Aufgabe 1 (3 Punkte)**.** a) Formulieren Sie das Lemma von Fatou.

b) Geben Sie ein Beispiel, dass in dessen Aussage auch die strikte Ungleichung auftreten kann.

c) Geben Sie ein Beispiel, wo die Aussage des Lemmas für nicht nicht-negative Funktionen *nicht* gilt.

Lösung.

a) *Lemma von Fatou*: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine μ-fast überall konvergente Folge nicht-negativer Funktionen in $\mathcal{M}^n(\mu)$ und sei

$$f =_\mu \lim_{n\to\infty} f_n <_\mu \infty.$$

Dann ist f μ-summierbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

b) Man nehme z.B.[1] $\mu = \lambda_1$ und $f_n := \chi_{[n,n+1]}$. Dann $f_n \to_\mu f \equiv 0$ und

$$\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\lambda_1 = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\lambda_1 = \int_n^{n+1} \mathrm{d}x = 1, \quad 0 < 1.$$

c) Man nehme z.B. $\mu = \lambda_1$ und $f_n := -\chi_{[n,n+1]}$. Dann $f_n \to_\mu f \equiv 0$ und

$$\int_{\mathbb{R}} f \,\mathrm{d}\lambda_1 = 0, \quad \int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\lambda_1 = \int_n^{n+1} (-1) \,\mathrm{d}x = -1, \quad 0 > -1.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Verifizieren Sie den Satz von Stokes

$$\int_I \mathrm{d}\omega = \int_{\partial I} \omega$$

für das Standardquadrat $I = [0,1]^2$ und $\omega = f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y$, indem Sie beide Seiten unabhängig voneinander direkt berechnen. Dabei sind $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

Lösung. *Linke Seite*: Es ist

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x + \mathrm{d}g \wedge \mathrm{d}y = (f_x\,\mathrm{d}x + f_y\,\mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}x + (g_x\,\mathrm{d}x + g_y\,\mathrm{d}y) \wedge \mathrm{d}y \\ &= (g_x - f_y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \end{aligned}$$

[1] Weitere Beispiele sind $f_n := n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ und $f_n := \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$. Analog erhält man jeweils ein Beispiel für Teil c), indem man mit -1 multipliziert.

und somit, dank Fubini und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned}\int_I \mathrm{d}\omega &= \int_0^1 \int_0^1 (g_x - f_y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 (g(1,y) - g(0,y))\,\mathrm{d}y - \int_0^1 (f(x,1) - f(x,0))\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (g(1,t) - g(0,t) + f(t,0) - f(t,1))\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Rechte Seite: Der Rand ∂I wird (orientierungserhaltend) parametrisiert durch die vier Teilstücke $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\begin{array}{llll} \gamma_1(t) = (t,0), & \gamma_2(t) = (1,t), & \gamma_3(t) = (1-t,1), & \gamma_4(t) = (0,1-t), \\ \gamma_1'(t) = (1,0), & \gamma_2'(t) = (0,1), & \gamma_3'(t) = (-1,0), & \gamma_4'(t) = (0,-1). \end{array}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}\int_{\partial I} \omega &= \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} (f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y) = \sum_{i=1}^4 \int_0^1 \big(f(\gamma_i(t))\,\mathrm{d}x(\gamma_i'(t)) + g(\gamma_i(t))\,\mathrm{d}y(\gamma_i'(t))\big)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \big(f(t,0)\cdot 1 + g(t,0)\cdot 0 + f(1,t)\cdot 0 + g(1,t)\cdot 1 + f(1-t,1)\cdot(-1) \\ &\quad + g(1-t,1)\cdot 0 + f(0,1-t)\cdot 0 + g(0,1-t)\cdot(-1)\big)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (f(t,0) + g(1,t) - g(0,1-t) - f(1-t,1))\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (g(1,t) - g(0,t) + f(t,0) - f(t,1))\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

(Dabei wurde an geeigneter Stelle $t \rightsquigarrow 1-t$ substituiert.) Insgesamt sieht man, dass linke Seite und rechte Seite übereinstimmen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie die Greensche Formel

$$\int_{M^3} (\nabla g \bullet \nabla f + g\Delta f)\,\mathrm{d}V = \int_{\partial M^3} g\frac{\partial f}{\partial n}\,\mathrm{d}A.$$

Lösung. Das Vektorfeld $F : M \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch $F := g \cdot \nabla f$. Dann ist

$$\partial_i F_i = \partial_i (g \cdot \partial_i f) = \partial_i g \cdot \partial_i f + g \cdot \partial_i^2 f$$

und folglich

$$\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^3 \partial_i F_i = \sum_{i=1}^3 (\partial_i g \cdot \partial_i f) + g \cdot \sum_{i=1}^3 \partial_i^2 f = \nabla g \bullet \nabla f + g \cdot \Delta f.$$

Aus dem Satz von Gauß, angewandt auf F, folgt nun

$$\begin{aligned}\int_M (\nabla g \bullet \nabla f + g \cdot \Delta f)\,\mathrm{d}V &= \int_M \operatorname{div} F\,\mathrm{d}V = \int_{\partial M} F \bullet n\,\mathrm{d}A = \int_{\partial M} g \cdot \nabla f \bullet n\,\mathrm{d}A \\ &= \int_{\partial M} g \cdot \frac{\partial f}{\partial n}\,\mathrm{d}A.\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte)**.** Bestimmen sie die äußere Ableitung der Differentialform

a) $y^2\,\mathrm{d}x + \sin(xy)\,\mathrm{d}y \quad$ im $\mathbb{R}^2$,

b) $xy\,\mathrm{d}x + yz\,\mathrm{d}y + zx\,\mathrm{d}z \quad$ im $\mathbb{R}^3$,

c) $x^2yz\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + xy^2z\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + xyz^2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \quad$ im $\mathbb{R}^3$.

Lösung. Seien

$$\begin{aligned}\alpha &= y^2\,\mathrm{d}x + \sin(xy)\,\mathrm{d}y,\\ \beta &= xy\,\mathrm{d}x + yz\,\mathrm{d}y + zx\,\mathrm{d}z,\\ \gamma &= x^2yz\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + xy^2z\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + xyz^2\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Unter Verwendung von $\mathrm{d}f = \sum_i f_{x_i}\,\mathrm{d}x_i$ und den Rechenregeln für äußere Ableitung und Dachprodukt berechnen wir

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\alpha &= 2y\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + y\cos(xy)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = (y\cos(xy) - 2y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,\\ \mathrm{d}\beta &= x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z,\\ \mathrm{d}\gamma &= 2xyz\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + 2xyz\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + 2xyz\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y\\ &= 6xyz\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.** Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lipschitzstetig. Zeigen Sie, dass das Bild einer Lebesgue-Nullmenge unter T wieder eine Lebesgue-Nullmenge ist.

Lösung. [2]Dass $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lipschitzstetig ist, bedeutet, dass ein $L > 0$ existiert mit

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \ \|T(x) - T(y)\| \le L\|x - y\|.$$

Sei N eine λ_n-Nullmenge, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Überdeckung mit Intervallen $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von N, sodass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(I_k) < \varepsilon.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die I_k *Würfel*[3], d.h. alle Kanten haben die gleiche Länge ℓ_k. (Ansonsten zerschneide und ergänze man die I_k auf geeignete Weise.) Dann ist das Volumen $\lambda_n(I_k) = \ell_k^n$ und der Durchmesser $\mathrm{diam}(I_k) = \sqrt{n}\ell_k$. Wegen der Lipschitzstetigkeit von T ist nun

$$\mathrm{diam}(T(I_k)) = \sup_{x,y\in I_k} \|T(x) - T(y)\| \le L \cdot \sup_{x,y\in I_k} \|x - y\| = L \cdot \mathrm{diam}(I_k).$$

[2] Vorab: diese Aufgabe war etwas gemein – da wurden wir alle gepöschelt. Deswegen ist die Korrektur auch gnädig ausgefallen.

[3] Man benötigt hier Würfel und nicht beliebige Quader, damit man Volumen und Durchmesser gegeneinander abschätzen kann. Ansonsten funktioniert der Beweis nicht!

Außerdem ist $T(I_k)$ sicherlich in einem Würfel[4] J_k der Kantenlänge

$$\ell'_k := 2\operatorname{diam}(T(I_k))$$

enthalten. Es folgt[5]

$$\lambda_n(J_k) = (\ell'_k)^n \leq 2^n L^n \operatorname{diam}(I_k)^n = 2^n L^n \sqrt{n}^n \ell_k^n = (2L\sqrt{n})^n \lambda_n(I_k).$$

Insgesamt ist

$$T(N) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} T(I_k) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$$

sowie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(J_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (2L\sqrt{n})^n \lambda_n(I_k) < (2L\sqrt{n})^n \varepsilon.$$

Dies wird durch geeignete Wahl von ε beliebig klein. Somit ist $T(N)$ eine λ_n-Nullmenge.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Gegeben ist die skalare Funktion

$$f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(u,v,w) = \mathrm{e}^{uvw}\sin(2u+4w).$$

a) Zeigen Sie, dass durch $f(u,v,w) = 0$ in einer Umgebung von $(0,0,0)$ differenzierbare Funktionen

$$u = \varphi(v,w), \quad w = \psi(u,v)$$

mit $\varphi(0,0) = 0$ und $\psi(0,0) = 0$ definiert werden.

b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\varphi_v(0,0)$ und $\varphi_w(0,0)$.

Lösung.

a) [6]Partielles Ableiten der stetig differenzierbaren Funktion f liefert

$$f_u = vw\mathrm{e}^{uvw}\sin(2u+4w) + 2\mathrm{e}^{uvw}\cos(2u+4w),$$
$$f_w = uv\mathrm{e}^{uvw}\sin(2u+4w) + 4\mathrm{e}^{uvw}\cos(2u+4w)$$

und damit $f_u(0,0,0) = 2$ sowie $f_w(0,0,0) = 4$. Außerdem ist $f(0,0,0) = 0$. Aus dem Satz über implizite Funktionen folgt nun, dass die Gleichung $f(u,v,w) = 0$ in einer Umgebung von $(0,0,0)$ durch Funktionen

$$u = \varphi(v,w), \quad w = \psi(u,v)$$

auflösbar ist. Für diese gilt insbesondere $\varphi(0,0) = 0$ und $\psi(0,0) = 0$.

[4] $T(I_k)$ ist selbst nicht zwingend ein Quader. Falls aber doch nur mit $\bigcup_k T(I_k)$ als Überdeckung von $T(N)$ gearbeitet wurde, gab es keinen Punktabzug.

[5] Auch wenn auf die Würfel verzichtet wurde, gab es für eine (moralisch richtige) Relation der Form $\lambda(J_k) \sim L^n\lambda(I_k)$ keinen Punktabzug.

[6] Erneut wurde hier gepöschelt – und diesmal, wie zum Ausgleich, wurde die Aufgabe dadurch *einfacher*. Tatsächlich ist die Gleichung $f(u,v,w) = 0$ lokal um $(0,0,0)$ nämlich äquivalent zu $2u + 4w = 0$. Damit sind $\varphi(v,w) = -2w$ und $\psi(u,v) = -\frac{1}{2}w$. Das Ableiten ist dann einfach.

b) Weiterhin gilt

$$f_v = uwe^{uvw}\sin(2u+4w)$$

und damit insbesondere $f_v(0,0,0) = 0$. Die partiellen Ableitungen von φ berechnen sich nun durch

$$\varphi_v(0,0) = -\frac{f_v(0,0,0)}{f_u(0,0,0)} = -\frac{0}{2} = 0,$$
$$\varphi_w(0,0) = -\frac{f_w(0,0,0)}{f_u(0,0,0)} = -\frac{4}{2} = -2.$$

Aufgabe 7 (5 Punkte)**.** Gegeben ist

$$f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (x(1-y), xy).$$

a) Bestimmen Sie die Jacobische von f.

b) Bestimmen Sie alle Punkte, in denen f ein lokaler Diffeomorphismus ist.

c) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung $(x,y) = f^{-1}(u,v)$ dort, wo sie definiert ist. Das heißt, lösen Sie

$$u = x(1-y), \quad v = xy$$

nach x, y auf.

d) Zeigen Sie, dass f den Streifen $S = (0,\infty)\times(0,1)$ diffeomorph auf den ersten Quadranten $Q = (0,\infty)\times(0,\infty)$ abbildet.

Lösung.

a) Die Jacobimatrix von f ist

$$Df = \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ y & x \end{pmatrix}.$$

b) Die C^1-Funktion f ist in einem Punkt (x,y) genau dann ein lokaler Diffeomorphismus, wenn $Df(x,y)$ invertierbar ist. Wegen

$$\det Df = (1-y)x + xy = x$$

ist dies genau dann der Fall, wenn $x \neq 0$ ist.

c) Ist $u = x(1-y) = x - xy$ und $v = xy$, so folgt

$$x = u+v, \quad y = \frac{v}{x} = \frac{v}{u+v}$$

unter der Voraussetzung, dass $x \neq 0$ ist.

d) Sei $(x, y) \in S$. Dann sind $x, y, 1-y > 0$ und damit auch $x(1-y) > 0$ und $xy > 0$. Es folgt $f(x, y) \in Q$.

Ist umgekehrt $(u, v) \in Q$, d.h. $u, v > 0$, so sind auch $u + v > 0$ und $\frac{v}{u+v} > 0$. Weiter ist $v < u + v$ und deshalb $\frac{v}{u+v} < 1$. Somit ist $f^{-1}(u, v) \in S$.

Insgesamt folgt, dass $f : S \to Q$ wohldefiniert und bijektiv ist. Wegen b) ist f in jedem Punkt von S ein lokaler Diffeomorphismus. Da jede lokale Umkehrabbildung mit f^{-1} übereinstimmen muss, folgt, dass f^{-1} auch C^1 ist. Somit ist $f : S \to Q$ ein Diffeomorphismus.

Aufgabe 8 (4 Punkte)**.** Sei $n \geq 3$, $A \in L(\mathbb{R}^n)$ symmetrisch und v ein Eigenvektor von A. Zeigen Sie, dass es mindestens zwei zu v orthogonale Eigenvektoren von A gibt, die kritische Punkte der Funktion

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle$$

unter den Nebenbedingungen

$$\langle x, x \rangle = 1, \quad \langle v, x \rangle = 0$$

sind.

Lösung. Die Lagrange-Funktion zu $f(x) = \langle Ax, x \rangle$ und den Nebenbedingungen $\langle x, x \rangle = 1$, $\langle v, x \rangle = 0$ ist

$$F(x, \lambda) = \langle Ax, x \rangle - \lambda_1(\langle x, x \rangle - 1) - \lambda_2 \langle v, x \rangle.$$

Abgeleitet nach x erhalten wir die Bedingung

$$\nabla_x F = 2Ax - 2\lambda_1 x - \lambda_2 v \overset{!}{=} 0, \qquad (*)$$

die ein kritischer Punkt x erfüllen muss.

Sei $Av = \mu v$ für ein $\mu \in \mathbb{R}$. Aufgrund der orthogonalen Diagonalisierbarkeit symmetrischer Matrizen kann v zu einer Orthonormalbasis $(v, v', v'', \ldots)$ von $\mathbb{R}^n$ ergänzt werden, die aus Eigenvektoren von A besteht. Insbesondere existieren zwei Vektoren v', v'' mit

$$Av' = \mu' v', \quad Av'' = \mu'' v'', \quad \mu', \mu'' \in \mathbb{R},$$

welche Länge 1 haben und orthogonal zu v sind. Diese erfüllen $(*)$ mit $\lambda_1 = \mu'$ bzw. $\lambda_1 = \mu''$ und $\lambda_2 = 0$. Somit sind diese tatsächlich kritische Punkte von f unter den obigen Nebenbedingungen.[7]

[7] Alternativ kann man argumentieren, dass die Nebenbedingung kompakt ist und f deshalb ein Maximum und ein Minimum annimt. Da die Nebenbedingung keinen Rand hat und f nicht konstant ist, erhält man somit zwei verschiedene kritische Punkte von f. Man kann dann zeigen, dass dies tatsächlich Eigenvektoren von A sind.

Fazit. Die Klausur ist insgesamt gut ausgefallen. Ich bin stolz auf euch. Aber so sehr ihr es euch auch wünscht, das Dachprodukt ist nicht kommutativ.