Aufgabe 1 (3 Punkte)**.** Sei Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{R}^2$ und die Funktion $u \in C^2(\Omega)$ sei harmonisch. Zeigen Sie, dass dann die 1-Form $u_x \,\mathrm{d}y - u_y \,\mathrm{d}x$ eine Stammfunktion v auf Ω besitzt, die ebenfalls harmonisch ist und für die

$$v_x = -u_y, \qquad v_y = u_x$$

gilt.

Lösung. Wir zeigen zunächst, dass die 1-Form $\alpha := u_x \,\mathrm{d}y - u_y \,\mathrm{d}x$ geschlossen ist. Dazu berechnen wir

$$\mathrm{d}\alpha = \mathrm{d}(u_x \,\mathrm{d}y - u_y \,\mathrm{d}x) = u_{xx} \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y - u_{yy} \,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x = (u_{xx} + u_{yy}) \,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = 0,$$

was verschwindet, da nach Voraussetzung $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ ist. Da Ω einfach zusammenhängend ist, folgt nun mit dem Lemma von Poincaré, dass α auch exakt ist. Es existiert also eine Funktion $v \in C^1(\Omega)$ mit

$$\alpha = \mathrm{d}v = v_x \,\mathrm{d}x + v_y \,\mathrm{d}y.$$

Durch Koeffizientenvergleich finden wir $v_x = -u_y$ und $v_y = u_x$. Also ist sogar $v \in C^2(\Omega)$ und dank Satz von Schwarz gilt nun

$$\Delta v = v_{xx} + v_{yy} = (-u_y)_x + (u_x)_y = 0.$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)**.** Für eine μ-summierbare, nichtnegative Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zeige man

$$\mu(\{f \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}\mu, \qquad \alpha > 0.$$

Lösung. Zerlegen wir $\mathbb{R}^n = \{f \geq \alpha\} \cup \{f < \alpha\}$, so ist auch

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}\mu = \int_{\{f \geq \alpha\}} f \,\mathrm{d}\mu + \int_{\{f < \alpha\}} f \,\mathrm{d}\mu.$$

Erstens gilt

$$\int_{\{f < \alpha\}} f \,\mathrm{d}\mu \geq 0$$

wegen der Nichtnegativität von f. Zweitens ist

$$\int_{\{f \geq \alpha\}} f \,\mathrm{d}\mu \geq \alpha \cdot \mu(\{f \geq \alpha\}).$$

Insgesamt ergibt sich (nach Division durch α)

$$\frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}\mu \geq \mu(\{f \geq \alpha\}),$$

was zu beweisen war.

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** Beweisen Sie die Greensche Formel

$$\int_{M^3} (\nabla g \bullet \nabla f + g \Delta f) \,\mathrm{d}V = \int_{\partial M^3} g \frac{\partial f}{\partial n} \,\mathrm{d}A.$$

Lösung. Das Vektorfeld $F:\ M \to \mathbb{R}^3$ sei definiert durch $F := g \cdot \nabla f$. Dann ist

$$\partial_i F_i = \partial_i(g \cdot \partial_i f) = \partial_i g \cdot \partial_i f + g \cdot \partial_i^2 f$$

und folglich

$$\operatorname{div} F = \sum_{i=1}^{3} \partial_i F_i = \sum_{i=1}^{3} (\partial_i g \cdot \partial_i f) + g \cdot \sum_{i=1}^{3} \partial_i^2 f = \nabla g \bullet \nabla f + g \cdot \Delta f.$$

Aus dem Satz von Gauß, angewandt auf F, folgt nun

$$\int_M (\nabla g \bullet \nabla f + g \cdot \Delta f)\, \mathrm{d}V = \int_M \operatorname{div} F\, \mathrm{d}V = \int_{\partial M} F \bullet n\, \mathrm{d}A = \int_{\partial M} g \cdot \nabla f \bullet n\, \mathrm{d}A$$
$$= \int_{\partial M} g \cdot \frac{\partial f}{\partial n}\, \mathrm{d}A.$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)**.** Sei $Q = \{(u,v) \mid u, v > 0\}$ der positive Quadrant in $\mathbb{R}^2$ und

$$f:\ Q \to Q:\ f(u,v) = \left(\frac{u}{u+v}, u+v\right).$$

a) Bestimmen Sie alle Punkte, in denen f ein lokaler Diffeomorphismus ist.

b) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung f^{-1} dort, wo sie definiert ist.

c) Zeigen Sie, dass f nicht surjektiv ist.

d) Bestimmen Sie die Bildmenge $f(Q)$ von f.

e) Ist f ein Diffeomorphismus auf sein Bild?

Lösung.

a) Die Jacobimatrix von f ist

$$Df = \begin{pmatrix} \frac{v}{(u+v)^2} & -\frac{u}{(u+v)^2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun ist f in einem Punkt (u,v) genau dann ein lokaler Diffeomorphismus, wenn $Df(u,v)$ invertierbar ist. Wegen

$$\det Df = \frac{v+u}{(u+v)^2} = \frac{1}{u+v} > 0$$

ist dies auf ganz Q der Fall.

b) Ist $x = \frac{u}{u+v}$ und $y = u+v$, so folgt

$$u = xy, \quad v = y - u = (1-x)y.$$

Somit ist $f^{-1}(x,y) = (xy, (1-x)y)$ auf ganz Q definiert.

c) Sei $(u, v) \in Q$. Wegen $u, v > 0$ ist $\frac{u}{u+v} < 1$. Somit kann $f : Q \to Q$ nicht surjektiv sein, da z.B. der Punkt $(1, 1) \in Q$ nicht im Bild liegt.

d) Es gilt $(x, y) \in f(Q)$ genau dann, wenn mit obiger Umkehrabbildung $f^{-1}(x, y) \in Q$ gilt, also

$$xy > 0, \quad (1 - x)y > 0.$$

Dies wiederum ist genau dann erfüllt, wenn $x, y > 0$ und $x < 1$ gelten. Also ist

$$f(Q) = \left]0, 1\right[\times \left]0, \infty\right[.$$

e) $f : Q \to f(Q)$ ist surjektiv und nach b) auch injektiv. Wegen a) ist f in jedem Punkt von Q ein lokaler Diffeomorphismus. Da jede lokale Umkehrabbildung mit f^{-1} übereinstimmen muss, folgt, dass $f : Q \to f(Q)$ ein Diffeomorphismus ist.

Aufgabe 5 (3 Punkte)**.** Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $\varphi : V \to U$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie: Ist γ eine C^1-Kurve in V und α eine 1-Form auf U, so gilt

$$\int_{\varphi\circ\gamma} \alpha = \int_\gamma \varphi^*\alpha.$$

Lösung. Es sei $\gamma : [a, b] \to V$. Nach Definition von Kurvenintegral und Pullback sowie mit der Kettenregel ist

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi\circ\gamma} \alpha &= \int_a^b \alpha((\varphi \circ \gamma)(t))((\varphi \circ \gamma)'(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \alpha(\varphi(\gamma(t)))(D\varphi(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \varphi^*\alpha(\gamma(t))(\gamma'(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \int_\gamma \varphi^*\alpha.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6 (5 Punkte)**.** Gegeben sind die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} : f(x, y, z) = x + y - z$$

und die Menge

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, 2x^2 + 4y^2 = 11,\ 4x = 3z\}.$$

a) Zeigen Sie, dass M abgeschlossen und beschränkt ist, also kompakt.

b) Begründen Sie, warum f auf M eine Minimum und ein Maximum besitzt.

c) Bestimmen Sie diese Extremalstellen mit der Methode der Lagrangemultiplikatoren.

Lösung.

a) Als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{(0,0)\} \subset \mathbb{R}^2$ unter der stetigen Funktion
$$\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \ (x,y,z) \mapsto (2x^2+4y^2-11, 4x-3z).$$
ist M abgeschlossen.

Weiterhin ist M beschränkt: Sei $(x,y,z) \in M$, dann ist
$$\begin{aligned} x^2 &\leq 2x^2+4y^2 = 11, && \text{also } |x| \leq \sqrt{11}, \\ y^2 &\leq 2x^2+4y^2 = 11, && \text{also } |y| \leq \sqrt{11}, \\ z^2\frac{4^2}{3^2}x^2 &\leq \frac{4^2}{3^2}\cdot 11, && \text{also } |z| \leq \frac{4\sqrt{11}}{3}. \end{aligned}$$
Da M abgeschlossen und beschränkt ist, folgt aus Heine–Borel die Kompaktheit von M.

b) f ist eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge M, also ist auch das Bild $f(M) \subset \mathbb{R}$ kompakt. Insbesondere besitzt f ein Maximum und ein Minimum auf M.

c) Die Lagrange-Funktion zu f und den Nebenbedingungen $2x^2+4y^2 = 11$, $4x = 3z$ ist
$$F(x,y,z,\lambda,\mu) = x+y-z+\lambda(2x^2+4y^2-11)+\mu(4x-3z).$$
Abgeleitet nach (x,y,z) erhalten wir die Bedingung
$$\nabla_{(x,y,z)}F = \begin{pmatrix} 1+4\lambda x+4\mu \\ 1+8\lambda y \\ -1-3\mu \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0,$$
die ein kritischer Punkt erfüllen muss. Aus der dritten Gleichung folgt sofort $\mu = -\frac{1}{3}$. Eingesetzt folgt also
$$-\frac{1}{3}+4\lambda x = 0 = 1+8\lambda y$$
und damit $x,y,\lambda \neq 0$, $x = \frac{1}{12\lambda}$, $y = -\frac{1}{8\lambda}$. Setzen wir dies wiederum in die Nebenbedingung $2x^2+4y^2 = 11$ ein, so folgt
$$11 = \frac{2}{144\lambda^2}+\frac{4}{64\lambda^2} = \frac{11}{144\lambda^2}$$
und daraus $\lambda = \pm\frac{1}{12}$. Damit ist $x = \pm 1$, $y = \mp\frac{3}{2}$ und wegen $4x = 3z$ schließlich
$$z = \frac{4}{3}x = \pm\frac{4}{3}.$$
Damit sind $p_{1,2} = (\pm 1, \mp\frac{3}{2}, \pm\frac{4}{3})$ die kritischen Punkte von f auf M.

Da die Mannigfaltigkeit M keinen Rand besitzt, müssen Maximum und Minimum von f bei kritischen Punkten liegen. Wir überprüfen die kritischen Punkte:

$$f(p_1) = 1 - \frac{3}{2} - \frac{4}{3} = -\frac{11}{6},$$
$$f(p_2) = -1 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} = \frac{11}{6}.$$

Somit liegt das Minimum bei p_1 und das Maximum bei p_2.[1]

Aufgabe 7 (3 Punkte)**.** Sei $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lipschitzstetig. Zeigen Sie, dass das Bild einer Lebesgue-Nullmenge unter T wieder eine Lebesgue-Nullmenge ist. Dabei dürfen Sie annehmen, dass Nullmengen durch Überdeckungen mit *Würfeln* – also Quader gleicher Kantenlänge – charakterisiert werden können.

Lösung. Dass $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lipschitzstetig ist, bedeutet, dass ein $L > 0$ existiert mit

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \|T(x) - T(y)\| \leq L\|x - y\|.$$

Sei N eine λ_n-Nullmenge, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Überdeckung mit Intervallen $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von N, sodass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(I_k) < \varepsilon.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die I_k *Würfel*[2], d.h. alle Kanten haben die gleiche Länge ℓ_k. (Ansonsten zerschneide und ergänze man die I_k auf geeignete Weise.) Dann ist das Volumen $\lambda_n(I_k) = \ell_k^n$ und der Durchmesser $\operatorname{diam}(I_k) = \sqrt{n}\ell_k$. Wegen der Lipschitzstetigkeit von T ist nun

$$\operatorname{diam}(T(I_k)) = \sup_{x,y\in I_k} \|T(x) - T(y)\| \leq L \cdot \sup_{x,y\in I_k} \|x - y\| = L \cdot \operatorname{diam}(I_k).$$

Außerdem ist $T(I_k)$ sicherlich in einem Würfel[3] J_k der Kantenlänge

$$\ell'_k := 2 \operatorname{diam}(T(I_k))$$

enthalten. Es folgt[4]

$$\lambda_n(J_k) = (\ell'_k)^n \leq 2^n L^n \operatorname{diam}(I_k)^n = 2^n L^n \sqrt{n}^n \ell_k^n = (2L\sqrt{n})^n \lambda_n(I_k).$$

[1] Nimmt man die Aufgabenstellung genau, war die Bestimmung von Maximum und Minimum gar nicht gefragt.

[2] Man benötigt hier Würfel und nicht beliebige Quader, damit man Volumen und Durchmesser gegeneinander abschätzen kann. Ansonsten funktioniert der Beweis nicht!

[3] $T(I_k)$ ist selbst nicht zwingend ein Quader. Falls aber doch nur mit $\bigcup_k T(I_k)$ als Überdeckung von $T(N)$ gearbeitet wurde, gab es keinen Punktabzug.

[4] Auch wenn auf die Würfel verzichtet wurde, gab es für eine (moralisch richtige) Relation der Form $\lambda(J_k) \sim L^n\lambda(I_k)$ keinen Punktabzug.

Insgesamt ist

$$T(N) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} T(I_k) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$$

sowie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n(J_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} (2L\sqrt{n})^n \lambda_n(I_k) < (2L\sqrt{n})^n \varepsilon.$$

Dies wird durch geeignete Wahl von ε beliebig klein. Somit ist $T(N)$ eine λ_n-Nullmenge.

Aufgabe 8 (4 Punkte)**.** Sei $n \geq 3$, $A \in L(\mathbb{R}^n)$ symmetrisch und v ein Eigenvektor von A. Zeigen Sie, dass es mindestens zwei zu v orthogonale Eigenvektoren von A gibt, die kritische Punkte der Funktion

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle$$

unter den Nebenbedingungen

$$\langle x, x \rangle = 1, \quad \langle v, x \rangle = 0$$

sind.

Lösung. Die Lagrange-Funktion zu $f(x) = \langle Ax, x \rangle$ und den Nebenbedingungen $\langle x, x \rangle = 1$, $\langle v, x \rangle = 0$ ist

$$F(x, \lambda) = \langle Ax, x \rangle - \lambda_1(\langle x, x \rangle - 1) - \lambda_2 \langle v, x \rangle.$$

Abgeleitet nach x erhalten wir die Bedingung

$$\nabla_x F = 2Ax - 2\lambda_1 x - \lambda_2 v \overset{!}{=} 0, \tag{$*$}$$

die ein kritischer Punkt x erfüllen muss.

Sei $Av = \mu v$ für ein $\mu \in \mathbb{R}$. Aufgrund der orthogonalen Diagonalisierbarkeit symmetrischer Matrizen kann v zu einer Orthonormalbasis $(v, v', v'', \ldots)$ von $\mathbb{R}^n$ ergänzt werden, die aus Eigenvektoren von A besteht. Insbesondere existieren zwei Vektoren v', v'' mit

$$Av' = \mu' v', \quad Av'' = \mu'' v'', \quad \mu', \mu'' \in \mathbb{R},$$

welche Länge 1 haben und orthogonal zu v sind. Diese erfüllen $(*)$ mit $\lambda_1 = \mu'$ bzw. $\lambda_1 = \mu''$ und $\lambda_2 = 0$. Somit sind diese tatsächlich kritische Punkte von f unter den obigen Nebenbedingungen.[5]

[5] Alternativ kann man argumentieren, dass die Nebenbedingung kompakt ist und f deshalb ein Maximum und ein Minimum annimt. Da die Nebenbedingung keinen Rand hat und f nicht konstant ist, erhält man somit zwei verschiedene kritische Punkte von f. Man kann dann zeigen, dass dies tatsächlich Eigenvektoren von A sind.