Prof. TeknD Timo Weidl
Simon Barth, M.Sc., Andreas Bitter, M.Sc.
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis 2 (SoSe 2019) — Vortragsübung 3

Everyone knows what a curve is, until he has studied enough mathematics to become confused through the countless number of possible exceptions.
(Felix Klein; 1849-1925)

3.1. Seien $a, b > 0$. Die logarithmische Spirale kann durch die Funktion

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \Big(a\mathrm{e}^{bt}\cos(t), a\mathrm{e}^{bt}\sin(t)\Big)$$

beschrieben werden.

(a) Berechnen Sie die Bogenlänge der durch $\gamma|_{[0,4\pi]}$ parametrisierten Kurve.

(b) Parametrisieren Sie $\gamma|_{[0,4\pi]}$ nach Bogenlänge.

(c) Berechnen Sie in jedem Punkt den Krümmungsvektor und die Krümmung der durch $\gamma|_{[0,4\pi]}$ parametrisierten Kurve für $a = b = 1$.

3.2. Die Kardioide ist gegeben durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = a\big(\cos(t)(1 + \cos(t)), \sin(t)(1 + \cos(t)\big), \quad a > 0.$$

Berechnen Sie den Flächeninhalt der von der Kardioide eingeschlossenen Fläche.

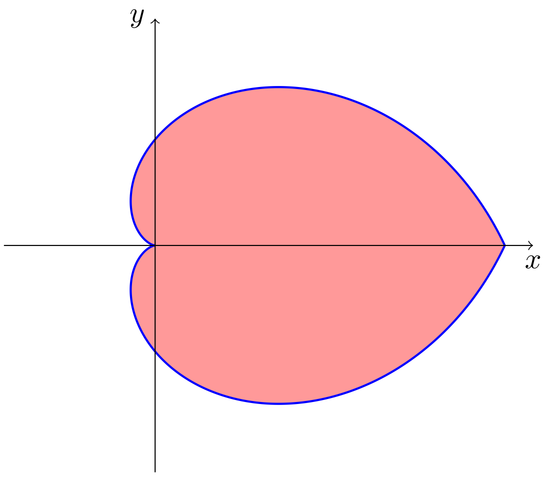

Abbildung 1: Kardioide

3.3. Die archimedische Spirale kann beschrieben werden durch die Funktion

$$\gamma : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (at\cos(t), at\sin(t)), \quad \text{wobei } a > 0.$$

(a) Berechnen Sie die Länge des Bogenstücks der ersten Umdrehung.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Streifens, der von der Spirale bei der ersten Umdrehung eingeschlossen wird.

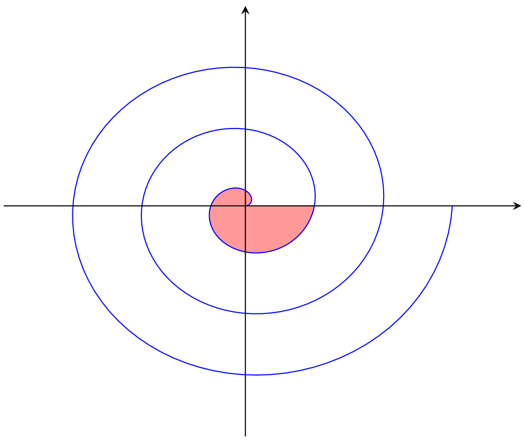

Abbildung 2: Archimedische Spirale

3.4. Seien $a, b > 0$. Bestimmen Sie das Volumen und den Oberflächeninhalt des Rotationsellipsoids, der durch Rotation der von der Halb-Ellipse

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq 0, \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

eingeschlossenen Fläche um die x-Achse entsteht.

3.5. Berechnen Sie das Volumen des Körpers, der durch den Schnitt des Kegels

$$K_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x \geq 0, \ y^2 + z^2 \leq x^2 \right\}$$

mit der Kugel

$$K_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \right\}$$

entsteht.