb{R}$ *konvergiert bzw. gegen* $r \in \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ *bestimmt divergiert.*

(b) Wir betrachten die Reihe

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} \tag{1}$$

und ihre Umordnung

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \quad + \quad + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} \quad + \quad \dots \tag{2}$$

Zeigen Sie, dass beide Reihen konvergieren, wobei der Grenzwert von (1) kleiner als $\frac{5}{6}$ und der Grenzwert von (2) größer als $\frac{5}{6}$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

konvergiert und ordnen Sie anschließend ihre Summanden so um, dass die umgeornete Reihe divergiert.

8.5. **(a)** Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergent ist, falls $\alpha > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ existieren, so dass

$$\frac{\ln\left(a_n^{-1}\right)}{\ln n} \geq 1 + \alpha$$

für alle $n \geq n_0$ gilt. Gilt jedoch

$$\frac{\ln\left(a_n^{-1}\right)}{\ln n} \leq 1$$

für $n \geq n_0$, dann ist die Reihe divergent.

(b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(i) $\displaystyle\sum_{n=3}^\infty \frac{1}{(\ln(\ln n))^{\ln n}}$ **(ii)** $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$

8.6. **(a)** Beweisen Sie das Kriterium von Kummer:

Satz. *Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Folge positiver Zahlen, so dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^{-1}$ divergiert. Sei weiterhin für positive Zahlen $a_n > 0$*

$$K_n := c_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - c_{n+1}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Gilt $K_n \geq \delta$ für ein $\delta > 0$ und alle $n \geq n_0$, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ist hingegen $K_n \leq 0$ für alle $n \geq n_0$, so divergiert diese Reihe.

(b) Untersuchen Sie, für welche $x > 0$ die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

konvergiert.

8.7. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Zeigen Sie

(a) Konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$, dann ist die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch

$$s_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

ebenfalls konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a$. Geben Sie ein Beispiel dafür an, dass die Konvergenz von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht zwingend die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ impliziert.

(b) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right)$$

genau dann, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

8.8. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n+1}$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln^x(n)}, \ x > 1$ **(e)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\sin(n)}{2+\sin(n)}\right)^{2n-\ln n}$ **(f)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{\ln n}, \ x > 0$

(g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt[n]{x} - 1), \ x > 0$ **(h)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)-\cos(n+1)}{n}$ **(i)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$