

Jürgen Pöschel

Analysis

2020/22

Prof. Dr. Jürgen Pöschel
Fachbereich Mathematik
Universität Stuttgart
Pfaffenwaldring 57
70569 Stuttgart

Schrift: Ludica Bright
System: Mac
Software: \LaTeX , \TeX Shop, Adobe Illustrator
Gestaltung, Satz, Zeichnungen: Jules Hobbes

© Jürgen Pöschel

INHALTSVERZEICHNIS

1 GRUNDLAGEN

- 1.1 Aussagenlogik 1
- 1.2 Mengen 9
- 1.3 Relationen 16
- 1.4 Abbildungen 20
 - Aufgaben 30

2 REELLE ZAHLEN

- 2.1 Die Körperaxiome 36
- 2.2 Die Anordnungsaxiome 39
- 2.3 Das Vollständigkeitsaxiom 43
- 2.4 Wurzeln 45
- 2.5 Die erweiterte Zahlengerade 47
- 2.6 Intervalle 48
 - Aufgaben 51

3 NATÜRLICHE, GANZE UND RATIONALE ZAHLEN

- 3.1 Natürliche Zahlen 56
- 3.2 Ganze und rationale Zahlen 66
- 3.3 Eindeutigkeit der reellen Zahlen 69
- 3.4 Abzählbarkeit und Mächtigkeit 70
- 3.5 Etwas Kombinatorik 76
 - Aufgaben 80

4 KOMPLEXE ZAHLEN

- 4.1 Vorüberlegungen 86
- 4.2 Konstruktion der komplexen Zahlen 87
- 4.3 Einige elementare Eigenschaften 88
- 4.4 Fundamentalsatz der Algebra 91
 - Aufgaben 96

5 FOLGEN

- 5.1 Grenzwerte reeller Folgen 100
- 5.2 Grenzwertsätze 102
- 5.3 Einige wichtige Grenzwerte 107
- 5.4 Existenzsätze 109
- 5.5 Häufungswerte 114
- 5.6 Uneigentliche Grenzwerte 116
- 5.7 Normierte Räume und Banachräume 119
- 5.8 Der Folgenraum c 128
- Aufgaben 131

6 REIHEN

- 6.1 Konvergenz 138
- 6.2 Absolute Konvergenz 140
- 6.3 Konvergenzkriterien 144
- 6.4 Potenzreihen 149
- 6.5 Reihen in Banachräumen 153
- Aufgaben 156

7 STETIGKEIT

- 7.1 Stetige Funktionen und Abbildungen 159
- 7.2 Stetige Funktionen auf Intervallen 168
- 7.3 Funktionsgrenzwerte 174
- 7.4 Topologische Grundbegriffe 179
- 7.5 Kompaktheit 187
- 7.6 Funktionenfolgen und Funktionenräume 192
- Aufgaben 198

8 ABLEITUNG

- 8.1 Definitionen und Rechenregeln 204
- 8.2 Lokale Extrema und Mittelwertsatz 211
- 8.3 Höhere Ableitungen 217
- 8.4 Die Regel von l'Hospital 220
- 8.5 Taylorpolynome 223
- 8.6 Taylorreihe 226
 - Aufgaben 231

9 SPEZIELLE FUNKTIONEN

- 9.1 Exponentialfunktion 236
- 9.2 Logarithmusfunktion 239
- 9.3 Sinus und Cosinus 242
- 9.4 Tangens und Arcusfunktionen 247
- 9.5 Exp, Sin und Cos im Komplexen 250
- 9.6 Die Hyperbelfunktionen 254
 - Aufgaben 258

10 INTEGRATION

- 10.1 Treppenfunktionen 264
- 10.2 Das Cauchyintegral 267
- 10.3 Regelfunktionen 271
- 10.4 Der Hauptsatz 274
- 10.5 Integrationsregeln 279
- 10.6 Uneigentliche Integrale 285
- 10.7 Integration in Banachräumen 290
 - Aufgaben 292

11 ELEMENTARE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

- 11.1 Grundbegriffe 298
- 11.2 Lineare Differenzialgleichungen 301
- 11.3 Separierbare Differenzialgleichungen 305
- 11.4 Homogene Differenzialgleichungen 310
- 11.5 Bernoulli- und Riccati-Gleichungen 314
 - Aufgaben 317

12 ERGÄNZUNGEN

- 12.1 Der Satz von Arzelà-Ascoli 319
- 12.2 Differenzierbarkeit 321
- 12.3 Faltungen 324
- 12.4 Diracfolgen 328
 - Aufgaben 333

13 KURVEN UND WEGE

- 13.1 Kurven 336
- 13.2 Differenzierbare Kurven 339
- 13.3 Rektifizierbare Kurven 347
- 13.4 Wege 351
- 13.5 Ergänzungen 356
 - Aufgaben 359

14 MEHRDIMENSIONALE DIFFERENZIAZION

- 14.1 Elemente der Linearen Algebra 362
- 14.2 Totale Ableitung 368
- 14.3 Richtungsableitungen und Jacobimatrix 374
- 14.4 Der Mittelwertsatz 380
- 14.5 Gradient 382
- 14.6 Höhere Ableitungen 385
 - Aufgaben 390

15 FUNKTIONEN MEHRERER VARIABLEN

- 15.1 Die Taylorsche Formel 393
- 15.2 Kritische Punkte 400
- 15.3 Lokale Extrema 405
- 15.4 Konvexe Mengen und Funktionen 414
- 15.5 Konvexe Ungleichungen 420
 - Aufgaben 424

16 LINEARE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

- 16.1 Exponentziale linearer Operatoren 430
- 16.2 Die lineare Differenzialgleichung 435
- 16.3 Zweidimensionale lineare Systeme 440
- 16.4 Fundamentallösungen 449
- 16.5 Diagonalisierbare Gleichungen 453
- 16.6 Allgemeine Gleichungen 457
- 16.7 Rein imaginäre Eigenwerte 461
- Aufgaben 468

17 GEWÖHNLICHE DIFFERENZIALGLEICHUNGEN

- 17.1 Vektorfelder und Differenzialgleichungen 472
- 17.2 Der Existenz- und Eindeutigkeitsatz 476
- 17.3 Flüsse 484
- 17.4 Der lokale EE-Satz 490
- 17.5 Konjugation von Vektorfeldern und Flüssen 494
- Aufgaben 501

18 ANALYSIS IM \mathbb{R}^n

- 18.1 Umkehrabbildungen 505
- 18.2 Implizite Funktionen 518
- 18.3 Mannigfaltigkeiten 530
- 18.4 Extrema mit Nebenbedingungen 537
- Aufgaben 542

19 WEGINTEGRALE

- 19.1 Pfaffsche Formen 546
- 19.2 Kurven- und Wegintegrale 548
- 19.3 Wegintegrale exakter 1-Formen 554
- 19.4 Lokal exakte 1-Formen 559
- 19.5 Global exakte 1-Formen 562
- Aufgaben 568

20 DAS LEBESGUEINTEGRAL

- 20.1 Intervallfunktionen 574
- 20.2 Treppenfunktionen 581
- 20.3 Drei Hilfssätze 584
- 20.4 Monoton approximierbare Funktionen 587
- 20.5 Messbare und summierbare Funktionen 591
- 20.6 Die Sätze von Beppo Levi und Fatou 595
- 20.7 Integrierbare Funktionen 597
- 20.8 Messbare Mengen 600
- 20.9 Parameterabhängige Integrale 602
- Aufgaben 606

21 INTEGRATION IM \mathbb{R}^n

- 21.1 Der Satz von Fubini 612
- 21.2 Zerlegungen der Eins 618
- 21.3 Die Transformationsformel 623
- 21.4 Der Satz von Sard 628
- 21.5 Anwendungen der Transformationsformel 631
- Aufgaben 636

22 DER FUNDAMENTALSATZ IM \mathbb{R}^n

- 22.1 Etwas multilineare Algebra 640
- 22.2 Differenzialformen 648
- 22.3 Ketten 655
- 22.4 Der Fundamentalsatz 658
- Aufgaben 662

23 DER SATZ VON STOKES

- 23.1 Mannigfaltigkeiten 666
- 23.2 Vektorfelder, Formen und Orientierung 672
- 23.3 Der Satz von Stokes 679
- 23.4 Das Volumenelement 685
- 23.5 Die klassischen Sätze 689
- 23.6 Zwei Anwendungen 695
- Aufgaben 697

1

Grundlagen

Das grundlegende Handwerkszeug des Mathematikers ist die *Aussagenlogik*, und zu den grundlegenden Begriffen der modernen Mathematik gehören die Begriffe der *Menge* und der *Abbildung*.

Grundlagenfragen sind allerdings immer auch schwierige Fragen. Sie setzen eine tiefe Kenntnis der Materie voraus, um ihre Bedeutung und ihren Reiz zu erschließen. Für einen Neuling sind sie dagegen ein trockenes, wenig appetitanregendes Brot.

Wir werden die Aussagenlogik sowie die Begriffe der Menge und der Abbildung daher nur in einem ›naiven‹ Sinn kurz ansprechen. Wir verzichten auf eine mathematisch präzise Formulierung, da Aufwand und Ertrag für unsere Zwecke in keinem vernünftigen Verhältnis stehen. Im Wesentlichen geht es darum, sich auf einen Sprachgebrauch für alles Weitere zu verständigen.

1.1

Aussagenlogik

Das Gebäude der Mathematik wird mit den Regeln der Aussagenlogik errichtet. Dessen Bausteine sind Aussagen im Sinne von Aristoteles, denen genau einer von zwei möglichen Wahrheitswerten zukommt.

Aristotelischer Aussagebegriff Eine *Aussage* ist entweder *wahr* oder *falsch* – *tertium non datur*¹. ✕

Es gibt in der Mathematik also kein *vielleicht* – solche Aussagen werden gar nicht erst zugelassen.

¹ Ein Drittes gibt es nicht.

► **Beispiele** Aristotelische Aussagen sind:

- A. Eine Woche hat sieben Tage.
- B. 2 ist eine Primzahl.²
- C. Es gibt unendlich viele Primzahlen.
- D. Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge.³

Keine Aussagen im Sinne der Mathematik sind dagegen:

- E. Wie spät ist es?
- F. Hoffentlich ist die Vorlesung bald zu Ende.
- G. Das logische Bild der Tatsachen ist der Gedanke.⁴ ◀

Dabei ist unerheblich, ob der Wahrheitswert einer Aussage *tatsächlich bekannt* ist. So ist *Es gibt unendlich viele Primzahlzwillinge* sicher wahr oder falsch, nur wissen wir dies im Jahr 2018 nicht.

■ Logische Verknüpfungen

Aus Aussagen lassen sich durch logische Verknüpfungen neue Aussagen bilden. Das Ergebnis einer solchen Verknüpfung legt man in einer *Wahrheitstafel* fest. So wird die Verknüpfung zweier Aussagen p und q ⁵ durch *und* und *oder*, in Symbolen $p \wedge q$ respektive $p \vee q$, durch folgende Wahrheitstafel definiert. Dabei stehe 1 für wahr und 0 für falsch⁶.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

Das logische *und* entspricht dem allgemeinen Sprachgebrauch: $p \wedge q$ ist dann und nur dann wahr, wenn sowohl p als auch q wahr sind.

Beim logischen *oder* ist zu beachten, dass es *einschließend* gemeint ist: $p \vee q$ ist wahr, wenn p oder q oder beide wahr sind. Das umgangssprachliche *oder* ist dagegen meist *ausschließend* gemeint. *Es regnet oder ich gehe spazieren* meint üblicherweise *Entweder es regnet, oder ich gehe spazieren*.

² Eine natürliche Zahl heißt *prim*, wenn sie genau zwei Teiler besitzt, nämlich 1 und sich selbst. Somit ist 2 eine Primzahl, nicht aber 1.

³ Ein *Primzahlzwilling* liegt vor, wenn p und $p + 2$ prim sind. Zum Beispiel sind 5 und 7 oder 11 und 13 Primzahlzwillinge.

⁴ Punkt 3 im *Tractatus logico-philosophicus* von Ludwig Wittgenstein.

⁵ p und q stehen hier also für irgendwelche Aussagen. Ebenso gut könnte man A und B schreiben, oder α und β , oder beliebige andere Symbole.

⁶ Dies soll jetzt keine Diskriminierung der 0 darstellen.

► *Beispiele* Folgende Aussagen sind wahr:

- A. $0 < 1$ und $\sqrt{2}$ ist irrational.
- B. $0 < 1$ oder $\sqrt{2}$ ist irrational.
- C. $0 < 1$ oder $\sqrt{2}$ ist rational. ◀

Die Negation einer Aussage p durch *nicht*, symbolisch $\neg p$, ändert den jeweiligen Wahrheitswert in sein Gegenteil:

p	$\neg p$
1	0
0	1

In konkreten Fällen kann die korrekte Verneinung einer Aussage allerdings durchaus Schwierigkeiten bereiten.

- *Beispiele* A. Es gilt nicht $\lim_{t \rightarrow \infty} \sin t = 0$.
 B. Es ist nicht so, dass, wenn es heute schneit, morgen die Sonne scheint. ◀

Wichtig sind auch die logischen Verknüpfungen zweier Aussagen p und q durch *wenn-dann* und *genau-dann-wenn*, in Symbolen $p \rightarrow q$ und $p \leftrightarrow q$:

p	q	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	1	1

Das logische *genau-dann-wenn* folgt dabei wiederum der Umgangssprache: $p \leftrightarrow q$ ist wahr, wenn p und q denselben Wahrheitsgehalt haben. Andernfalls ist sie falsch.

Ungewohnt erscheint anfangs dagegen das logische *wenn-dann*: die Verknüpfung $p \rightarrow q$ ist wahr, wenn entweder p und q wahr sind, oder wenn p falsch ist. In letzterem Fall spielt der Wahrheitsgehalt von q keine Rolle. Egal was ich aus einer falschen Aussage p folgere, die *logische Verknüpfung als Ganzes* wird als wahr gewertet ⁷.

► *Beispiel* Die Aussage

$$x > 0 \rightarrow x + 1 > 0$$

⁷ *Ex falso quodlibet* — Aus Falschem folgt alles Beliebige.

ist immer wahr. Denn wenn $x > 0$ gilt, so gilt auch $x + 1 > 0$. Ist dagegen $x \leq 0$, so ist die wenn-dann-Verknüpfung nach dieser Konvention ebenfalls wahr, denn über diesen Fall wollen wir gar keine Aussage machen. ◀

Bemerkung Es gibt insgesamt $2^4 = 16$ verschiedene Möglichkeiten, das Ergebnis einer logischen Verknüpfung zweier Aussagen durch eine Wahrheitstafel festzulegen. Es gibt also genau 16 verschiedene *binäre logische Funktionen*. Diese können alle durch \wedge , \vee und \neg dargestellt werden. Tatsächlich reicht sogar eine einzige Funktion, entweder die *nicht-und* oder *nand-Funktion*

$$p \sqcap q := \neg(p \wedge q),$$

oder die *nicht-oder* oder *nor-Funktion*

$$p \sqcup q := \neg(p \vee q).$$

Diese spielen daher beim Aufbau logischer Schaltkreise eine große Rolle. →

Mit diesen Verknüpfungen lassen sich sehr komplexe Ausdrücke bilden. Um dabei Klammern zu sparen, legt man fest, dass \neg vor \vee , \wedge vor \rightarrow vor \leftrightarrow bindet. So wird

$$(p \vee (\neg q)) \rightarrow p$$

vereinfacht zu

$$p \vee \neg q \rightarrow p.$$

■ Tautologien

Ein mathematisches Gebäude wird errichtet, indem man aus gewissen Grundannahmen – den *Axiomen* – und bereits bewiesenen Aussagen durch korrekte logische Schlüsse neue Aussagen gewinnt. Jeder einzelne logische Schluss von einer Aussage p auf eine Aussage q stellt dabei sicher, dass q immer dann wahr ist, wenn p wahr ist. Ist p dagegen falsch, so interessiert q nicht weiter. Somit ist die *Aussageverknüpfung* $p \rightarrow q$ immer wahr. Dies nennt man eine *Tautologie*.

Definition Eine *Tautologie* ist eine Aussage, die immer wahr ist. Eine *Kontradiktion* oder ein *Widerspruch* ist eine Aussage, die immer falsch ist. ✕

- ▶ *Beispiele* A. Die einfachste Tautologie ist $p \vee \neg p$.
 B. Die einfachste Kontradiktion ist $p \wedge \neg p$.
 C. $x > 0 \rightarrow x + 1 > 0$ ist immer wahr, also eine Tautologie. ◀

Ist $p \rightarrow q$ immer wahr, so schreibt man

$$p \Rightarrow q,$$

gelesen p *impliziert* q oder *aus* p *folgt* q . Genau genommen ist dies eine *Metaaussage*, also eine Aussage über eine Aussage. Mit $p \Rightarrow q$ sagen wir aus, dass die Verknüpfung $p \rightarrow q$ immer wahr ist.

► *Beispiel* $x > 0 \Rightarrow x + 1 > 0$. ◀

Entsprechend steht

$$p \Leftrightarrow q,$$

gelesen p *äquivalent* q , für die Aussage, dass $p \leftrightarrow q$ immer wahr ist. In diesem Fall nehmen p und q immer denselben Wahrheitswert an und stellen somit dieselbe logische Funktion dar. Die folgende Äquivalenz ist zum Beispiel sehr nützlich.

1 **Notiz** $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$. ✕

◀◀◀ *Beweis* Dies verifizieren wir noch einmal anhand einer Wahrheitstafel:

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$	
1	1	0	1	1	
1	0	0	0	0	
0	1	1	1	1	
0	0	1	1	1	. >>>>

Auf dieselbe Weise verifiziert man eine Fülle weiterer logischer Äquivalenzen. Hier sind die wichtigsten betreffend \wedge und \vee .

2 **Logische Äquivalenzen** *Es gelten die Distributivgesetze*

$$(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r),$$

$$(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r),$$

die *Verschmelzungsgesetze*

$$(p \wedge q) \vee p \Leftrightarrow p \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge p,$$

die *Regeln von de Morgan*

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q,$$

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q,$$

sowie die *Regel von der doppelten Negation*

$$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p. \quad \times$$

Eine \wedge - respektive \vee -Verknüpfung wird also verneint, indem die einzelnen Aussagen verneint und die Verknüpfungen \wedge und \vee vertauscht werden. Nach

diesem Schema zu verfahren ist oft einfacher als zu versuchen, eine Aussage inhaltlich zu verneinen.

► *Beispiele* A. *Es ist nicht so, dass, wenn es heute schneit, morgen die Sonne scheint* ist gleichbedeutend mit *Es schneit heute, und morgen scheint die Sonne:*

$$\neg(\text{snow} \rightarrow \text{sun}) \Leftrightarrow \neg(\neg\text{snow} \vee \text{sun}) \Leftrightarrow \text{snow} \wedge \neg\text{sun}.$$

B. *Es stimmt nicht, dass es regnet oder ich spazieren gehe* ist gleichbedeutend mit *Es regnet nicht, und ich gehe nicht spazieren:*

$$\neg(r \vee s) \Leftrightarrow \neg r \wedge \neg s. \quad \blacktriangleleft$$

■ Beweistechniken

Die nächsten Regeln bilden die Grundlage wichtiger Beweistechniken.

3 Abtrennungs- und Syllogismusregel

$$p \wedge (p \rightarrow q) \Rightarrow q$$

und

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r. \quad \times$$

⟨⟨⟨ *Beweis* Um die Gültigkeit der ersten Implikation zu beweisen, müssen wir nur den Fall betrachten, wo die linke Seite wahr ist. In diesem sind also p und $p \rightarrow q$ wahr. Das aber ist nur möglich, wenn auch q wahr ist. Also ist auch q wahr.

Entsprechend argumentiert man bei der zweiten Implikation. Aber natürlich kann man beide Aussagen auch mit Wahrheitstafeln beweisen $A_{3.}$ ⟩⟩⟩

Diese Regeln beschreiben die Technik des direkten Beweises. Die Abtrennungsregel besagt: *Gilt p , und folgt q aus p , so gilt auch q .* Die Syllogismusregel besagt: *Folgt q aus p , und folgt r aus q , so folgt auch r aus p .* Dies entspricht dem Alltagsgebrauch und soll nicht weiter illustriert werden.

4 Kontrapositionsregel

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p. \quad \times$$

⟨⟨⟨ *Beweis* Dies können wir bereits mit den vorhandenen Mitteln formal beweisen, ohne Rückgriff auf eine Wahrheitstafel. Zweimalige Anwendung der

Notiz₁ und der Regel von der doppelten Negation ergibt

$$\begin{aligned} p \rightarrow q &\Leftrightarrow \neg p \vee q \\ &\Leftrightarrow \neg\neg q \vee \neg p \\ &\Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p. \end{aligned}$$

Die Kontrapositionsregel bildet die Grundlage des *indirekten Beweises*. Statt q aus p zu folgern, zeigt man, dass die Verneinung von q zur Verneinung von p führt.

- 5 ▶ *Beispiel eines indirekten Beweises* Ist das Quadrat einer natürlichen Zahl n gerade, so ist auch n selbst gerade.

Der Beweis erfolgt indirekt. Wir negieren die Folgerung und nehmen an, dass n *nicht gerade* ist. Dann ist n ungerade und damit von der Form

$$n = 2m + 1$$

mit einer natürlichen Zahl $m \geq 0$. Dann aber ist auch

$$n^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 4(m^2 + m) + 1 = 4k + 1$$

mit der natürlichen Zahl $k = m^2 + m \geq 0$. Also ist n^2 ebenfalls ungerade. Dies ist die Negation der Voraussetzung, und der indirekte Beweis ist abgeschlossen. Damit ist auch die ursprüngliche Aussage bewiesen. ◀

Widerspruchsregel

$$p \Leftrightarrow \neg p \rightarrow (q \wedge \neg q). \quad \times$$

⟨⟨⟨ Beweis Mit der Notiz₁ gilt

$$\neg p \rightarrow (q \wedge \neg q) \Leftrightarrow p \vee (q \wedge \neg q) \Leftrightarrow p$$

denn $q \wedge \neg q$ ist ja immer falsch. ⟩⟩⟩

Dies ist die Grundlage des *Widerspruchsbeweises*, oder *reductio ad absurdum*. Um eine Aussage p zu beweisen, nehmen wir an, dass sie *nicht gilt*, also $\neg p$ wahr ist. Können wir daraus einen Widerspruch $q \wedge \neg q$ ableiten, so folgt, dass p wahr ist.

- 6 ▶ *Beispiel eines Widerspruchsbeweises* $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.

Wir nehmen an, $\sqrt{2}$ ist *rational*. Dann ist also

$$\sqrt{2} = r/s$$

mit natürlichen Zahlen r und $s \neq 0$. Wir können annehmen, dass r und s nicht beide gerade sind, denn andernfalls dividieren wir r und s so lange durch 2, bis dieser Zustand erreicht ist.

Aus $\sqrt{2} = r/s$ folgt nun durch Quadrieren

$$2s^2 = r^2.$$

Also ist r^2 gerade. Dann ist auch r selbst gerade \S , also $r = 2t$ mit einer anderen natürlichen Zahl t . Also gilt $2s^2 = r^2 = (2t)^2 = 4t^2$, oder

$$s^2 = 2t^2.$$

Also ist s ebenfalls gerade \S .

Somit sind r und s beide gerade, im Widerspruch zur Annahme, dass r und s nicht beide gerade sind. Damit haben wir also die Annahme, dass $\sqrt{2}$ rational ist, zu einem Widerspruch geführt. \blacktriangleleft

Äquivalenzregel

$$p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p). \quad \times$$

Die Äquivalenz zweier Aussagen ist also gleichbedeutend damit, dass jede der Aussagen aus der jeweils anderen folgt. Salopp gesagt: ›um $p \leftrightarrow q$ zu zeigen, muss man beide Richtungen zeigen‹.

► *Beispiel* Das Quadrat einer natürlichen Zahl n ist gerade genau dann, wenn n gerade ist.

Den \rightarrow -Teil haben wir oben gezeigt \S . Der \leftarrow -Teil besteht darin zu zeigen, dass das Quadrat einer geraden natürlichen Zahl ebenfalls gerade ist. Dies ist aber eine leichte Übung. \blacktriangleleft

■ Bemerkung zum mathematischen Sprachgebrauch

Gilt $p \Rightarrow q$, so nennt man p *hinreichend für q* , und q *notwendig für p* .

Denn immer wenn p gilt, so gilt auch q . Somit ›reicht p aus, damit auch q gilt‹. Gilt dagegen q nicht, so gilt aufgrund der Kontrapositionsregel auch p nicht. Somit muss › q notwendigerweise gelten, damit auch p gilt‹.

Gilt $p \Leftrightarrow q$, so ist p *hinreichend und notwendig für q* . Und natürlich gilt dies auch umgekehrt.

► *Beispiel*

$$x > 4 \Rightarrow x > 2.$$

Und tatsächlich ist $x > 4$ hinreichend dafür, dass auch $x > 2$. Allerdings ist es nicht notwendig. Und umgekehrt ist $x > 2$ notwendig dafür, dass auch $x > 4$ gilt. Allerdings ist es nicht hinreichend. \blacktriangleleft

1.2

Mengen

Der Begriff der Menge wurde am Ende des 19. Jahrhunderts von Georg Cantor wie folgt eingeführt.

Definition (Cantor 1895) Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung M von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die *Elemente* von M genannt werden) zu einem Ganzen. ✕

›So stelle ich mir eine Menge auch vor‹, würde man wohl sagen. Tatsächlich ist dies aber alles andere als eine präzise Definition. Was ist denn ein ›bestimmtes Objekt‹, und aus welchen Objekten besteht unsere ›Anschauung‹ insgesamt?

Es dauerte auch nicht lange, bis die Widersprüchlichkeit dieser Definition erkannt wurde. Bertrand Russell entdeckte um 1901 ein besonders einfaches Beispiel. Bildet man die Menge M aller Mengen X , die sich nicht selbst enthalten – in Symbolen

$$M = \{X : X \notin X\}$$

– so lässt sich nicht entscheiden, ob M sich selbst enthält oder nicht. Nimmt man an, dass $M \in M$, so folgt hieraus $M \notin M$. Nimmt man dagegen an, dass $M \notin M$, so folgt hieraus wiederum $M \in M$ A-14.

Ein analoges, nicht-mathematisches Beispiel ist das Paradoxon des Barbiers eines Dorfes, der alle Männer im Dorf rasiert, die sich nicht selbst rasieren. Auch hier kann man nicht entscheiden, ob der Barbier sich selbst rasiert oder nicht.

Mathematisch ist dieser Zustand natürlich nicht haltbar und führte zur Entwicklung der *axiomatischen Mengenlehre* von Zermelo, Fraenkel und anderen. Hier lassen sich nicht mehr völlig beliebige Objekte zu Mengen zusammenfassen. Insbesondere ist die Russellsche Konstruktion keine Menge mehr, und die Frage, ob M zu M gehört, kann nicht mehr gestellt werden.

Wir werden uns aber nicht mit der axiomatischen Mengenlehre beschäftigen – so wie es auch die meisten Mathematiker halten. Alle Mengen, die wir im naiven Sinne bilden, sind Mengen auch im axiomatischen Sinn, und das soll uns genügen.

Für unseren Gebrauch ist eine Menge bestimmt durch die in ihr enthaltenen Elemente. Ist M eine Menge, so ist ein beliebiges Objekt m – wieder so ein unbestimmter Begriff – entweder *Element* von M , geschrieben

$$m \in M,$$

oder *nicht Element* von M , geschrieben

$$m \notin M.$$

Es ist also

$$m \notin M \Leftrightarrow \neg(m \in M).$$

Insbesondere enthält eine Menge jedes ihrer Elemente nur einmal, und auf deren Reihenfolge kommt es nicht an. Zwei Mengen sind *gleich*, wenn sie dieselben Elemente enthalten.

Es gibt auch eine Menge ohne Elemente, die sogenannte *leere Menge*

$$\emptyset = \{\}.$$

Für jedes beliebige Objekt m gilt also $m \notin \emptyset$.

Notiz *Es gibt nur eine leere Menge.* ✕

⟨⟨⟨⟨ *Beweis* Seien \emptyset_1 und \emptyset_2 zwei leere Mengen. Dann ist jedes Element, das in \emptyset_1 enthalten ist, auch in \emptyset_2 enthalten. Das Umgekehrte gilt ebenfalls. Also enthalten beide Mengen dieselben Elemente und sind damit gleich. ⟩⟩⟩⟩

Enthält eine Menge nur endlich viele Elemente, so können wir sie - zumindest im Prinzip - durch Aufzählung aller ihrer Elemente angeben:

$$\{H, i, l, f, e\}, \quad \{\boxminus, \boxtimes, \boxplus\}.$$

Bei der Aufzählung ist es erlaubt, Elemente einer Menge mehrfach zu *nennen*, auch wenn sie nur einmal *enthalten* sind. Dies ist eine praktische Konvention.

▶ *Beispiele*

$$\begin{aligned} \boxplus &\in \{\boxminus, \boxtimes, \boxplus\}, & \circ &\notin \{\boxminus, \boxtimes, \boxplus\}, & \emptyset &\notin \emptyset, \\ \{1, 2, 3\} &= \{3, 2, 1\}, \\ \{1, 1, 1\} &= \{1, 1\} = \{1\}. \end{aligned}$$

Ist die Elementzahl nicht mehr endlich, so helfen gelegentlich Pünktchen, die ein ›und so weiter‹ andeuten. So bezeichnet

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

die Menge der natürlichen Zahlen⁸. Streng genommen ist die Notation ›...‹ zwar immer mehrdeutig und daher nicht exakt. Man verwendet die Pünktchen als bequeme Abkürzung aber immer dann, wenn dieses ›und so weiter‹ wirklich offensichtlich ist und nur mit viel bösem Willen falsch interpretiert werden kann ...

⁸ Es ist reine Definitionssache, ob die natürlichen Zahlen bei 0 oder 1 beginnen. Das naive Zählen beginnt natürlicherweise bei 1.

Schließlich werden Mengen durch Eigenschaften ihrer Elemente charakterisiert – und dies ist auch die einzige Möglichkeit, nicht-endliche Mengen anzugeben. So bezeichnet

$$\mathbb{P} = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist prim}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$$

die Menge aller Primzahlen. Allgemein schreibt man

$$M = \{m : A(m)\}$$

für die Menge M aller Objekte m , die bei Einsetzen in eine *Aussageform* A ⁹ eine wahre Aussage ergeben. Will man hierbei nur die Elemente einer bestimmten Grundmenge X betrachten, so schreibt man auch kürzer¹⁰

$$M = \{m \in X : A(m)\}.$$

Dies ist gleichbedeutend mit $M = \{m : m \in X \wedge A(m)\}$.

► *Beispiele* A. Steht $P(n)$ für die Aussageform n ist eine Primzahl, so ist

$$\mathbb{P} = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}.$$

B. Die Lösungsmenge der Gleichung $z^4 = 1$ im Komplexen ist

$$\{z \in \mathbb{C} : z^4 = 1\} = \{1, -1, i, -i\}. \quad \blacktriangleleft$$

Für wichtige Mengen haben sich Standardbezeichnungen eingebürgert. So bezeichnen \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} die Mengen der natürlichen, ganzen, rationalen, reellen und komplexen Zahlen, die wir später kennen lernen werden.

■ Teilmengen

Eine Menge N ist *Teilmenge* einer Menge M , geschrieben

$$N \subset M,$$

wenn jedes Element von N auch in M enthalten ist. Dies schließt auch die Gleichheit der beiden Mengen ein, und es gilt

$$N = M \Leftrightarrow N \subset M \wedge M \subset N.$$

Liegt eine *echte Inklusion* vor, so schreibt man ausdrücklich $N \subsetneq M$. Es gilt also

$$N \subsetneq M \Leftrightarrow N \subset M \wedge N \neq M.$$

⁹ Eine *Aussageform* enthält eine oder mehrere Variablen und geht erst durch Einsetzen konkreter Objekte in eine aristotelische Aussage über.

¹⁰ Mit \subsetneq wird die linke Seite durch die rechte Seite *definiert*. Analog wird \supsetneq verwendet.

► *Beispiele* A. Für jede beliebige Menge M gilt

$$\emptyset \subset M, \quad M \subset M.$$

B. Insbesondere ist $\emptyset \subset \emptyset$.

C. $\{1, 2, 3\} \subsetneq \mathbb{N}$, aber $\{1, 2, 3\} \not\subset \mathbb{P}$.¹¹

D. $\mathbb{P} \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. ◀

Bemerkungen a. Konsequenter wäre die Schreibweise $N \subseteq M$ für die Teilmengenbeziehung einschließlich der Gleichheit, und $N \subset M$ für die echte Teilmengenbeziehung – analog zum Gebrauch von \leq und $<$ für reelle Zahlen. Die hier verwendete Notation ist aber allgemeiner Brauch. Auch Mathematiker sind nicht immer konsequent!

b. Es gilt $N \subset M$, wenn

$$x \in N \rightarrow x \in M$$

immer wahr ist. Die Definition der logischen Verknüpfung \rightarrow entspricht somit der Teilmengenbeziehung \subset . \rightarrow

■ Mengenoperationen

Aus Mengen können durch unterschiedliche Operationen neue Mengen gebildet werden. Die wichtigsten sind *Vereinigung*, *Durchschnitt* und *Differenz* zweier Mengen, definiert als

$$A \cup B := \{m : m \in A \vee m \in B\},$$

$$A \cap B := \{m : m \in A \wedge m \in B\},$$

$$A \setminus B := \{m : m \in A \wedge m \notin B\}.$$

Man nennt $A \setminus B$ auch das *relative Komplement* von B in A .

► *Beispiele* A.

$$\{H, i, l\} \cup \{e, l, f\} = \{H, i, l, f, e\},$$

$$\{H, i, l\} \cap \{e, l, f\} = \{l\},$$

$$\{H, i, l\} \setminus \{e, l, f\} = \{H, i\}.$$

B. Für eine beliebige Menge M gilt immer

$$M \cup \emptyset = M, \quad M \cap \emptyset = \emptyset,$$

$$M \setminus \emptyset = M, \quad \emptyset \setminus M = \emptyset.$$

Insbesondere gilt $\emptyset \setminus \emptyset = \emptyset$. ◀

Abb 1 Vereinigung, Durchschnitt und Differenz von Mengen

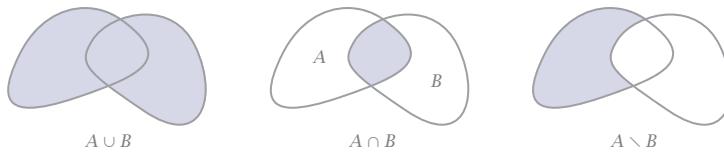


Abbildung 1 zeigt sogenannte *Venn-Diagramme*, in denen Mengen und deren Beziehung zueinander durch Bereiche in der Zeichenebene dargestellt werden. Diese sind als *Veranschaulichung* und zur *Verifizierung* sehr nützlich, ersetzen aber keinen *Beweis*, wenn es um Mengenidentitäten geht. Ein solcher Beweis wird meistens mit einer *Mengentafel* wie im Beweis des nächsten Satzes geführt.

Oft betrachtet man Teilmengen einer festen Grundmenge X . Die Differenz einer Teilmenge $M \subset X$ zur Grundmenge bezeichnet man als das *Komplement* von M bezüglich X , geschrieben

$$C_X M := X \setminus M = \{m : m \in X \wedge m \notin M\}.$$

Ist X aus dem Kontext bekannt und sind keine Missverständnisse zu befürchten, so schreibt man auch kürzer

$$M^c := \{m \in X : m \notin M\}.$$

Für diese Mengenoperationen gelten eine Fülle von Rechenregeln, von denen wir die wichtigsten notieren.

Rechenregeln für Mengenoperationen Für beliebige Mengen A, B, C gelten die *Distributivgesetze*

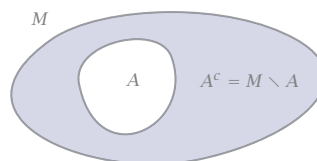
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C),$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

das *Verschmelzungsgesetz*

¹¹ \bar{c} bezeichnet die Negation von c , so wie \notin die Negation von \in bezeichnet.

Abb 2
Komplement einer
Teilmenge



$$(A \cap B) \cup A = A = (A \cup B) \cap A,$$

sowie für Teilmengen einer gemeinsamen Grundmenge X die *Regeln von de Morgan*

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c, \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c,$$

und das *Doppelkomplementgesetz*

$$(A^c)^c = A. \quad \times$$

⟨⟨⟨ *Beweis* Jede dieser Identitäten beweist man mit einer *Mengentafel*. Ein beliebiges Objekt m ist in einer Menge entweder enthalten oder nicht. Schreiben wir dafür wieder 1 respektive 0, so ergibt sich zum Beispiel das erste Verschmelzungsgesetz aus folgender Mengentafel:

A	B	$A \cap B$	$(A \cap B) \cup A$	$A \cup B$	$(A \cup B) \cap A$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0

Analog beweist man alle übrigen Identitäten. ⟩⟩⟩

Bemerkung Die Analogie der Rechenregeln für logische und mengentheoretischen Operationen ist natürlich kein Zufall. Mengentafeln und Wahrheitstafeln sind *äquivalent*, wenn man die Mengensymbole M und M^c als Lösungsmengen der Aussagen $m \in M$ und $m \notin M$ interpretiert und \cap , \cup , c durch \wedge , \vee , \neg ersetzt. \rightarrow

■ Potenzmenge

Ist M eine beliebige Menge, so bezeichnet man die Menge aller ihrer *Teilmengen* als die *Potenzmenge* von M , geschrieben $\mathcal{P}(M)$. Eine Menge, deren Elemente selbst Mengen sind, wird auch als *Mengensystem* bezeichnet.

⇒ *Beispiel*

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\},$$

$$\mathcal{P}(\{0\}) = \{\emptyset, \{0\}\},$$

$$\mathcal{P}(\{0, 1\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}.$$

Es gilt immer

$$M \in \mathcal{P}(M), \quad \emptyset \in \mathcal{P}(M), \quad M \cap \mathcal{P}(M) = \emptyset.$$

Die Elemente von M sind also als solche *nicht* in $\mathcal{P}(M)$ enthalten, sondern nur ›verpackt‹ in Form von Ein-Element-Mengen:

$$m \in M \Rightarrow \{m\} \in \mathcal{P}(M).$$

► *Noch ein Beispiel*

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\},$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\},$$

$$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}.$$

Stellt man sich die leere Menge \emptyset als Sack vor, der nichts enthält, so ist $\{\emptyset\}$ ein Sack, der einen leeren Sack enthält, und $\{\{\emptyset\}\}$ ein Sack, der einen Sack enthält, der einen leeren Sack enthält. Dies sind drei sehr unterschiedliche Dinge! ◀

■ Kartesisches Produkt

Sind A und B zwei beliebige Mengen, so ist deren *kartesisches Produkt* die Menge aller *geordneten Paare*, die sich aus Elementen von A an erster Position und Elementen von B an zweiter Position bilden lassen. In Symbolen:

$$A \times B := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Hierbei ist ein *geordnetes Paar* (a, b) eindeutig durch seine beiden *Komponenten* a und b und deren Reihenfolge festgelegt ist¹². Ein Paar ist also etwas wesentlich anderes als eine Menge mit zwei Elementen. Für $a \neq b$ ist

$$\{a, b\} = \{b, a\}, \quad (a, b) \neq (b, a).$$

Ist eine der beteiligten Mengen leer, so ist das kartesische Produkt vereinbarungsgemäß ebenfalls leer. Für jede Menge M gilt also

$$M \times \emptyset = \emptyset \times M = \emptyset.$$

► *Beispiele* A. Mit $A = \{\boxminus, \boxplus\}$ und $B = \{\boxminus, \boxplus\}$ ist

$$A \times B = \{(\boxminus, \boxminus), (\boxminus, \boxplus), (\boxplus, \boxminus), (\boxplus, \boxplus)\},$$

$$B \times A = \{(\boxminus, \boxminus), (\boxminus, \boxplus), (\boxplus, \boxminus), (\boxplus, \boxplus)\}.$$

Insbesondere ist $A \times B \neq B \times A$.

B. Für eine nichtleere Menge A ist

$$A^2 := A \times A = \{(u, v) : u, v \in A\}. \quad \blacktriangleleft$$

¹² Wir begnügen uns mit einer naiven Definition eines geordneten Paares. Denn was ist genau eine erste und zweite Position? Eine mengentheoretische Definition wäre übrigens $(a, b) := \{a, \{a, b\}\}$.

Graphisch kann man das kartesische Produkt $A \times B$ durch ein Rechteck darstellen, dessen Seiten die Mengen A und B repräsentieren. Jeder Punkt des Rechtecks stellt dann ein Koordinatenpaar (a, b) mit $a \in A$ und $b \in B$ dar.

Analog werden Produkte aus mehr als zwei Mengen definiert. So ist

$$A^3 := A \times A \times A := \{(a, b, c) : a, b, c \in A\}$$

die Menge aller *Tripel* (a, b, c) mit Komponenten in A . Allgemein ist, für jede natürliche Zahl $n \geq 1$,

$$A^n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1, \dots, a_n \in A\}$$

die Menge aller n -Tupel mit Komponenten in A .

► *Beispiele* A. Der dreidimensionale Raum unserer Anschauung wird beschrieben durch die Menge aller geordneten Tripel reeller Zahlen,

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

B. Der n -dimensionale reelle Vektorraum \mathbb{R}^n besteht aus allen n -Tupeln reeller Zahlen,

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}. \quad \blacktriangleleft$$

1.3

Relationen

Elemente einer Menge M können auf vielfältige Weise miteinander in Beziehung gebracht werden. Beispielsweise können zwei Teilmengen einer festen Menge mindestens ein Element gemeinsam haben, oder zwei natürliche Zahlen können einen gemeinsamen Teiler haben. Um solche Beziehungen aber ohne Bezug auf eine semantische Interpretation zu beschreiben, betrachtet man *jede* Teilmenge des kartesischen Produktes $M \times M$ als eine *Relation* in der Menge M .

Definition Eine *Relation* auf einer Menge M ist eine Teilmenge $R \subset M \times M$. Man schreibt

$$aRb \quad :\Leftrightarrow \quad (a, b) \in R$$

und sagt, *a und b stehen in Relation R zueinander*. ◀

Folgende Eigenschaften von Relationen werden für uns von Bedeutung sein.

Definition Eine Relation $R \subset M \times M$ heißt

- *reflexiv*, falls aRa ,
 - *symmetrisch*, falls $aRb \Rightarrow bRa$,
 - *antisymmetrisch*, falls $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$,
 - *transitiv*, falls $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$,
 - *total*, falls $aRb \vee bRa$,
- für alle $a, b, c \in M$ gilt. ✕

Beispiele geben wir gleich, wenn wir die für uns besonders wichtigen *Äquivalenz-* und *Ordnungsrelationen* betrachten.

■ Äquivalenzrelationen

Definition Eine *Äquivalenzrelation* ist eine reflexive, symmetrische und transitive Relation und wird im Allgemeinen mit \sim bezeichnet. ✕

Für eine Äquivalenzrelation \sim auf M gilt also

$$a \sim a, \quad a \sim b \Rightarrow b \sim a, \quad a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c.$$

Gilt $a \sim b$, so heißen a und b *äquivalent*, und die Menge

$$[a] := \{b \in M : b \sim a\}$$

aller zu a äquivalenten Elemente heißt die *Äquivalenzklasse* von a .

- 7 ▶ *Beispiele* A. Die Gleichheitsrelation $=$ ist auf jeder Menge M eine Äquivalenzrelation. Ihre Äquivalenzklassen sind sämtlich Ein-Punkt-Mengen:

$$[a] = \{a\}, \quad a \in M.$$

- B. Sei $p \in \mathbb{N}$ mit $p \geq 2$. Dann definiert

$$n \sim_p m :\Leftrightarrow p \mid n - m :\Leftrightarrow p \text{ teilt } n - m$$

eine Äquivalenzrelation auf der Menge \mathbb{Z} der ganzen Zahlen A-25. Ihre Äquivalenzklassen sind die Restklassen bezüglich Division durch p , von denen es p verschiedene gibt:

$$[n] = \{n + kp : k \in \mathbb{Z}\}.$$

- C. Auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definiert

$$(n, m) \sim (p, q) :\Leftrightarrow nq = mp$$

eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklasse $[(n, m)]$ besteht aus allen Repräsentanten derselben rationalen Zahl n/m .

D. In der euklidischen Ebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit den Elementen (x, y) definiert

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \quad :\Leftrightarrow \quad x_1 = x_2$$

eine Äquivalenzrelation. Ihre Äquivalenzklassen bestehen aus Punkten mit derselben x -Koordinate, sind also die senkrecht stehenden Geraden. \blacktriangleleft

Charakteristisch für eine Äquivalenzrelation ist, dass ihre Äquivalenzklassen die Grundmenge in disjunkte Mengen zerlegen.

Satz Ist \sim eine Äquivalenzrelation auf der Menge M , so bildet die *Restklassenmenge von M modulo \sim* ,¹³

$$M/\sim := \{[a] : a \in M\},$$

eine *Zerlegung* von M . Das heißt, die Vereinigung aller Äquivalenzklassen ist M , und zwei Äquivalenzklassen sind entweder gleich oder disjunkt. \blacktriangleright

Es gilt also

$$M = \bigcup_{a \in M} [a] \quad \text{und} \quad [a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow [a] = [b].$$

Somit gehört jedes Element von M zu genau einer Äquivalenzklasse in M/\sim .

⟨⟨⟨ *Beweis* Aufgrund der Reflexivität einer Äquivalenzrelation ist $a \in [a]$ für alle $a \in M$ und deshalb

$$M \subset \bigcup_{a \in M} [a] \subset M.$$

Also sind diese beiden Mengen gleich.

Angenommen, es ist $[a] \cap [b] \neq \emptyset$. Somit gibt es ein $c \in [a] \cap [b]$, und hierfür gilt $c \sim a$ und $c \sim b$. Also ist auch $a \sim b$ aufgrund der Symmetrie und Transitivität von \sim . Daraus aber folgt, dass $[a] = [b]$. $\rangle\rangle\rangle$

Die *Projektion* von M auf M/\sim ist die Abbildung

$$\pi : M \rightarrow M/\sim, \quad a \mapsto [a],$$

die jedem Element a die Klasse aller zu a äquivalenten Elemente zuordnet.

¹³ Erinnerung: Eine Menge enthält ein Element nur *einmal*, auch wenn es mehrmals notiert wird.

■ Ordnungsrelationen

Definition Eine *Ordnungsrelation* ist eine reflexive, antisymmetrische und transitive Relation und wird mit \leq bezeichnet, falls nichts anderes vereinbart wird. Ist die Relation außerdem total, so spricht man von einer *totalen Ordnungsrelation*. \times

Für eine Ordnungsrelation \leq auf M gilt also

$$a \leq a, \quad a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow b = a, \quad a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$$

für alle $a, b, c \in M$. Für eine totale Ordnung gilt außerdem $a \leq b \vee b \leq a$ für beliebige $a, b \in M$. Ist die Ordnung nicht total, so gibt es mindestens zwei Elemente, die nicht in Relation stehen.

► **Beispiele** A. Die Gleichheitsrelation ist eine Ordnungsrelation. Sie ist aber nicht total, wenn M mehr als ein Element enthält.

B. Die übliche \leq -Relation auf \mathbb{N} ist eine totale Ordnungsrelation.

C. Dasselbe gilt für \leq auf \mathbb{Z} , \mathbb{Q} und \mathbb{R} .

D. Auf der Potenzmenge einer beliebigen Menge M definiert die Teilmengebeziehung \subset eine Ordnung. Diese ist allerdings *nicht total*, wenn M mehr als ein Element enthält.

E. Auf \mathbb{N} definiert die *Teiler-Relation* $n \mid m \Leftrightarrow n$ teilt m eine nicht-totale Ordnung. ◀

Für eine Ordnungsrelation \leq erklärt man außerdem

$$a < b \Leftrightarrow a \leq b \wedge a \neq b.$$

Weiter vereinbart man $a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$ und $a > b \Leftrightarrow b < a$.

8 **Trichotomiesatz** Ist \leq eine totale Ordnung auf M , so gilt für je zwei Elemente $a, b \in M$ immer eine und nur eine der drei Relationen

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

Ist umgekehrt $<$ eine transitive Relation auf M , so dass für je zwei beliebige Elemente diese Trichotomie gilt, so definiert

$$a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$$

eine totale Ordnung auf M . \times

◀◀◀ **Beweis der ersten Aussage** Gilt $a < b$, so ist per definitionem $a \neq b$. Auch kann nicht $a > b$ gelten, denn andernfalls gilt dann auch $a \leq b \wedge a \geq b$ und damit wiederum $a = b$. Gilt dagegen $a = b$, so kann ebenfalls per definitionem

weder $a < b$ noch $a > b$ gelten. Und für $a > b$ argumentiert man entsprechend. Somit gilt immer *genau eine* der drei Aussagen.

Beweis der zweiten Aussage: Für jedes Element von M gilt wegen $a = a$ auch $a \leq a$. Also ist \leq reflexiv. Gilt $a \leq b \wedge b \leq a$, so gilt mit dem Distributivgesetz₂ auch

$$\begin{aligned} & (a < b \vee a = b) \wedge (b < a \vee b = a) \\ \Leftrightarrow & (a < b \wedge b < a) \vee (a = b) \\ \Leftrightarrow & (a = b), \end{aligned}$$

da $(a < b \wedge b < a)$ aufgrund der Trichotomie ein Widerspruch ist. Also ist \leq antisymmetrisch. Und da $<$ transitiv ist, ist auch \leq transitiv. Schließlich folgt aus der Trichotomie, $p \Leftrightarrow p \vee p$ und dem Assoziativgesetz₂

$$\begin{aligned} & (a < b) \vee (a = b) \vee (a > b) \\ \Leftrightarrow & (a < b \vee a = b) \vee (a = b \vee a > b) \\ \Leftrightarrow & (a \leq b) \vee (a \geq b). \end{aligned}$$

Also ist \leq total. \gggg

► *Beispiel* Ist \leq eine totale Ordnung auf M , so wird auf $M \times M$ durch

$$(a, b) \leq (c, d) \Leftrightarrow (a < c) \vee (a = c \wedge b \leq d)$$

eine totale Ordnung definiert, genannt *lexikographische Ordnung*_{A-24}. ◀

1.4

Abbildungen

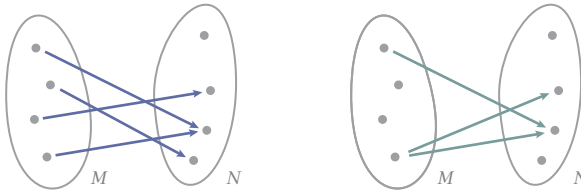
Mengen kann man aufeinander abbilden. Der Begriff der *Abbildung* ist von ebenso fundamentaler und weitreichender Bedeutung wie der Begriff der Menge. Auch hier werden wir uns mit einer naiven Definition begnügen.

- 9 **Naive Definition** Seien M und N zwei beliebige Mengen. Eine *Abbildung* oder *Funktion* f von M nach N ist eine Vorschrift, die jedem Element $a \in M$ genau ein Element $b \in N$ zuordnet. In Symbolen:

$$f : M \rightarrow N, \quad a \mapsto b = f(a). \quad \times$$

Diese Definition ist ›naiv‹, da wir an eine anschauliche Bedeutung der Begriffe ›Vorschrift‹ und ›zuordnen‹ appellieren, ohne diese zu präzisieren. Sie ist sogar eher irreführend, da sie suggeriert, dass jede Abbildung in Gestalt einer

Abb 3 Funktion und Nicht-Funktion



Formel daherkommt. Dem ist aber nicht so! Sehr viele wichtige mathematische Funktionen sind nur *implizit* definiert, ohne einen expliziten formelmäßigen Ausdruck. Man kann sogar *beweisen*, dass es für sie solche Formeln nicht gibt. Dies gilt zum Beispiel für die Lösungen der meisten Differenzialgleichungen.

- 10 \Rightarrow **Beispiele** A. Die aus der Schule vertraute lineare Funktion mit Steigung $m \in \mathbb{R}$ und Ordinatenabschnitt $b \in \mathbb{R}$ kann man schreiben als

$$\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \lambda(t) = mt + b.$$

- B. Die klassische quadratische Funktion ist

$$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto p(x) = x^2.$$

- C. Die Funktion

$$\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad n \mapsto \varphi(n) = \text{card} \{p \in \mathbb{P} : p \leq n\}$$

liefert für jede natürliche Zahl n die Anzahl der Primzahlen $\leq n$. Diese kann nicht durch eine einfache Formel angegeben werden. \blacktriangleleft

Im Falle endlicher Mengen M und N ist eine Funktion $f: M \rightarrow N$ im Prinzip immer durch ein Pfeildiagramm wie in Abbildung 3 angebar. Die Punkte bezeichnen die Elemente der Mengen M und N , und die Pfeile deren Zuordnung durch die Abbildung f . Eine Funktion liegt genau dann vor, wenn von *jedem* Punkt der Menge M *genau ein* Pfeil ausgeht. Andererseits dürfen Punkte in N von keinem, einem, oder mehreren Pfeilen getroffen werden. Es dürfen sogar *alle* Punkte aus M auf denselben Punkt in N abgebildet werden.

Nun etwas Terminologie. Mit der etwas schwerfällig erscheinenden Notation

$$f: M \rightarrow N, \quad a \mapsto b = f(a)$$

werden alle Bestandteile notiert, die eine Funktion ausmachen: f ist der *Name* der Funktion, M ihr *Definitionsbereich* und N ihr *Wertebereich*. Jeden Punkt $a \in M$ bildet f auf den *Funktionswert* $b = f(a) \in N$ ab, den man auch den *Bildpunkt* von a unter f nennt. Der Punkt a selbst heißt *Urbild* von b unter f .

Einem Punkt $a \in M$ ist immer *genau ein Bildpunkt* $b \in N$ zugeordnet. Ein Punkt $b \in N$ kann aber *mehrere Urbilder* haben – siehe Abbildung 3.

Es ist üblich, den einfachen Pfeil \rightarrow zwischen Definitions- und Wertebereich zu setzen, und den abgeschlossenen Pfeil \mapsto zwischen deren Elemente, um diese verschiedenen Ebenen zu unterscheiden.

Natürlich verwendet man auch kürzere Schreibweisen. Wird der Name einer Funktion nicht benötigt, so schreibt man auch kürzer

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2.$$

Ist auch der Definitionsbereich im gegebenen Kontext unwesentlich oder bekannt, so schreibt man schlicht $x \mapsto x^2$. Ist andererseits die ›Abbildungsvorschrift‹ nicht von Belang, so schreibt man $f: M \rightarrow N$ für irgendeine Abbildung von M nach N .

Das *Bild von M* unter einer Abbildung $f: M \rightarrow N$ ist die Menge

$$f(M) := \{f(a) : a \in M\} \subset N$$

aller Bildpunkte unter f . Dies ist etwas wesentlich anderes als der Wertebereich. Während dieser meist leicht festgelegt werden kann, ist das genaue Bild einer Menge unter einer Funktion gelegentlich schwer zu bestimmen.

11 \Rightarrow *Beispiel* Mit den Bezeichnungen des vorangehenden Beispiels $_{10}$ ist

$$\lambda(\mathbb{R}) = \begin{cases} \{b\}, & m = 0, \\ \mathbb{R}, & m \neq 0, \end{cases}$$

und

$$p(\mathbb{R}) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}.$$

Da es unendlich viele Primzahlen gibt, ist außerdem

$$\varphi(\mathbb{N}) = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad \blacktriangleleft$$

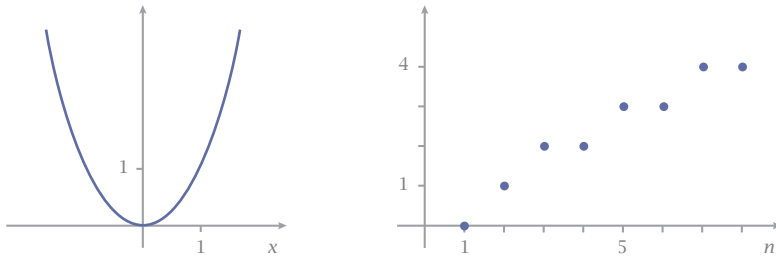
■ Graph

Jede Funktion $f: M \rightarrow N$ bestimmt eindeutig ihren *Graph*

$$\Gamma(f) := \{(a, b) \in M \times N : a \in M \wedge b = f(a) \in N\}.$$

Dies ist also eine Teilmenge von $M \times N$, bestehend aus allen Paaren der Form $(a, f(a))$ mit $a \in M$. Jedes Element $a \in M$ tritt also *genau einmal* als erste Komponente auf.

Umgekehrt bestimmt ein Graph $\Gamma(f)$ einer Funktion eindeutig die zugrunde liegende Funktion f . Denn zu jedem $a \in M$ existiert genau ein $b \in N$, so dass $(a, b) \in \Gamma(f)$, und dieses b ist der eindeutige Bildpunkt von a unter f . Aufgrund

Abb 4 Graphen der Funktionen p und φ aus Beispiel 10

dieses eindeutigen Zusammenhangs kann man den Begriff der Funktion auf den Begriff der Relation zurückführen.

Mengentheoretische Definition Eine *Abbildung* $f: M \rightarrow N$ ist eine Relation in $M \times N$, in der es zu jedem $a \in M$ genau ein $b \in N$ gibt, so dass afb gilt. \times

Diese Definition vermeidet Begriffe wie ›Vorschrift‹ und ›zuordnen‹ und damit die Assoziation von ›Funktion‹ mit ›Formel‹, ist dafür aber weniger anschaulich.

In jedem Fall ist eine Funktion ein Objekt, das aus einem *Definitionsbereich*, einem *Wertebereich* und einer *funktionalen Relation* zwischen beiden besteht. Diese drei Bestandteile gehören genannt, wenn sie nicht aus dem Kontext bekannt sind oder für die jeweilige Betrachtung keine Rolle spielen. Zwei Funktionen sind *gleich* dann nur dann, wenn sie in *allen* diesen Aspekten gleich sind. Das heißt,

$$f: M \rightarrow N, \quad g: U \rightarrow V$$

sind *gleich* dann und nur dann, wenn $M = U$ und $N = V$ und

$$f(a) = g(a), \quad a \in M = U.$$

Die Wahl des Wertebereiches wird allerdings erst dann bedeutsam, wenn dieser mit einer zusätzlichen Struktur wie zum Beispiel einer Topologie versehen ist.

12 \Rightarrow **Beispiel** Es besteht ein großer Unterschied zwischen den Funktionen

$$p: (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto t^2.$$

und

$$q: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto t^2.$$

Wie wir noch sehen werden, ist die Funktion q auf ihrem Bild umkehrbar, die Funktion p dagegen nicht¹⁴. \leftarrow

■ Standardfunktionen

Leere Abbildung: Zunächst bemerken wir, dass es *keine Abbildung* einer nichtleeren Menge M in die *leere Menge* gibt. Denn einem Punkt $a \in M$ kann kein Bildpunkt zugeordnet werden. Es gibt aber umgekehrt immer genau eine Abbildung der leeren Menge in eine beliebige nichtleere Menge N , die *leere Abbildung*

$$e : \emptyset \rightarrow N.$$

Diese wird uns allerdings kaum beschäftigen ...

Identität: Die Abbildung

$$id_M : M \rightarrow M, \quad a \mapsto a$$

heißt die *Identität* auf M . Ist der Definitionsbereich klar, schreibt man auch id .

Inklusion: Ist $A \subset M$, so heißt

$$i : A \rightarrow M, \quad a \mapsto a$$

die *Inklusionsabbildung* oder *Einbettung* von A in M . Es ist $i = id_M$ genau dann, wenn $A = M$.

Charakteristische Funktion: Ist $A \subset M$, so heißt

$$\chi_A : M \rightarrow \{0, 1\}, \quad \chi_A(a) = \begin{cases} 1 & \text{für } a \in A, \\ 0 & \text{für } a \in A^c, \end{cases}$$

die *charakteristische Funktion* oder *Indikatorfunktion* von A auf M .

■ Tupel, Folgen, Operationen

Wir erwähnen noch einige Funktionen spezieller Art, die unter anderen Namen bekannt sind. Hierbei sei X eine beliebige nichtleere Menge.

Tupel: Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ sei $\mathbb{A}_n := \{1, 2, \dots, n\}$ die Menge der ersten n natürlichen Zahlen. Eine Funktion

$$f : \mathbb{A}_n \rightarrow X$$

wird vollständig beschrieben durch ihre n Funktionswerte

$$x_k := f(k), \quad 1 \leq k \leq n.$$

Diese werden bequemer in Form eines *n-Tupels* (x_1, \dots, x_n) angegeben. Der Funktionswert $f(k)$ ist dann die *k-te Koordinate* oder *Komponente* x_k des Tupels. Insbesondere ist ein 2-Tupel ein geordnetes Paar.¹⁴

n-Tupel sind also eine Kurznotation für Funktionen auf \mathbb{A}_n . Dementsprechend sind zwei solche Tupel gleich, wenn alle entsprechenden Komponenten gleich sind:

$$(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \Leftrightarrow x_k = y_k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Die Menge aller *n-Tupel* mit Komponenten in X ist das *n-fache kartesische Produkt* der Menge X ,

$$X^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in X\}.$$

Am häufigsten wird uns der *n-dimensionale reelle Raum*

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

begegnen.

Folgen: Entsprechend wird eine Funktion $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ vollständig beschrieben durch ihre Funktionswerte

$$x_k := f(k), \quad k = 1, 2, \dots$$

Man spricht von einer *Folge* in X , und schreibt sie in der Form

$$(x_1, x_2, \dots) = (x_k)_{k \geq 1} = (x_k).$$

Folgen werden wir genauer in Kapitel 4 studieren.

Operation: Eine Funktion

$$\star : X \times X \rightarrow X$$

ordnet jedem Paar $(a, b) \in X \times X$ ein neues Element $c = \star(a, b) \in X$ zu. Dies kann man als eine *binäre Operation* oder *innere Verknüpfung* auf X auffassen. Die übliche Schreibweise hierfür ist

$$c = a \star b.$$

Eine binäre Operation \star auf X heißt *kommutativ*, falls

$$a \star b = b \star a, \quad a, b \in X.$$

Sie heißt *assoziativ*, falls

$$a \star (b \star c) = (a \star b) \star c, \quad a, b, c \in X.$$

¹⁴ Dies ist allerdings kein Ersatz für unsere naive Definition des Paares! Denn der mengentheoretische Begriff der Funktion basiert auf dem Begriff des kartesischen Produktes, und dieses wiederum haben wir mit dem Begriff des geordneten Paares erklärt.

► *Beispiel* Zwei aus früher Kindheit vertraute binäre Operationen sind die Addition und die Multiplikation natürlicher Zahlen. Beide sind assoziativ und kommutativ. ◀

■ Komposition

Zwei Abbildungen können verknüpft oder hintereinander ausgeführt werden, wenn der Wertebereich des ersten Abbildung im Definitionsbereich der zweiten Abbildung enthalten ist. Wir betrachten also zwei Abbildungen $f: M \rightarrow N$ und $g: N \rightarrow O$, wofür man auch anschaulicher

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} O$$

schreibt. Dann ist die *Komposition* von f mit g definiert als die Abbildung

$$g \circ f: M \rightarrow O, \quad a \mapsto (g \circ f)(a) := g(f(a)).$$

Gelesen wird dies *g nach f* oder *g kringel f*. Die Komposition operiert *immer von rechts nach links*: zuerst wird f angewandt, danach g , so wie ja auch f zuerst auf das rechts stehende Argument a angewandt wird.

Die Komposition ist *immer assoziativ*. Ist also die Verknüpfung dreier Abbildungen überhaupt definiert, also

$$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} O \xrightarrow{h} P,$$

so ist immer

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

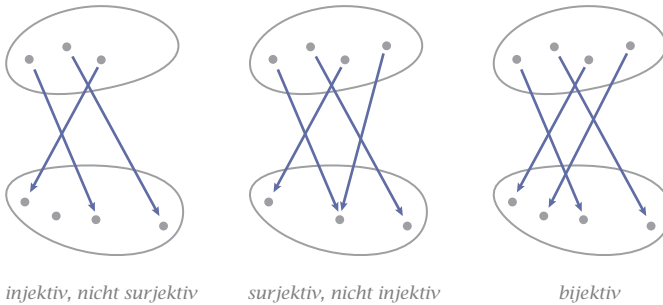
Daher kann man die Klammern auch ganz weglassen. Dagegen ist die Komposition im Allgemeinen *nicht kommutativ*, und $f \circ g$ verschieden von $g \circ f$, wie man sich leicht anhand eines Beispiels überlegt.

► *Beispiel* Bezeichnet $F(M)$ den Raum aller Abbildungen von $M \rightarrow M$, so definiert die Komposition

$$\circ: F(M) \times F(M) \rightarrow F(M), \quad (g, f) \mapsto g \circ f$$

eine *Operation* auf $F(M)$. ◀

Abb 5 Injektion, Surjektion, Bijektion



■ Injektion, Surjektion, Bijektion

Es folgen die drei wichtigsten mengentheoretischen Eigenschaften, die eine Abbildung aufweisen kann.

Definition Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ heißt

- *injektiv*, wenn jeder Punkt in N höchstens ein Urbild besitzt,
- *surjektiv*, wenn jeder Punkt in N mindestens ein Urbild besitzt,
- *bijektiv*, wenn sie injektiv und surjektiv ist. ✕

Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ ist somit surjektiv, wenn $f(M) = N$. Man sagt dann auch, f bildet M auf N ab. Sie ist injektiv, wenn keine zwei Urbilder in M dasselbe Bild haben. Mit anderen Worten, für alle $a, b \in M$ gilt

$$f(a) = f(b) \Rightarrow a = b.$$

Sie ist bijektiv, wenn jeder Punkt in N genau ein Urbild besitzt.

- 13 **Satz** Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ ist bijektiv genau dann, wenn es eine Abbildung $\varphi: N \rightarrow M$ gibt, so dass

$$\varphi \circ f = id_M, \quad f \circ \varphi = id_N.$$

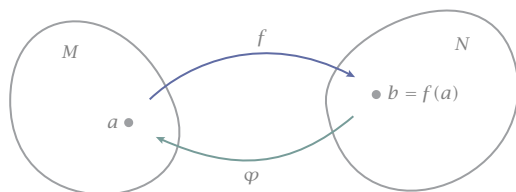
In diesem Fall ist φ eindeutig bestimmt. ✕

⟨⟨⟨⟨ Beweis \Rightarrow Ist f bijektiv, so gibt es zu jedem $b \in N$ genau ein $a \in M$ mit $f(a) = b$. Wir können dadurch eine Abbildung $\varphi: N \rightarrow M$ definieren, welche die gewünschten Eigenschaften besitzt. So ist zum Beispiel

$$\varphi(f(a)) = \varphi(b) = a, \quad a \in M,$$

also $\varphi \circ f = id_M$.

Abb 6 Abbildung und Umkehrabbildung



⇐ Für jedes $b \in N$ gilt wegen $f \circ \varphi = id_N$

$$b = id_N(b) = (f \circ \varphi)(b) = f(\varphi(b)).$$

Also ist f surjektiv. Gilt andererseits $f(a_1) = f(a_2)$ für zwei Elemente in M , so folgt mit $\varphi \circ f = id_M$

$$a_1 = \varphi(f(a_1)) = \varphi(f(a_2)) = a_2.$$

Also ist f auch injektiv. Somit ist f bijektiv.

Bleibt noch die Eindeutigkeit von φ zu zeigen. Ist $\psi: N \rightarrow M$ eine weitere Abbildung mit den Eigenschaften $\psi \circ f = id_M$ und $f \circ \psi = id_N$, so folgt

$$\begin{aligned} \psi &= \psi \circ id_N = \psi \circ (f \circ \varphi) \\ &= (\psi \circ f) \circ \varphi \\ &= id_M \circ \varphi \\ &= \varphi. \end{aligned}$$

Also ist $\psi = \varphi$, und es gibt nur eine solche Abbildung. >>>>

■ Umkehrabbildung

Eine bijektive Abbildung $f: M \rightarrow N$ ist also umkehrbar¹³, und wir können ihre *Umkehrabbildung* definieren als die eindeutig bestimmte Abbildung $f^{-1}: N \rightarrow M$ ¹⁵ mit der Eigenschaft, dass

$$f^{-1} \circ f = id_M, \quad f \circ f^{-1} = id_N.$$

Das folgende Lemma ist als Aufgabe überlassen^{A-30}.

Lemma Die Komposition umkehrbarer Abbildungen ist umkehrbar, und es gilt

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}. \quad \times$$

¹⁵ Gelesen ›f invers‹ und nicht zu verwechseln mit dem Kehrwert reeller Zahlen!

14 \triangleright *Beispiele* A. Die Abbildung

$$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto p(t) = t^2$$

ist nicht umkehrbar, da sie nicht injektiv ist. So ist $p(-1) = p(1) = 1$.

B. Die Abbildung

$$q: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto q(t) = t^2$$

ist bijektiv auf ihr Bild $[0, \infty)$ und damit umkehrbar. Ihre Umkehrfunktion ist die Quadratwurzelfunktion. \triangleleft

Aufgaben

- 1 Welche der folgenden Aussagen sind wahr?
 - a. $p \rightarrow q \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$.
 - b. $\emptyset \in \mathcal{P}(\emptyset)$.
 - c. $\{0\} \times \{0\} = \{(0)\}$.
 - d. $N \subset M \Leftrightarrow M^c \not\subset N^c$.
 - e. Für $f: A \rightarrow B$ gilt $f(A) = B$.
 - f. Es gibt *keine* Abbildung in die leere Menge.
 - g. Eine Abbildung $f: A \rightarrow B$ ist injektiv genau dann, wenn sie umkehrbar ist.
 - h. Die Umkehrabbildung von f besteht aus den Kehrwerten von f .
- 2 In der Bibliothek des Grafen Dracula gibt es keine zwei Bücher, deren Inhalt aus gleich vielen Wörtern besteht. Außerdem ist die Anzahl der Bücher größer als die Anzahl der Wörter jedes einzelnen Buches. Diese Aussagen genügen, um den Inhalt mindestens eines Buches aus Draculas Bibliothek genau zu beschreiben. Was steht in dem Buch?
- 3 Beweisen sie die Abtrennungsregel \exists mit einer Wahrheitstafel.
- 4 Wie lauten die Assoziativ- und Kommutativgesetze für \wedge und \vee ?
- 5 Vereinfachen sie die folgenden Ausdrücke. a. $(p \wedge \neg p) \vee q$ b. $(p \vee \neg p) \wedge q$
- 6 Definieren sie das umgangssprachliche *entweder-oder* durch eine Wahrheitstafel und stellen sie es durch logische Ausdrücke mit \neg, \wedge, \vee dar.
- 7 Die folgende Wahrheitstafel umfasst mögliche Alternativen zur Definition der *wenn-dann*-Verknüpfung:

p	q	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow q$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0

Diskutieren sie die logische Bedeutung jeder dieser Verknüpfungen, und warum diese keine gute Wahl einer Definition von $p \rightarrow q$ wären.

- 8 Seien p und q Aussagen, von denen wir nur wissen, dass $p \rightarrow q$ gilt. Was können wir dann über folgende Ausdrücke aussagen?
 - a. $\neg q \rightarrow \neg p$ b. $\neg p \rightarrow \neg q$ c. $q \rightarrow \neg p$ d. $\neg p \rightarrow q$.
- 9 Man zeige $\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$.
- 10 Die logische Verknüpfung *nicht-und*, englisch *nand*, wird definiert durch

$$p \sqcap q := \neg(p \wedge q).$$

- a. Stellen sie die Wahrheitstafel für \sqcap auf. b. Zeigen sie $\neg p \Leftrightarrow p \sqcap p$.
- c. Stellen sie \wedge und \vee ausschließlich durch \sqcap dar.

11 Vereinfachen Sie $(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge \neg c) \vee (\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b \wedge \neg c) \vee (a \wedge b \wedge c)$

12 *Disjunktive Normalform* Sei λ eine logische Funktion von drei Aussagen a, b, c .

a. Wieviele solcher logischen Funktionen gibt es?

b. Zeigen Sie, dass es genau 8 verschiedene solche Funktionen $\lambda_1, \dots, \lambda_8$ gibt, die bei genau einer Wahrheitsbelegung von a, b, c den Wert 1 annehmen und sonst 0.

c. Stellen Sie diese Funktionen durch \wedge und \neg dar.

d. Stellen Sie jede andere logische Funktion λ , die mindestens zweimal den Wert 1 annimmt, durch \vee -Verknüpfungen von $\lambda_1, \dots, \lambda_8$ dar. Man nennt dies die *disjunktive Normalform* von λ .

13 Verifizieren sie die folgenden Aussagen über Teilmengen A, B einer Menge M .

a. $A \subset B^c \Leftrightarrow B \subset A^c$. b. $A \subset B \Leftrightarrow B^c \subset A^c$.

14 Erläutern sie das *Russellsche Paradoxon*: Bildet man

$$M = \{X : X \notin X\}$$

so führt $M \in M$ zu $M \notin M$, und $M \notin M$ führt zu $M \in M$.

15 Beweisen sie die Distributivgesetze,

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C),$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$

und die Regeln von de Morgan,

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c, \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

16 Beweisen sie die folgenden Identitäten für Mengen.

a. $(A_1 \times A_2) \cap (B_1 \times B_2) = (A_1 \cap B_1) \times (A_2 \cap B_2)$

b. $(A_1 \times A_2) \setminus (B_1 \times B_2) = A_1 \times (A_2 \setminus B_2) \cup (A_1 \setminus B_1) \times B_2$

17 Seien A und B beliebige Mengen. Diskutieren sie alle Fälle, in denen $A \times B = B \times A$.

18 Sei A eine beliebige Aussageform. Dann gilt

$$m \in \emptyset \Rightarrow A(m).$$

Die leere Menge besitzt somit jede Eigenschaft.

19 Beschreiben sie geometrisch das kartesische Produkt

- a. zweier Intervalle, b. zweier Geraden, c. eines Intervalls und einer Kreislinie,
d. zweier Kreislinien, e. einer Geraden und einer Kreislinie.

20 Man zeige: $A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset$.

21 Zeigen sie, dass

$$a \sim b \Leftrightarrow \frac{a-b}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$$

auf \mathbb{R} eine Äquivalenzrelation definiert. Gilt $\sqrt{2} \sim \sqrt{3}$?

22 Zwei Relationen R auf X und S auf Y induzieren auf $X \times Y$ eine Relation $R \times S$ durch

$$(s, u)(R \times S)(t, v) \Leftrightarrow (sRt) \wedge (uSv).$$

Man zeige: Sind R und S Äquivalenzrelationen, so auch $R \times S$.

- 23 Sei $*$ eine kommutative Operation und \sim eine Äquivalenzrelation auf X . Gilt

$$a \sim b \Rightarrow a * c \sim b * c, \quad a, b, c \in X,$$

so ist

$$[a] \odot [b] := [a * b]$$

eine wohldefinierte, kommutative Operation auf X/\sim .

- 24 Sei \leq eine totale Ordnung auf X . Dann wird auf $X \times X$ eine totale Ordnung durch

$$(a, b) \leq (c, d) :\Leftrightarrow a < c \vee a = c \wedge b \leq d$$

definiert, genannt *lexikographische Ordnung*.

- 25 Auf \mathbb{Z} sei $n \sim_p m :\Leftrightarrow p$ teilt $n - m$.

a. \sim_p ist eine Äquivalenzrelation.

b. Für deren Äquivalenzklassen $[n]_p$ sind die Operationen

$$[n]_p \oplus [m]_p := [n + m]_p, \quad [n]_p \odot [m]_p := [n \cdot m]_p$$

wohldefiniert.

c. Damit wird $\mathbb{Z}_p = \{[0]_p, \dots, [p-1]_p\}$ zu einem Ring, dem *Restklassenring modulo p* .

- 26 Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ ist

a. injektiv genau dann, wenn es eine Abbildung $g: N \rightarrow M$ gibt, so dass $g \circ f = id_M$,

b. surjektiv genau dann, wenn es eine Abbildung $h: N \rightarrow M$ gibt, so dass $f \circ h = id_N$.

- 27 Seien A und B beliebige Teilmengen einer nichtleeren Grundmenge M . Stellen sie die Indikatorfunktionen von A^c , $A \cup B$, $A \cap B$ und $A \setminus B$ durch die Indikatorfunktionen von A und B dar.

- 28 Für zwei Abbildungen $f: M \rightarrow N$ und $g: N \rightarrow O$ gilt Folgendes. Sind respektive ist

a. f und g injektiv, so ist $g \circ f$ injektiv,

b. $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv,

c. $g \circ f$ injektiv und f surjektiv, so ist g injektiv.

d. f und g surjektiv, so ist $g \circ f$ surjektiv,

e. $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv,

f. $g \circ f$ surjektiv und g injektiv, so ist f surjektiv.

- 29 Sei $f: M \rightarrow M$ irgendeine Abbildung. Gilt $f \circ g = g \circ f$ für jede Abbildung $g: M \rightarrow M$, so ist $f = id_M$.

- 30 Seien $f: M \rightarrow N$ und $g: N \rightarrow O$ bijektive Abbildungen. Dann ist auch $g \circ f: M \rightarrow O$ bijektiv, und

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

- 31 Sei $F(M, X)$ der Raum aller Abbildungen $f: M \rightarrow X$. Eine Operation $*$ auf X induziert auf $F(M, X)$ eine Operation

$$\odot : F(M, X) \times F(M, X) \rightarrow F(M, X), \quad (f, g) \mapsto f \odot g,$$

durch die *punktweise Definition*

$$(f \circledast g)(a) = f(a) * g(a), \quad a \in M.$$

Zeigen sie: \circledast ist kommutativ respektive assoziativ auf $F(M, X)$ genau dann, wenn $*$ kommutativ respektive assoziativ auf X ist. – Üblicherweise schreibt man für diese induzierte Operation wieder $*$ statt \circledast .

- 32 Eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ induziert *Mengenabbildungen*¹⁶

$$f: \mathcal{P}(M) \rightarrow \mathcal{P}(N), \quad f(A) := \{f(m) \in N : m \in A\}$$

und

$$f^{-1}: \mathcal{P}(N) \rightarrow \mathcal{P}(M), \quad f^{-1}(B) = \{m \in M : f(m) \in B\}.$$

Man nennt $f(A)$ das *Bild von A* und $f^{-1}(B)$ das *Urbild von B*. Zeigen sie:

- a. Für $A \subset M$ und $B \subset N$ gilt

$$f^{-1}(f(A)) \supset A, \quad f(f^{-1}(B)) \supset B.$$

- b. Für $A_1, A_2 \subset M$ und $B_1, B_2 \subset N$ gilt

$$f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2), \\ f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2).$$

- c. Mit denselben Bezeichnungen gilt

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2), \\ f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2).$$

- d. Geben sie ein Beispiel, wo

$$f(A_1 \cap A_2) \subsetneq f(A_1) \cap f(A_2).$$

- e. Für $B \subset N$ gilt

$$f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c.$$

- f. Gilt für $A \subset M$ auch entsprechend $f(A^c) = f(A)^c$?

- 33 Für eine Abbildung $f: M \rightarrow N$ sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) f ist injektiv.

(ii) $f^{-1}(f(A)) = A$ für jede Teilmenge $A \subset M$.

(iii) $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ für alle $A_1, A_2 \subset M$.

- 34 Sei $g: M \rightarrow M$ eine konstante Abbildung. Für welche Abbildungen $f: M \rightarrow M$ gilt dann $f \circ g = g \circ f$?

- 35 In einem Zoologiebuch aus Gallusien heißt es: »Jede ungebrochselte Kalupe ist dorig, und jede foherante Kalupe ist dorig. In Gallusien gibt es sowohl dorige wie undorige

¹⁶ Streng genommen sollten die Mengenabbildungen mit einem anderen Symbol bezeichnet werden, wie zum Beispiel f^* , um sie von f , und f^{-1} von der Umkehrfunktion zu unterscheiden. Im Allgemeinen ist aber aus dem Kontext klar, welche Abbildung gemeint ist.

Kalupen«. — Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Aussagen, die *nicht ableitbar* sind, sind dabei als *falsch* zu bewerten. Das Präfix *un-* ist gleichbedeutend mit der logischen Negation.

- a. Es gibt gebrochselte Kalupen.
- b. Es gibt sowohl gebrochselte wie ungebrochselte Kalupen.
- c. Alle undorigen Kalupen sind gebrochselte.
- d. Einige gebrochselte Kalupen sind unfoberant.

2

Reelle Zahlen

Die reellen Zahlen bilden das Fundament der gesamten Analysis. Es ist daher sinnvoll, sich zunächst Klarheit über dieses Fundament zu verschaffen.

Der *konstruktive* – und historisch korrekte – Zugang beginnt bei den natürlichen Zahlen und führt über die Konstruktion der ganzen und der rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen. Jedes Mal ist ein neues Zahlensystem auf dem vorangehenden aufzubauen, und es sind die gewünschten Eigenschaften nachzuweisen. Man erhält so ein tief gegründetes Fundament, doch ist die sorgfältige Ausführung langwierig, um nicht zu sagen langweilig. Auch trägt es unmittelbar wenig zum Verständnis der *eigentlichen* Analysis bei.

Der *axiomatische* – und hier beschriebene – Zugang zu den reellen Zahlen ist direkter. Er besteht darin, möglichst wenige Postulate – die sogenannten *Axiome* – zu formulieren, die den Ausgangspunkt für alle weiteren Schlüsse bilden. Diese Axiome werden nicht weiter hinterfragt. Sie mögen evident sein, wenn man sie auf eine bestimmte Vorstellung von den reellen Zahlen bezieht. Doch mathematisch gesehen ist dies unerheblich. Diese Axiome machen keine Aussage, was die reellen Zahlen *sind*. Sie legen nur fest, welche *Eigenschaften* sie haben. Und nur diese Eigenschaften sind für alles Folgende relevant. – Ziel dieses Kapitels ist die folgende

Charakterisierung der reellen Zahlen Die reellen Zahlen bilden einen vollständigen angeordneten Körper, der mit \mathbb{R} bezeichnet wird. ✕

Im Einzelnen geht es um folgende Eigenschaften:

- (i) Die reellen Zahlen bilden einen Körper.
 - (ii) Dieser Körper besitzt eine *Ordnungsstruktur*.
 - (iii) Und er ist – in einem noch zu definierenden Sinn – *vollständig*.
- Wir brauchen nur eine Bezeichnung für diesen Körper, weil außerdem gilt:
- (iv) Es gibt im Wesentlichen nur *einen* Körper mit diesen Eigenschaften.
- Darum wird es in den nächsten Abschnitten gehen.

2.1

Die Körperaxiome

Zunächst einmal bilden die reellen Zahlen einen *Körper*. Das ist eine Menge, in der zwei Operationen erklärt sind, die üblicherweise als Addition und Multiplikation bezeichnet werden und die den folgenden *Körperaxiomen* genügen.

- 1 **Körperaxiome** Eine Menge \mathbb{K} mit zwei Operationen $+$ und \cdot , genannt *Addition* und *Multiplikation*, heißt *Körper*, wenn in ihm die folgenden Axiome gelten: die *Axiome der Addition*:

(A-1) Die Addition ist assoziativ und kommutativ,

(A-2) Es gibt ein Element $n \in \mathbb{K}$, genannt *neutrales Element der Addition*, so dass $x + n = x$ für alle $x \in \mathbb{K}$,

(A-3) Zu jedem Element $x \in \mathbb{K}$ existiert ein Element $\bar{x} \in \mathbb{K}$, genannt das *additiv Inverse* zu x , so dass $x + \bar{x} = n$,

die *Axiome der Multiplikation*:

(M-1) Die Multiplikation ist assoziativ und kommutativ,

(M-2) Es gibt ein Element $e \in \mathbb{K}$, $e \neq n$, genannt *neutrales Element der Multiplikation*, so dass $x \cdot e = x$ für alle $x \in \mathbb{K}$,

(M-3) Zu jedem Element $x \in \mathbb{K}$ mit $x \neq n$ existiert ein Element $x' \in \mathbb{K}$, genannt das *multiplikativ Inverse* zu x , so dass $x \cdot x' = e$,

und das *Distributivgesetz*:

(D) Für alle $x, y, z \in \mathbb{K}$ gilt $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$. \times

Genauer ist ein Körper ein *Tripel* $(\mathbb{K}, +, \cdot)$, bestehend aus einer Menge \mathbb{K} mit zwei Operationen $+$ und \cdot mit den oben genannten Eigenschaften. Ist aber klar, welche Operationen gemeint sind, spricht man einfach vom *Körper* \mathbb{K} .

Um Klammern zu sparen, vereinbart man, dass Punktoperationen stärker binden als Strichoperationen. Auch lässt man den Punkt für die Multiplikation meist weg. Das Distributivgesetz lautet dann beispielsweise $x(y + z) = xy + xz$.

- 2 \Rightarrow **Beispiele für Körper** A. Der kleinste Körper ist $\mathbb{F}_2 = \{n, e\}$ mit den Operationen

$$\begin{array}{c|cc} + & n & e \\ \hline n & n & e \\ e & e & n \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & n & e \\ \hline n & n & n \\ e & n & e \end{array}$$

Interpretieren wir n als 0 und e als 1, so entspricht dies genau den üblichen Rechenregeln mit der einzigen Ausnahme, dass hier

$$1 + 1 = 0.$$

B. Die Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen mit der üblichen Addition und Multiplikation bildet einen Körper mit neutralen Elementen $n = 0$ und $e = 1$.

C. Die Menge \mathbb{C} der komplexen Zahlen bildet einen Körper – siehe Kapitel 4.

D. Eine rationale Funktion mit rationalen Koeffizienten ist gegeben durch einen Ausdruck der Gestalt

$$\frac{a_mx^m + \dots + a_1x + a_0}{b_nx^n + \dots + b_1x + b_0}, \quad m, n \geq 0,$$

mit $a_0, \dots, a_m, b_0, \dots, b_n \in \mathbb{Q}$ und $b_n \neq 0$. Die Menge \mathbb{M} dieser Funktionen mit der üblichen Addition und Multiplikation bildet einen Körper. ◀

Aus den Axiomen *folgt*, dass die neutralen und die inversen Elemente eindeutig sind. Dies muss also nicht explizit gefordert werden.

Satz *In einem Körper sind die neutralen und inversen Elemente eindeutig bestimmt.* ✕

◀◀◀ Sei \tilde{n} ein weiteres neutrales Element der Addition. Dann gilt (A-2) sowohl für n als auch für \tilde{n} . Zusammen mit (A-1) ergibt sich hieraus

$$\tilde{n} = \tilde{n} + n = n + \tilde{n} = n,$$

also $\tilde{n} = n$. Damit ist die Eindeutigkeit des neutralen Elementes gezeigt.

Ist \tilde{x} neben \bar{x} ein weiteres additiv Inverses zu x , so folgt aus $x + \bar{x} = n$ und $x + \tilde{x} = n$ sowie (A-1)

$$\tilde{x} = \tilde{x} + n = \tilde{x} + (x + \bar{x}) = \bar{x} + (x + \tilde{x}) = \bar{x} + n = \bar{x}.$$

Entsprechend argumentiert man für die Multiplikation. ▶▶▶

Satz *In einem Körper \mathbb{K} besitzt jede Gleichung*

(i) $a + x = b$ *die eindeutige Lösung* $x = \bar{a} + b$,

(ii) $ax = b$ *mit* $a \neq 0$ *die eindeutige Lösung* $x = a'b$. ✕

◀◀◀ (i) Wegen

$$a + (\bar{a} + b) = (a + \bar{a}) + b = n + b = b$$

ist $x = \bar{a} + b$ eine Lösung der Gleichung $a + x = b$. Ist \tilde{x} eine weitere Lösung dieser Gleichung, so folgt nach Addition von \bar{a} , dass

$$\bar{a} + (a + \tilde{x}) = \bar{a} + b.$$

Auf der linken Seite steht aber

$$\bar{a} + (a + \tilde{x}) = (\bar{a} + a) + \tilde{x} = n + \tilde{x} = \tilde{x}.$$

Wegen der Eindeutigkeit des inversen Elementes ist also $\tilde{x} = \bar{a} + b = x$. — Für (ii) argumentiert man analog. ▶▶▶

■ Rechenregeln

Es folgen einige elementare Rechenregeln, die wir von den rationalen Zahlen aus der Schule kennen, die aber tatsächlich in jedem beliebigen Körper gelten.

3 Rechenregeln für Körper *In einem Körper \mathbb{K} gilt:*

- (i) $\bar{\bar{x}} = x$,
- (ii) $n \cdot x = n$,
- (iii) $\bar{e} \cdot x = \bar{x}$,
- (iv) $(x')' = x$ für $x \neq n$,
- (v) $xy = n \Rightarrow x = n \vee y = n$. \times

««« (i) Aus

$$\bar{x} + x = x + \bar{x} = n$$

folgt, dass x das additive Inverse zu \bar{x} ist. Also ist $\bar{\bar{x}} = x$.

(ii) Es ist $n = n + n$, und mit dem Distributivgesetz

$$n \cdot x = (n + n) \cdot x = n \cdot x + n \cdot x.$$

Addition des additiv Inversen von $n \cdot x$ auf beiden Seiten ergibt $n = n \cdot x$.

(iii) Mit (ii) ist

$$n = n \cdot x = (e + \bar{e}) \cdot x = e \cdot x + \bar{e} \cdot x = x + \bar{e} \cdot x.$$

Also ist $\bar{e} \cdot x$ das additiv Inverse zu x , also \bar{x} .

(iv) Analog zu (i).

(v) Sei $xy = n$. Ist $x = n$, so sind wir fertig. Ist $x \neq n$, so können wir die Gleichung mit x' multiplizieren, und mit (ii) folgt $y = n \cdot x' = n$. \gggg

Bis jetzt haben wir sehr abstrakt über Körper gesprochen, um deren elementare Eigenschaften ohne jede vorgefasste Vorstellung von Zahlen und deren Arithmetik aus den Axiomen abzuleiten. Im Folgenden beschäftigen wir uns allerdings vor allem mit den reellen Zahlen. Daher identifizieren wir nun

$$\begin{aligned} n &\rightsquigarrow 0, & \bar{x} &\rightsquigarrow -x, \\ e &\rightsquigarrow 1, & x' &\rightsquigarrow x^{-1} = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Regel (i) wird damit zu $-(-x) = x$, und Regel (iii) zu $(-1) \cdot x = -x$. Beides zusammen ergibt die bekannte Regel

$$(-1) \cdot (-1) = -(-1) = 1.$$

Dies ist also kein Mysterium, sondern Konsequenz der Axiome.

Wegen (v) ist ferner ein Produkt nur dann 0, wenn wenigstens ein Faktor 0 ist. Man sagt, ein Körper ist *nullteilerfrei*.

Ferner vereinbart man die Schreibweisen

$$x - y := x + (-y) = x + \bar{y},$$

und

$$\frac{x}{y} := x/y := xy^{-1} = xy'.$$

Dies führt zu den üblichen

► *Regeln des Bruchrechnens* Es gilt zum Beispiel

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}, \quad \text{falls } bd \neq 0.$$

Denn aus den Axiomen folgt

$$\begin{aligned} (ab^{-1} + cd^{-1})(bd) &= ab^{-1}bd + cd^{-1}bd \\ &= ab^{-1}bd + cd^{-1}db = ad + bc. \end{aligned}$$

Somit ist $ab^{-1} + cd^{-1} = (ad + bc)(bd)^{-1}$, und das ist die Behauptung. ◀

2.2

Die Anordnungsaxiome

Reelle Zahlen kann man nicht nur addieren und multiplizieren, man kann sie auch hinsichtlich ihrer Größe vergleichen. Sie bilden eine *total geordnete Menge*. — Die folgende Definition entspricht der Charakterisierung einer totalen Ordnung im Trichotomiesatz 1.8.

Definition Eine *total geordnete Menge* ist eine Menge M mit einer Relation, üblicherweise mit $<$ bezeichnet, mit folgenden Eigenschaften:

(i) *Trichotomie*: Für je zwei Elemente $a, b \in M$ gilt genau eine der Aussagen

$$a < b, \quad a = b, \quad b < a.$$

(ii) *Transitivität*: Für $a, b, c \in M$ gilt

$$a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c. \quad \times$$

Genauer ist eine total geordnete Menge ein *Paar* $(M, <)$, bestehend aus einer Menge M und einer totalen Ordnung $<$ auf ihr. Ist klar, welche Ordnung gemeint sind, spricht man einfach von der *total geordneten Menge* M .

► *Beispiele* A. Die Mengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ mit dem üblichen $<$ sind total geordnet.

B. Die Potenzmenge einer Menge mit mindestens zwei Elementen ist bezüglich \subseteq *nicht* total geordnet. ◀

Eine totale Ordnung eines *Körpers* ist allerdings nur interessant, wenn sie sich mit den Körperoperationen verträgt. Dies fordern die folgenden Axiome.

Anordnungsaxiome Ein Körper \mathbb{K} heißt *angeordnet*, wenn er durch eine Relation $<$ total geordnet wird, so dass für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gilt:

$$(O-1) \quad a < b \Rightarrow a + c < b + c,$$

$$(O-2) \quad 0 < a \wedge 0 < b \Rightarrow 0 < ab. \quad \times$$

Ein *angeordneter Körper* ist also genauer ein *Quadrupel* $(\mathbb{K}, +, \cdot, <)$ aus einem Körper \mathbb{K} mit Addition $+$, Multiplikation \cdot und totaler Ordnung $<$. Sind alle diese Bestandteile aus dem Kontext klar, sprechen wir einfach vom *angeordneten Körper* \mathbb{K} .

► **Beispiel** A. Der Körper $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}_2$ kann *nicht* angeordnet werden. Denn wäre $0 < 1$, so wäre wegen (O-1) auch

$$1 = 0 + 1 < 1 + 1 = 0,$$

ein Widerspruch. Dasselbe geschieht mit der Annahme $1 < 0$.

B. Der Körper \mathbb{Q} mit der üblichen Ordnung ist angeordnet.

C. Im Körper \mathbb{M} der rationalen Funktionen mit rationalen Koeffizienten $_2$ wird eine totale Ordnung definiert, wenn man Funktionen mit $a_n b_m > 0$ als positiv definiert $_{A-15}$.

D. Der Körper \mathbb{C} kann nicht angeordnet werden $_{A-14}$. ◀

Noch etwas Notation und Terminologie. Man definiert

$$a \leq b \quad :\Leftrightarrow \quad a < b \vee a = b$$

sowie $a > b$ und $a \geq b$ in offensichtlicher Weise. Ein Element $a \in \mathbb{K}$ heißt

- *positiv*, falls $a > 0$,
- *nichtnegativ*, falls $a \geq 0$,
- *nichtpositiv*, falls $a \leq 0$, und
- *negativ*, falls $a < 0$.

Dies dürfte nicht weiter überraschen.

Es folgen einige Rechenregeln für Ungleichungen in angeordneten Körpern, die für die reellen Zahlen ebenfalls wohlvertraut sind.

Rechenregeln In einem angeordneten Körper \mathbb{K} gilt:

- (i) $a > b \Leftrightarrow a - b > 0 \Leftrightarrow -a < -b$,
- (ii) $a > b \wedge c > 0 \Rightarrow ac > bc$,
- (iii) $a > b \wedge c < 0 \Rightarrow ac < bc$,
- (iv) $a \neq 0 \Rightarrow a^2 := aa > 0$,
- (v) $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$,
- (vi) $1 > 0$. \times

⟨⟨⟨ (i) Addition von $-b$ mit (O-1) ergibt

$$a > b \Rightarrow a - b > b - b = 0.$$

Addition von $-a$ mit (O-1) ergibt dann

$$a - b > 0 \Rightarrow -b > -a.$$

Die umgekehrten Implikationen erhält man analog.

- (ii) Mit (i) ist $a - b > 0$. Mit $c > 0$ und (O-2) folgt

$$(a - b)c = ac - bc > 0$$

und damit $ac > bc$.

(iii) Mit $c < 0$ ist $-c > 0$ wegen (i) und somit $-ac > -bc$ mit (ii). Nochmalige Anwendung von (i) liefert die Behauptung.

- (iv) Ist $a \neq 0$, so ist entweder $a > 0$ oder $a < 0$. Im ersten Fall folgt

$$a^2 = aa > 0a = 0$$

mit (ii). Dasselbe erhält man im zweiten Fall mit (iii).

(v) Wäre $a > 0$ und $a^{-1} \leq 0$, so wäre wegen (iii) auch $aa^{-1} = 1 \leq 0$, ein Widerspruch.

- (vi) Dies folgt aus (iv) mit $a = 1$ und $1 \cdot 1 = 1$. \gggg

Wir müssen also $1 > 0$ nicht als Axiom fordern. Dies ist vielmehr bereits eine logische Folge der Axiome.

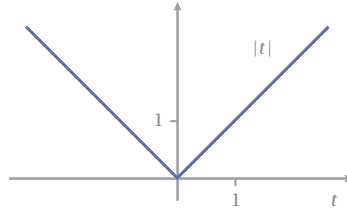
■ Betrag

Definition In einem angeordneten Körper \mathbb{K} ist der **Betrag** $|a|$ eines Elementes definiert durch

$$|a| := \begin{cases} a & \text{für } a \geq 0, \\ -a & \text{für } a < 0. \end{cases} \quad \times$$

Abb 1

Graph der Betragsfunktion



Der Betrag ist also eine Funktion

$$|\cdot| : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, \quad a \mapsto |a|.$$

Für ihn gelten die folgenden Rechenregeln.

4 Rechenregeln für den Betrag *In einem angeordneten Körper gilt:*

- (i) $|a| = |-a| \geq 0$,
- (ii) $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$,
- (iii) $|a| \geq a \geq -|a|$,
- (iv) $|ab| = |a| |b|$,
- (v) $|a| \leq c \Leftrightarrow -c \leq a \leq c$. ✕

⟨⟨⟨ (i) Für $a > 0$ ist $-a < 0$ und somit

$$|a| = a = -(-a) = |-a| > 0.$$

Für $a < 0$ ist $-a > 0$ und deshalb

$$|a| = -a = |-a| > 0.$$

Und für $a = 0$ ist $|0| = 0 = |-0|$.

(ii) *Per definitionem* gilt $|0| = 0$. Ist andererseits $a \neq 0$, so ist auch $-a \neq 0$, und damit $|a| \neq 0$.

(iii) Für $a \geq 0$ ist

$$|a| = a \geq 0 \geq -a = -|a|,$$

und für $a \leq 0$ ist

$$|a| = -a \geq 0 \geq a = -|a|.$$

(iv) Dies zeigt man ebenso mit den entsprechenden Fallunterscheidungen.

(v) Mit (iii) folgt aus $|a| \leq c$ sowohl $a \leq c$ also auch $-c \leq -|a| \leq a$, also

$$-c \leq a \leq c.$$

Umgekehrt folgt hieraus $a \leq c$ und $-a \leq c$, also auch $|a| \leq c$. ⟩⟩⟩

Bemerkung Aussage (v) wird oft angewendet in Form

$$|x - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon. \quad \rightarrow$$

Die Bezeichnung für den folgenden Satz wird sich erst im Kontext der komplexen Zahlen erklären ^{4.2}. Dort existiert eine ähnliche Betragsfunktion, auch wenn \mathbb{C} nicht angeordnet ist.

5 Dreiecksungleichung *In einem angeordneten Körper gilt*

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

sowie

$$||a| - |b|| \leq |a - b|. \quad \times$$

««« Aus $-|a| \leq a \leq |a|$ und $-|b| \leq b \leq |b|$ folgt

$$-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|,$$

mit (v) somit $|a + b| \leq |a| + |b|$. Hieraus folgt weiter

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b|$$

und damit

$$|a| - |b| \leq |a - b|.$$

Vertauschen wir a und b , so erhalten wir

$$|b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|.$$

Da einer der beiden linken Seiten gleich $||a| - |b||$ sein muss, folgt auch die zweite Ungleichung. »»»

2.3

Das Vollständigkeitsaxiom

Bisher haben wir über die reellen Zahlen nichts gesagt, was nicht auch für die rationalen Zahlen gilt – sowohl \mathbb{Q} als auch \mathbb{R} sind *angeordnete Körper*. Die rationalen Zahlen haben aber den großen Nachteil, dass es von ihnen ›nicht genug gibt‹. So gibt es, wie wir gesehen haben ^{1.6}, keine Wurzel aus 2. Man sagt auch, sie sind ›nicht vollständig‹.

Die Vollständigkeit eines angeordneten Körpers definieren wir durch die Existenz des Supremums und Infimums nichtleerer beschränkter Teilmengen. Diese Begriffe sind in jeder total geordneten Menge erklärt.

Dazu ist es bequem, die $<$ -Notation zu erweitern. Für Teilmengen A, B und Elemente b einer total geordneten Menge erklären wir

$$A < b \quad :\Leftrightarrow \quad a < b \text{ für alle } a \in A,$$

$$A < B \quad :\Leftrightarrow \quad a < b \text{ für alle } a \in A \text{ und } b \in B.$$

Entsprechend sind $A \leq c$ und $A \leq B$ erklärt.

Definition Sei M eine total geordnete Menge. Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt *nach oben beschränkt*, wenn es ein $b \in M$ gibt, so dass $A \leq b$. Jedes solche $b \in M$ heißt eine *obere Schranke* von A . \times

Gibt es unter allen oberen Schranken einer Menge eine kleinste, so nennt man sie das *Supremum* dieser Menge. Die genaue Definition ist folgende. Dabei steht $\not\leq$ für *nicht kleiner gleich*.

Definition Sei M eine total geordnete Menge und $A \subset M$. Gilt $A \leq b$, aber $A \not\leq \beta$ für jedes $\beta \in M$ mit $\beta < b$, so heißt b die *kleinste obere Schranke* oder das *Supremum* von A und wird mit $\sup A$ bezeichnet. \times

Das Supremum von A ist also eine obere Schranke von A , die nicht mehr verbessert werden kann. Für jede obere Schranke b von A gilt somit

$$A \leq \sup A \leq b,$$

und für jedes $\beta \in M$ mit $\beta < \sup A$ existiert ein $x \in A$ mit $\beta < x$.

Ein Supremum muss nicht existieren. Wenn es aber existiert, so ist es eindeutig A-18. Es wird aber nicht verlangt, dass dieses selbst zur Menge gehört.

Analog werden *nach unten beschränkt* und *untere Schranke* von A definiert. Existiert eine *größte untere Schranke*, so wird sie *Infimum* von A genannt und mit $\inf A$ bezeichnet. Für jede untere Schranke a von A gilt dann

$$a \leq \inf A \leq A,$$

und für jedes $\alpha \in M$ mit $\alpha > \inf A$ existiert ein $x \in A$ mit $x < \alpha$.

6 \blacktriangleright **Beispiele** A. Die leere Menge ist in jeder total geordneten Menge nach oben und unten beschränkt.

B. Jedes abgeschlossene Intervall – siehe Abschnitt 6 –

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \quad a \leq b,$$

ist nach oben und unten beschränkt, und es ist

$$a = \inf [a, b], \quad b = \sup [a, b].$$

In diesem Fall gehören Supremum und Infimum also ebenfalls zu $[a, b]$.

c. Für jedes offene Intervalle

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \quad a < b,$$

gilt ebenfalls $a = \inf(a, b)$ und $b = \sup(a, b)$. In diesem Fall gehören diese aber *nicht* zu dem Intervall (a, b) . ◀

Mit dem Begriff des Supremums formulieren wir nun das

- 7 **Vollständigkeitsaxiom** Ein angeordneter Körper \mathbb{K} heißt *vollständig*, wenn jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge von \mathbb{K} ein Supremum besitzt. ✕

Die Bedeutung dieses Axioms illustrieren wir im nächsten Abschnitt. Damit haben wir nun alle Axiome versammelt, die wir für die Beschreibung der reellen Zahlen benötigen.

Charakterisierung der reellen Zahlen Die reellen Zahlen bilden einen vollständigen, angeordneten Körper, der mit \mathbb{R} bezeichnet wird. ✕

In Abschnitt 3.3 skizzieren wir noch, dass alle vollständigen, angeordneten Körper zueinander *isomorph*, also *gleichgestaltig* sind und somit miteinander identifiziert werden können. Daher ist es gerechtfertigt, von *einem* solchen Körper zu sprechen und ihn mit einem einzigen Symbol, \mathbb{R} , zu bezeichnen.

2.4

Wurzeln

Eine erste Folgerung aus dem Vollständigkeitsaxiom ist die Existenz einer Wurzel zu jeder positiven reellen Zahl. Die reellen Zahlen leisten also das, was die rationalen Zahlen nicht leisten. Gleichzeitig ergibt sich daraus, dass das Vollständigkeitsaxiom in \mathbb{Q} *nicht* gilt.

- 8 **Satz und Definition** Zu jeder reellen Zahl $a > 0$ existiert genau eine reelle Zahl $w > 0$ mit $w^2 = a$. Diese wird mit \sqrt{a} bezeichnet und *Quadratwurzel* oder kurz *Wurzel* von a genannt. Für diese reelle Zahl gilt also

$$w = \sqrt{a} \Leftrightarrow w^2 = a \wedge w > 0. \quad \text{✕}$$

⋄⋄⋄ Für reelle Zahlen $u > 0$ und $v > 0$ gilt A-19

$$u < v \Leftrightarrow u^2 < v^2. \quad (1)$$

Zwei verschiedene positive reelle Zahlen können daher nicht Wurzel derselben Zahl $a > 0$ sein. Dies zeigt die *Eindeutigkeit* der Wurzel.

Um ihre Existenz zu zeigen, bemerken wir zunächst, dass

$$\sqrt{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad a > 0,$$

denn die Quadrate beider Seiten ergeben $1/a$. Die Wurzel von $1/a$ ergibt sich also aus der Wurzel von a . Daher können wir uns im Folgenden auf den Fall $a \geq 1$ beschränken.

Sei also $a \geq 1$. Betrachte die Menge

$$A := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \wedge x^2 \leq a\}.$$

Diese Menge ist nicht leer, denn wegen $0 \leq 1 = 1^2 \leq a$ gilt $1 \in A$. Sie ist auch beschränkt, denn für $a \geq 1$ ist $x^2 \leq a \leq a^2$, folglich auch $x \leq a$ wegen (1) und damit $A \leq a$. Also existiert aufgrund des Vollständigkeitsaxioms die reelle Zahl

$$w = \sup A.$$

Zu zeigen ist, dass $w^2 = a$.

Dazu betrachten wir die reelle Zahl

$$v = w - \frac{w^2 - a}{w + a}. \quad (2)$$

Eine kurze Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} v^2 &= w^2 - 2w \frac{w^2 - a}{w + a} + \frac{(w^2 - a)^2}{(w + a)^2} \\ &= a + (w^2 - a) - 2w \frac{w^2 - a}{w + a} + \frac{(w^2 - a)^2}{(w + a)^2} \\ &= a + \frac{w^2 - a}{(w + a)^2} \left\{ (w + a)^2 - 2w(w + a) + (w^2 - a) \right\}. \end{aligned}$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer vereinfacht sich zu $a^2 - a$. Wir erhalten also

$$v^2 = a + (w^2 - a)c \quad \text{mit} \quad c = \frac{a^2 - a}{(w + a)^2} \geq 0. \quad (3)$$

Wäre nun $w^2 - a > 0$, so folgt mit (2) und (3)

$$v < w, \quad a \leq v^2.$$

Damit aber wäre v eine bessere obere Schranke von A als dessen Supremum w , ein Widerspruch. Wäre andererseits $w^2 - a < 0$, so folgt

$$v > w, \quad v^2 \leq a.$$

Damit wäre $v \in A$ und w keine obere Schranke von A , ebenfalls ein Widerspruch. Bleibt nur $w^2 - a = 0$, also $w^2 = a$, womit auch die Existenz der Wurzel aus a gezeigt ist. \gggg

Bemerkung Auf exakt dieselbe Weise kann man im angeordneten Körper \mathbb{Q} für die Menge

$$W = \{r \in \mathbb{Q} : r \geq 0 \wedge r^2 < 2\}$$

argumentieren. Hätte diese Menge ein Supremum in \mathbb{Q} , so wäre dies eine rationale Wurzel von 2. Da es eine solche aber nicht gibt, besitzt diese Menge in \mathbb{Q} kein Supremum. Somit gilt dort auch Vollständigkeitsaxiom *nicht*. \rightarrow

2.5

Die erweiterte Zahlengerade

Ist eine nichtleere Teilmenge A der reellen Zahlen nach oben beschränkt, so existiert deren Supremum als ein Element in \mathbb{R} . Dafür schreibt man auch gerne

$$\sup A < \infty.$$

Ist dagegen A nach oben *unbeschränkt*, so schreibt man dafür auch

$$\sup A = \infty.$$

Analoges gilt für $\inf A > -\infty$ und $\inf A = -\infty$.

Auch in vielen anderen Situationen sind die Symbole ∞ und $-\infty$ nützlich. Um deren Verwendung zu regeln, treffen wir folgende Vereinbarung.

Definition Unter der *erweiterten Zahlengerade* versteht man die Menge

$$\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

zusammen mit der Vereinbarung, dass $-\infty < x < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$. \times

Das Rechnen mit den Symbolen ∞ und $-\infty$ ist dagegen nur in einigen Fällen sinnvoll erklärbar_{5.6}. Es ist nicht möglich, $\bar{\mathbb{R}}$ zu einem Körper zu machen.

Die Definition des Supremums $\sup A$ einer Menge A beinhaltet, dass dieses von unten durch Elemente in A beliebig gut approximiert werden kann. Der folgende Satz formuliert diese Eigenschaft gleichermaßen für beschränkte und unbeschränkte Mengen. Vereinbaren wir außerdem

$$\sup \emptyset := -\infty, \quad \inf \emptyset := \infty,$$

so gilt er sogar für die leere Menge.

Abb 2

Zum Approximationssatz



- 9 **Approximationssatz** Sei A eine beliebige Teilmenge von \mathbb{R} . Dann existiert zu jeder reellen Zahl $\beta < \sup A$ ein $x \in A$ mit

$$\beta < x \leq \sup A,$$

und zu jeder reellen Zahl $\alpha > \inf A$ existiert ein $x \in A$ mit

$$\inf A \leq x < \alpha. \quad \times$$

«»» Wir betrachten das Supremum. Für $A = \emptyset$ ist nichts zu zeigen, da es keine reelle Zahl $\beta < \sup A = -\infty$ gibt. Sei also $A \neq \emptyset$ und $\beta < \sup A$ eine beliebige reelle Zahl. Ist $\sup A < \infty$, so muss es aufgrund der Definition des Supremums ein $x \in A$ mit $\beta < x \leq \sup A$ geben. Ist dagegen $\sup A = \infty$, so ist A nach oben unbeschränkt, und es muss erst recht ein $x \in A$ mit $\beta < x$ geben. »»»

Ist also $A \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge, so wird jede reelle Zahl unterhalb von $\sup A$ durch ein Element in A übertroffen. Man kann also $\sup A$ *innerhalb* von A beliebig gut approximieren – daher der Name *Approximationssatz*. Später werden wir zeigen, dass es sogar *Folgen* von Punkten in A gibt, die gegen das Supremum *konvergieren*. — Dasselbe gilt entsprechend für das Infimum.

2.6

Intervalle

Die wichtigsten Teilmengen der reellen Zahlen sind die Intervalle.

Definition Ein *Intervall* ist eine Teilmenge der reellen Zahlen, die mit je zwei Punkten¹ auch alle dazwischen liegenden Punkte enthält. \times

► **Beispiele** A. Die leere Menge \emptyset ist ein Intervall, denn die Voraussetzung, zwei Punkte in ihr zu finden, ist schon nicht erfüllt.

B. Ebenso ist jede 1-Punkt-Menge $\{a\}$ ein Intervall.

C. Enthält ein Intervall I wenigstens zwei Punkte $u < v$, so enthält es auch jede reelle Zahl a mit $u \leq a \leq v$. ◀

¹ *Punkt* meint hier also *Zahl*. Das ist eine übliche Redeweise.

Abb 3 Verschiedene Intervalle



Für ein Intervall $I \neq \emptyset$ definieren wir

$$a = \inf I, \quad b = \sup I$$

als dessen *linken* respektive *rechten Endpunkt*. Diese Punkte gehören zur *erweiterten* Zahlengerade \mathbb{R} , die Fälle

$$a = -\infty, \quad b = \infty$$

sind also zugelassen. Ebenso kann $a = b$ sein. Ist $a < b$, so folgt aus dem Approximationssatz \mathfrak{g} und der Definition des Intervalls, dass auch die Menge $\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ zu I gehört. Intervalle mit denselben Endpunkten unterscheiden sich daher nur darin, welche Endpunkte dazu gehören und welche nicht.

Definition Ein nichtleeres Intervall I heißt *links abgeschlossen*, falls es seinen linken Endpunkt enthält, andernfalls heißt es *links offen*. Entsprechend sind *rechts abgeschlossen* und *rechts offen* erklärt. Schließlich heißt ein Intervall *nichtentartet*, wenn es mehr als einen Punkt enthält. \times

Es gibt somit vier Arten von Intervallen: das *offene Intervall*

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \quad -\infty \leq a \leq b \leq \infty,$$

mit der Vereinbarung $(a, a) = \emptyset$; das *abgeschlossene Intervall*

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \quad -\infty < a \leq b < \infty,$$

mit der Vereinbarung $[a, a] = \{a\}$; und die *halboffenen Intervalle*

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}, \quad -\infty \leq a \leq b < \infty,$$

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \quad -\infty < a \leq b \leq \infty.$$

Dabei sind die Symbole ∞ und $-\infty$ genau dann zugelassen, wenn das betreffende Intervallende offen ist. Daher sind alle diese Intervalle Teilmengen von \mathbb{R} und enthalten weder ∞ noch $-\infty$.

- ▶ **Beispiel** A. Das leere Intervall \emptyset ist sowohl offen wie abgeschlossen. ²
 B. Jede Ein-Punkt-Menge $\{a\} \subset \mathbb{R}$ ist ein abgeschlossenes Intervall.
 C. $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ist ein offenes Intervall.
 D. $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist *kein* Intervall.

E. Jedes von $(-\infty, \infty)$ verschiedene *unbeschränkte* Intervall ist von einem der vier Formen

$$(a, \infty), [a, \infty), (-\infty, b), (-\infty, b], \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad \blacktriangleleft$$

Die *Länge* eines nichtleeren Intervalls I ist definiert als

$$|I| := \sup I - \inf I.$$

Dies wird vereinbarungsgemäß ∞ genau dann, wenn I unbeschränkt ist.

- ▶ A. Ein Intervall I ist nichtentartet genau dann, wenn $|I| > 0$.
 B. Es ist $|[a, a]| = 0$, und für $a < b$ gilt

$$|[a, b]| = |(a, b)| = b - a.$$

C. Mit der Vereinbarungen von Abschnitt 5 ist

$$|(-\infty, c)| = c - (-\infty) = c + \infty = \infty, \quad c \in \mathbb{R}. \quad \blacktriangleleft$$

² ›Offen‹ und ›abgeschlossen‹ schließen sich also nicht gegenseitig aus, im Gegensatz zum umgangssprachlichen Gebrauch.

Aufgaben

- 1 Welche Aussagen sind wahr?
 - a. Die reellen Zahlen sind vollständig, weil es mehr reelle als rationale Zahlen gibt.
 - b. In einer beschränkten Menge $A \subset \mathbb{R}$ existiert immer ein Element $a = \inf A$.
 - c. Ein abgeschlossenes Intervall ist beschränkt.
 - d. Aus $ab = -ab$ folgt $b = 0$.
 - e. Es gibt kein leeres Intervall.
 - f. In \mathbb{Q} besitzt keine Teilmenge ein Supremum.
 - g. \mathbb{R} ist ein vollständiger Körper.
- 2 In einem Körper gilt $\bar{x}\bar{y} = \overline{xy}$.
- 3 Warum hat in einem Körper n kein multiplikativ Inverses?
- 4 Auf der Menge $\mathbb{F}_3 = \{o, e, s\}$ seien die Operationen \oplus und \odot durch die Tafeln

\oplus	o	e	s	\odot	o	e	s
o	o	e	s	o	o	o	o
e	e	s	o	e	o	e	s
s	s	o	e	s	o	s	e

definiert. Damit wird \mathbb{F}_3 ein Körper.

- 5 Auf der Menge $\mathbb{F}_4 = \{o, e, s, t\}$ seien die Operationen \oplus und \odot durch die Tafeln

\oplus	o	e	s	t	\odot	o	e	s	t
o	o	e	s	t	o	o	o	o	o
e	e	o	t	s	e	o	e	s	t
s	s	t	o	e	s	o	s	t	e
t	t	s	e	o	t	o	t	e	s

definiert. Damit wird \mathbb{F}_4 ein Körper.

- 6 Die Menge

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a \oplus b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

bildet einen Körper mit den Operationen

$$(a \oplus b\sqrt{2}) \boxplus (c \oplus d\sqrt{2}) := (a + c) \oplus (b + d)\sqrt{2},$$

$$(a \oplus b\sqrt{2}) \boxtimes (c \oplus d\sqrt{2}) := (ac + 2bd) \oplus (ad + bc)\sqrt{2}.$$

Die neutralen Elemente sind $n = 0 \oplus 0\sqrt{2}$ und $e = 1 \oplus 0\sqrt{2}$, und das multiplikativ Inverse eines Elementes ungleich n ist

$$(a \oplus b\sqrt{2})' = \frac{a}{a^2 - 2b^2} \oplus \frac{-b}{a^2 - 2b^2} \sqrt{2}.$$

Der Nenner verschwindet nicht, da $\sqrt{2}$ nicht rational ist ^{1.6}. — Hier gibt es also drei verschiedene Additionen: $+$ in \mathbb{Q} , \boxplus in $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, und \oplus als Notation für die Elemente von $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Erst in \mathbb{R} sind diese drei Operationen identisch.

- 7 Der Restklassenring \mathbb{Z}_p A-1.25 bildet einen Körper genau dann, wenn p prim ist. Somit ist $\mathbb{Z}_4 \neq \mathbb{F}_4$.
- 8 Ist \mathbb{R} mit den beiden Operationen $a \oplus b := a + b$ und $a \odot b := ab/2$ ein Körper?
- 9 Sei \mathbb{K} ein angeordneter Körper und $1 + 1 = c$. Zeigen sie:
- a. $0 < 1 < c$.
- b. Ist $a < b$, so ist $a < (a + b)/c < b$.
- 10 Zu jedem $t \in [a, b]$ mit $a < b$ gibt es genau ein $\lambda \in [0, 1]$, so dass $t = (1 - \lambda)a + \lambda b$.
- 11 Aus $b > 0$, $d > 0$ und $a/b < c/d$ folgt

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

- 12 Sei \mathbb{K} ein Körper und $a \in \mathbb{K}$. Untersuchen sie die Abbildung

$$\tau_a: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, \quad \tau_a(x) = x - a$$

auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

- 13 Hat ein Körper nur endlich viele Elemente, so kann er nicht angeordnet werden.
- 14 Existieren in einem Körper zwei Elemente a und b mit $a^2 + b^2 = -1$, so kann er nicht angeordnet werden. Geben Sie entsprechende Beispiele für die Körper \mathbb{F}_3 A-4, \mathbb{F}_4 A-5 und \mathbb{C} in Kapitel 4.
- 15 Eine Teilmenge P eines Körpers \mathbb{K} heißt *Positivbereich*, wenn gilt:
- (P-1) Für jedes $a \in \mathbb{K}$ gilt genau eine der drei Aussagen $a \in P$, $a = 0$, $-a \in P$.
- (P-2) Mit $a, b \in P$ ist auch $a + b \in P$ und $ab \in P$.
- Man zeige: Ist $P \subset \mathbb{K}$ ein Positivbereich, so wird \mathbb{K} durch

$$a < b \quad :\Leftrightarrow \quad b - a \in P$$

ein angeordneter Körper. Ist \mathbb{K} ein angeordneter Körper, so ist $P := \{a \in \mathbb{K} : a > 0\}$ ein Positivbereich.

- 16 Man zeige, dass es in \mathbb{R} nur einen Positivbereich P A-15 gibt.
- 17 Sei $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ positiv mit $\sigma^2 \in \mathbb{Q}$, und setze

$$\mathbb{Q}(\sigma) := \{a + b\sigma : a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

a. $\mathbb{Q}(\sigma)$ mit der von den reellen Zahlen geerbten Addition und Multiplikation bildet einen Körper, genauer einen *Unterkörper* von \mathbb{R} .

b. In diesem Körper gibt es zwei Positivbereiche 15,

$$P_+ := \{a + b\sigma : a + b\sigma > 0\}, \quad P_- := \{a + b\sigma : a - b\sigma > 0\}.$$

c. $\mathbb{Q}(\sigma)$ ist nicht vollständig.

- 18 Zeigen sie die Eindeutigkeit des Supremums einer beschränkten Teilmenge von \mathbb{R} .
- 19 Für zwei Elemente $a > 0$ und $b > 0$ eines angeordneten Körpers gilt

$$a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2.$$

- 20 Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\sqrt{x^2} = |x|$.

- 21 Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $x = \sup \{t \in \mathbb{R} : t < x\}$.
- 22 Seien A und B beliebige Teilmengen von \mathbb{R} . Gilt $A \leq B$, so folgt $\sup A \leq \inf B$.
- 23 Sei $V \subset \mathbb{R}$ beschränkt und $W \subset V$ nicht leer. Dann gilt $\inf V \leq \inf W \leq \sup W \leq \sup V$.
- 24 Für beliebige Teilmengen A, B von \mathbb{R} sei

$$-A := \{-a : a \in A\},$$

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

Sind A und B nichtleer und beschränkt, so gilt

$$\sup(-A) = -\inf A,$$

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

Gilt Letzteres auch für die Multiplikation?

- 25 Seien M_1, M_2, \dots nichtleere Teilmengen von \mathbb{R} und $M = \bigcup_{n \geq 1} M_n$. Dann gilt

$$\sup M = \sup_{n \geq 1} (\sup M_n).$$

- 26 Es sei $M \subset \mathbb{R}$ nicht leer und $\inf M > 0$. Dann ist die Menge

$$\tilde{M} := \{1/x : x \in M\}$$

nach oben beschränkt ist, und es gilt $\sup \tilde{M} = 1/\inf M$.

- 27 Seien U und V nichtleere Mengen und $f : U \times V \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\sup_{u \in U} \sup_{v \in V} f(u, v) = \sup_{v \in V} \sup_{u \in U} f(u, v),$$

aber

$$\sup_{u \in U} \inf_{v \in V} f(u, v) \leq \inf_{v \in V} \sup_{u \in U} f(u, v).$$

Geben Sie ein Beispiel, wo die strikte Ungleichung eintritt.

- 28 *Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel* Für $a, b \geq 0$ gilt

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

- 29 *Cauchyungleichung* Für reelle Zahlen a, b und $\varepsilon > 0$ gilt

$$2ab \leq \varepsilon a^2 + b^2/\varepsilon.$$

- 30 Für reelle Zahlen $a, b \neq 0$ gilt $\left| \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right| \geq 2$. Wann gilt Gleichheit?

- 31 Beweisen sie für reelle Zahlen a, b die Identitäten

$$\max\{a, b\} = \frac{a+b+|a-b|}{2}, \quad \min\{a, b\} = \frac{a+b-|a-b|}{2}.$$

Was gilt für $\max\{a, b\} - \min\{a, b\}$?

- 32 Für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$|a+b| + |a-b| \geq |a| + |b|$$

und

$$|a| + |b| + |c| + |a + b + c| \geq |a + b| + |b + c| + |c + a|$$

Wann gilt Gleichheit?

- 33 Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Welche Gestalt hat dann $\mathbb{R} \setminus I$?
- 34 Sei $A \subset \mathbb{R}$ eine beliebige Teilmenge. Dann gilt für jedes $s \in \mathbb{R}$ mit $\inf A < s < \sup A$

$$A \cap (s, \infty) \neq \emptyset, \quad A \cap (-\infty, s) \neq \emptyset.$$

- 35 Eine reelle, nicht rationale Zahl wird *irrational* genannt – was nicht mit *unvernünftig* zu übersetzen ist. Zeigen sie: Sind a, b, c, d rational mit $ad - bc \neq 0$, und ist x irrational mit $cx + d \neq 0$, so ist auch

$$z := \frac{ax + b}{cx + d}$$

irrational.

- 36 Zeigen sie, dass die Wurzelfunktion das Intervall $[0, \infty)$ bijektiv auf sich selbst abbildet und streng monoton steigt:

$$0 \leq a < b \Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}.$$

- 37 Seien $r \neq 0$ rational und z irrational. Zeigen sie, dass auch $r + z$ und rz irrational sind.

- 38 In \mathbb{R} sei eine Operation $*$ erklärt durch

$$a * b := a + b + \lambda ab$$

mit einem festen $\lambda \neq 0$.

- a. Die Operation $*$ ist kommutativ, assoziativ und besitzt ein neutrales Element.
b. Welche Elemente besitzen ein inverses Element?

- 39 *Intervallschachtelung* Sei \mathbb{K} ein angeordneter Körper. Eine Folge $(I_n)_{n \geq 1}$ nichtleerer abgeschlossener Intervalle in \mathbb{K} heißt *Intervallschachtelung*, wenn

- (i) $I_n \supset I_{n+1}$ für alle $n \geq 1$, und
(ii) zu jedem $\varepsilon > 0$ ein I_n existiert mit $|I_n| < \varepsilon$.

Dann ist \mathbb{K} vollständig genau dann, wenn zu jeder Intervallschachtelung $(I_n)_{n \geq 1}$ genau ein $a \in \mathbb{K}$ existiert mit

$$\bigcap_{n \geq 1} I_n = \{a\}.$$

- 40 *Dedekindsche Schnitte* Sei \mathbb{K} ein angeordneter Körper. Ein Paar (A, B) nichtleerer Teilmengen von \mathbb{K} heißt *dedekindscher Schnitt*, falls

$$A < B, \quad A \cup B = \mathbb{K}, \quad A \cap B = \emptyset.$$

Ein Element $c \in \mathbb{K}$ heißt *Schnittzahl* eines solchen Schnittes (A, B) , falls

$$A \leq c \leq B.$$

Dann ist \mathbb{K} vollständig genau dann, wenn jeder Dedekindsche Schnitt eine Schnittzahl besitzt.

3

Natürliche, ganze und rationale Zahlen

Die Existenz der reellen Zahlen setzen wir von nun an voraus. Jetzt geht es darum, unter diesen die natürlichen, die ganzen, und die rationalen Zahlen zu identifizieren.

Die natürlichen Zahlen sind uns von frühester Kindheit durch das Zählen von Objekten vertraut:

$$1 := 1,$$

$$2 := 1 + 1,$$

$$3 := 2 + 1 = 1 + 1 + 1,$$

und so weiter ...: von einer natürlichen Zahl gelangen wir zur nächsten, indem wir 1 addieren, *ad infinitum*. Auch wissen wir, dass

$$1 < 2 < 3 < \dots,$$

in Übereinstimmung mit den Anordnungsaxiomen. Dies gilt übrigens in *jedem* angeordneten Körper, denn wir brauchen ja nur die Information, dass $0 < 1$. Daraus ergibt sich, dass jeder angeordnete Körper seine eigene ›Version‹ der natürlichen Zahlen enthält.

Die additiv Inversen zu den natürlichen Zahlen zuzüglich der Null ergeben den Ring der ganzen Zahlen. Die Brüche aus allen ganzen Zahlen ergeben dann den Körper der rationalen Zahlen.

3.1

Natürliche Zahlen

Um das ›und so weiter‹ der Konstruktion der natürlichen Zahlen mathematisch zu präzisieren, führen wir folgenden Begriff ein.

Definition Eine Teilmenge J von \mathbb{R} heißt *induktiv*, wenn gilt:

(IN-1) $1 \in J$.

(IN-2) Ist $m \in J$, so ist auch $m + 1 \in J$. \times

Man kann auch $0 \in J$ statt $1 \in J$ fordern und damit die natürlichen Zahlen bei 0 beginnen lassen. Dies ist allein eine Frage der Konvention und mathematisch unerheblich.

- *Beispiele*
- A. Die Mengen \mathbb{R} ist induktiv.
 - B. Das Intervall $[1, \infty)$ ist induktiv.
 - C. Die Menge \mathbb{M} der rationalen Funktionen _{2.2} ist induktiv.
 - D. Die Menge \mathbb{P} aller Primzahlen ist nicht induktiv. ◀

Der Durchschnitt zweier und sogar beliebig vieler induktiver Mengen ist wieder eine induktive Menge, denn in *jeder* dieser Mengen sind die Bedingungen (IN-1) und (IN-2) erfüllt. Die kleinste solche Menge erhält man, indem man die Schnittmenge *aller* induktiven Teilmengen der reellen Zahlen bildet. Dies charakterisiert die natürlichen Zahlen als Teilmenge der reellen Zahlen.

Definition Die Menge \mathbb{N} der *natürlichen Zahlen* ist der Durchschnitt aller induktiven Teilmengen von \mathbb{R} . \times

Bezeichnet \mathcal{J} die Familie aller induktiven Teilmengen von \mathbb{R} , so schreibt man hierfür auch

$$\mathbb{N} := \bigcap_{J \in \mathcal{J}} J.$$

Die Menge \mathbb{N} enthält also genau diejenigen Elemente von \mathbb{R} , die in *jeder* induktiven Teilmenge von \mathbb{R} enthalten sind.

1 **Induktionssatz** Ist I eine induktive Teilmenge von \mathbb{N} , so ist $I = \mathbb{N}$. \times

◀◀◀ Nach Voraussetzung ist $I \subset \mathbb{N}$. Andererseits ist $I \in \mathcal{J}$ und damit auch $\mathbb{N} \subset I$. Also gilt $I = \mathbb{N}$. ▶▶▶

■ Vollständige Induktion

Der Induktionssatz bildet die Grundlage der vollständigen Induktion, die ebenfalls zu den fundamentalen Beweistechniken der Mathematik zählt. Die einfachste und am häufigsten gebrauchte Form ist das folgende

2 **Induktionsprinzip** Sei $A(n)$ eine Aussageform, für die gilt:

- (1) $A(1)$ ist wahr.
 - (2) Ist $A(n)$ wahr für irgendein $n \in \mathbb{N}$, so ist auch $A(n+1)$ wahr.
- Dann ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr. ✕

««« Beweis Sei

$$N := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr}\}.$$

Dann ist $1 \in N$ wegen (1), und gilt $n \in N$, so gilt auch $n+1 \in N$ wegen (2). Also ist N eine induktive Teilmenge von \mathbb{N} . Aufgrund des Induktionssatzes ₁ ist somit $N = \mathbb{N}$. »»»

Um eine Aussage $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen n mithilfe der vollständigen Induktion zu beweisen, ist also Folgendes zu tun.

- (1) *Induktionsanfang*: Zeige, dass $A(1)$ wahr ist.
- (2) *Induktionsschritt*: Nehme an, dass $A(n)$ für ein beliebiges $n \geq 1$ wahr ist. Folgere daraus, dass auch $A(n+1)$ wahr ist.

Dann ist die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen.

Das Induktionsprinzip bereitet erfahrungsgemäß anfangs Schwierigkeiten, hat es doch den Anschein, als würde man sich nach dem Münchhausenprinzip am eigenen Schopf aus dem Sumpf ziehen. Denn im Induktionsschritt nimmt man ja an, dass $A(n)$ wahr ist – also genau das, was man eigentlich erst noch beweisen will ...

Dem ist jedoch nicht so. Der Induktionsschritt geht nur von der *Hypothese* aus, dass $A(n)$ wahr ist, und leitet daraus ab, dass auch $A(n+1)$ wahr ist. Das ist etwas völlig anderes als die *Behauptung*, dass $A(n)$ wahr ist. Diese Argumentation wird auch erst durch den Induktionsanfang vollständig. Er ist zwar oft trivial, aber trotzdem unentbehrlich. Ohne ihn wäre *nichts* bewiesen.

Eine gerne gebrauchte Metapher für die vollständige Induktion ist das Erklimmen einer Leiter. Weiß man, wie man die *erste* Sprosse einer Leiter erklimmt, und weiß man weiter, wie man von einer *beliebigen* Sprosse zur *nächsten* gelangt, so kann man jede noch so hohe Leiter erklimmen ... zumindest ein Mathematiker kann das.

Die vollständige Induktion versteht man am Besten anhand von Beispielen. Daher zunächst zwei einfache Beispiele.

Satz Für alle $n \geq 1$ gilt

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Induktionsanfang: Für $n = 1$ reduziert sich die Behauptung auf

$$1 = \frac{1 \cdot 2}{2},$$

ist also richtig. — *Induktionsschluss:* Für ein beliebiges $n \geq 1$ setzen wir jetzt voraus, dass die behauptete Gleichung gilt. Dann erhalten wir für die ›nächste Sprosse der Leiter‹

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n+1) &= (1 + 2 + \dots + n) + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Also gilt die behauptete Gleichung auch für $n+1$, und wir sind fertig. ⟩⟩⟩

3 **Bernoullische Ungleichung** Für alle reellen Zahlen $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1+nx. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist

$$(1+x)^1 = 1+x = 1+1 \cdot x.$$

Dies gilt sogar für *alle* reellen x , und auch für $n = 0$. — *Induktionsschluss:* Für ein beliebiges $n \geq 1$ machen wir die *Induktionsannahme*, dass

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad x \geq -1.$$

Betrachte dann

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n.$$

Nun ist $1+x \geq 0$ für $x \geq -1$ - hier brauchen wir erst diese Annahme - und deshalb weiter mit der Induktionsannahme

$$(1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+x+nx+nx^2.$$

Nun ist aber $nx^2 \geq 0$. Daher folgt insgesamt

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+x+nx = 1+(n+1)x.$$

Damit ist die Induktion vollständig. ⟩⟩⟩

Es folgen einige elementare Tatsachen über die natürlichen Zahlen, die wir natürlich beweisen müssen.

4 **Rechenregeln** Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt:

- (i) $n \geq 1$,
- (ii) $n + m \in \mathbb{N}$, $nm \in \mathbb{N}$,
- (iii) $n = 1 \vee n - 1 \in \mathbb{N}$,
- (iv) $m < n \Rightarrow n - m \in \mathbb{N}$,
- (v) $m < n \leq m + 1 \Rightarrow n = m + 1$. \times

⟨⟨⟨ (i) Die Menge $\{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$ ist eine induktive Teilmenge von \mathbb{N} . Aufgrund des Induktionssatzes $_1$ ist sie gleich \mathbb{N} .

(ii) Fixiere $m \in \mathbb{N}$ und betrachte die Aussage

$$A(n) : n + m \in \mathbb{N}.$$

IA: Es gilt $A(1)$, da mit $m \in \mathbb{N}$ auch $m + 1 \in \mathbb{N}$. — Is: Gilt $A(n)$, so ist also $n + m \in \mathbb{N}$. Dann ist auch $(n + m) + 1 = (n + 1) + m \in \mathbb{N}$ und damit $A(n + 1)$ wahr. Somit gilt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $m \in \mathbb{N}$ beliebig war, ist die Aussage für alle $n, m \in \mathbb{N}$ bewiesen. — Die zweite Behauptung wird analog bewiesen.

(iii) Betrachte

$$A(n) : n = 1 \vee n - 1 \in \mathbb{N}.$$

IA: $A(1)$ ist offensichtlich wahr. — Is: Ist $A(n)$ wahr, so ist $n \in \mathbb{N}$. Damit ist aber auch $A(n + 1)$ wahr.

(iv) Betrachte hierzu die Aussage

$$A(n) : n - m \in \mathbb{N} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N} \text{ mit } m < n.$$

IA: $A(1)$ ist wahr, denn wegen (i) gibt es kein $m \in \mathbb{N}$, für das wir die Behauptung prüfen müssen. — Is: Es gelte $A(n)$. Zu zeigen ist

$$A(n + 1) : (n + 1) - m \in \mathbb{N} \quad \text{für alle } m \in \mathbb{N} \text{ mit } m < n + 1.$$

Für $m = 1$ ist dies richtig. Ist dagegen $1 < m < n + 1$, so ist $m - 1 < n$ eine natürliche Zahl wegen (iii), und nach Induktionsannahme ist dann auch $n - (m - 1) \in \mathbb{N}$. Das ist aber äquivalent mit $(n + 1) - m \in \mathbb{N}$.

(v) Sei $m < n \leq m + 1$. Dann ist $n - m \leq 1$. Aus (iv) folgt aber $n - m \in \mathbb{N}$ und damit $n - m \geq 1$ wegen (i). Also ist $n - m = 1$, oder $n = m + 1$ wie behauptet. \gggg

Die letzte Aussage bedeutet, dass es zwischen m und $m + 1$ keine weitere natürliche Zahl gibt. Gilt also beispielsweise $n < A$ für eine Menge $A \subset \mathbb{N}$, so gilt auch $n + 1 \leq A$. A-5 .

In manchen Fällen ist es erforderlich, die Induktion nicht bei 1, sondern später zu beginnen. Der Beweis des folgenden Satzes ist als Übung überlassen $A_{2.}$.

5 **Modifiziertes Induktionsprinzip** Sei $A(n)$ eine Aussageform, für die gilt:

- (i) $A(n_0)$ ist wahr für ein $n_0 \in \mathbb{N}$.
 - (ii) Ist $A(n)$ wahr für irgendein $n \geq n_0$, so ist auch $A(n+1)$ wahr.
- Dann ist $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ wahr. \times

► **Beispiel** Es gilt

$$2^n \geq n^2, \quad n \neq 3.$$

Für $n = 1$ und $n = 2$ verifiziert man dies direkt, und für $n = 3$ ist die Aussage offensichtlich falsch. Für $n \geq 4$ führt man einen Induktionsbeweis. \leftarrow

■ Satz vom Minimum

Die natürlichen Zahlen sind in \mathbb{R} nach unten beschränkt. Jede nichtleere Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ besitzt deshalb ein Infimum *innerhalb der reellen Zahlen*. Im Fall natürlicher Zahlen ist dieses Infimum sogar ein *Element von A selbst*. Man spricht von einem *minimalen Element*, an dem das Infimum *angenommen wird*.

6 **Satz vom Minimum** Jede nichtleere Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ besitzt ein *minimales Element*. Das heißt, es existiert ein $m \in A$ mit $m \leq A$. \times

◀◀◀ Wegen $1 \leq \mathbb{N}$ ist A nach unten beschränkt. Da A nicht leer ist, existiert somit die *reelle Zahl* $m = \inf A$. Zu zeigen ist, dass $m \in A$.

Da $m+1$ keine untere Schranke von A ist, existiert aufgrund des Approximationssatzes $_{2.9}$ ein $n \in A$ mit

$$m \leq n < m+1.$$

Wäre $m < n$, so folgt mit demselben Satz die Existenz eines weiteren $o \in A$ mit

$$m \leq o < n < m+1.$$

Wegen $o < n$ und $n, o \in A \subset \mathbb{N}$ wäre dann $n - o$ eine natürliche Zahl $_4$ mit

$$n - o < m + 1 - o \leq m + 1 - m = 1,$$

was unmöglich ist. Also muss $m = n$ gelten, und dies ist das gesuchte minimale Element in A . \gggg

Korollar Es gibt keine uninteressanten natürlichen Zahlen. \times

◀◀◀ Angenommen, die Menge $U = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ ist uninteressant}\}$ ist nicht leer. Dann besitzt U ein minimales Element m , die kleinste uninteressante natürliche Zahl. Das ist natürlich eine interessante Zahl - Widerspruch. \gggg

■ Das Archimedische Prinzip

Bis hierher haben wir das Vollständigkeitsaxiom nicht benötigt. Alles in diesem Abschnitt Gesagte gilt somit in *jedem angeordneten Körper*. Somit gibt es in *jedem* angeordneten Körper \mathbb{K} eine Teilmenge \mathbb{N} , die als kleinste induktive Teilmenge definiert ist und die wir uns als eine Version der natürlichen Zahlen in \mathbb{K} vorstellen können. Ebenso gilt dort der Satz vom Minimum.

Da die Folge $1 < 2 < 3 < \dots$ immer weiter wächst, scheint die Menge \mathbb{N} in \mathbb{R} unbeschränkt zu sein. Doch auch diese scheinbar offensichtliche Tatsache erfordert einen Beweis. Und wie sich herausstellt, erfordert dieser die Existenz eines Supremums, also das Vollständigkeitsaxiom.

- 7 **Prinzip des Archimedes** *Die Menge der natürlichen Zahlen ist in den reellen Zahlen nach oben unbeschränkt. ✕*

««« Wäre \mathbb{N} beschränkt, so existierte $b = \sup \mathbb{N}$ in \mathbb{R} 2.7. Zu $b - 1 < b$ existiert dann aufgrund des Approximationssatzes 2.9 ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$b - 1 < n \leq b.$$

Aber dann ist $b < n + 1$, und wegen $n + 1 \in \mathbb{N}$ ist b doch keine obere Schranke von \mathbb{N} – ein Widerspruch. »»»

Aus dem Prinzip des Archimedes ergeben sich zwei wichtige Folgerungen.

- 8 **Korollar** *Zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$0 < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Zu zwei positiven reellen Zahlen x und h existiert genau ein $n \in \mathbb{N}$ mit

$$(n - 1)h \leq x < nh. \quad \times$$

««« Sei $\varepsilon > 0$. Aufgrund des Prinzips des Archimedes gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1/\varepsilon$. Für dieses n gilt dann die erste Behauptung.

Aus demselben Grund ist die Menge $\{m \in \mathbb{N} : x/h < m\}$ nicht leer, besitzt also wegen des Satzes vom Minimum 6 ein minimales Element n . Für dieses gilt

$$n - 1 \leq \frac{x}{h} < n.$$

Multiplikation mit $h > 0$ ergibt die Behauptung. Die Eindeutigkeit von n folgt aus der Eindeutigkeit des Minimums. »»»

- 9 **Satz vom Maximum** *Jede nichtleere, beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ besitzt ein maximales Element. Das heißt, es existiert ein $m \in A$ mit $A \leq m$. ✕*

⋄⋄⋄ Aufgrund der Beschränktheit von A und des Archimedischen Prinzips γ besitzt A eine obere Schranke b in \mathbb{N} . Es ist also $A < b$. Dann ist die Menge

$$b - A := \{b - a : a \in A\}$$

ebenfalls eine Teilmenge von \mathbb{N} δ und besitzt daher ein minimales Element ϵ . Dieses hat notwendigerweise die Form $b - m$ mit $m \in A$. Es gilt dann

$$b - m \leq b - A,$$

was äquivalent ist mit $A \leq m$. Somit ist $m \in A$ das maximale Element von A . ⋄⋄⋄

Der Beweis des archimedischen Prinzips stützt sich auf die Existenz eines Supremums δ, γ , also auf die Vollständigkeit der reellen Zahlen. Man könnte meinen, dass dies nur der Bequemlichkeit geschuldet ist, denn Vollständigkeit von \mathbb{R} und Unbeschränktheit von \mathbb{N} haben auf den ersten Blick wenig miteinander zu tun. Dem ist aber nicht so. Es gibt angeordnete Körper, in denen das archimedische Prinzip nicht gilt, wie das folgende Beispiel zeigt.

► **Beispiel** Im Körper \mathbb{M} der rationalen Funktionen mit rationalen Koeffizienten δ, γ spielen die konstanten Funktionen $n/1$ die Rolle der natürlichen Zahlen, und es gilt

$$\frac{n}{1} < \frac{x}{1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Somit ist \mathbb{N} in \mathbb{M} *beschränkt*. ◀

Das archimedische Prinzip ist somit unabhängig von den Anordnungsaxiomen und nicht aus diesen ableitbar. Andererseits gibt es angeordnete Körper, in denen das archimedische Prinzip, nicht aber das Vollständigkeitsaxiom gilt – zum Beispiel \mathbb{Q} . Daher ist folgende Definition sinnvoll.

Definition Ein angeordneter Körper heißt *archimedisch angeordnet*, wenn \mathbb{N} in ihm unbeschränkt ist. ✕

► **Beispiel** \mathbb{Q} und \mathbb{R} sind archimedisch angeordnete Körper, \mathbb{M} nicht. ◀

■ Rekursion

Auf dem Prinzip der vollständigen Induktion beruht auch das Prinzip der *rekursiven Definition*. Zunächst einige Beispiele.

Die *Fakultät* $n!$ einer natürlichen Zahl n ist rekursiv definiert durch

$$1! := 1, \quad n! := n \cdot (n - 1)!, \quad n \geq 2.$$

Der Wert von $n!$ wird also für $n > 1$ durch den Wert von $(n - 1)!$ erklärt. Nach endlich vielen Schritte ist $n!$ auf $1!$ zurückgeführt:

$$\begin{aligned} 2! &= 2 \cdot 1! = 2 \cdot 1, \\ 3! &= 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1, \\ &\vdots \\ n! &= n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1. \end{aligned}$$

Außerdem definiert man $0! := 1$. Die Rekursionsformel gilt damit sogar ab $n = 0$:

$$0! := 1, \quad n! := n \cdot (n - 1)!, \quad n \geq 1.$$

Die *Potenzen* a^n eines Elementes a eines beliebigen Körpers \mathbb{K} sind rekursiv definiert durch

$$a^0 := 1, \quad a^n := a a^{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Mit Induktion beweist man die üblichen *Potenzgesetze* $A-11$

$$a^n a^m = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = a^{nm}, \quad n, m \geq 0.$$

Die *allgemeine Summe* von n Elementen a_1, \dots, a_n in einem beliebigen Körper schreibt man als

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Deren rekursive Definition ist

$$\sum_{k=1}^0 a_k := 0, \quad \sum_{k=1}^n a_k := \left(\sum_{k=1}^{n-1} a_k \right) + a_n, \quad n \geq 1.$$

Entsprechend erklärt man das *allgemeine Produkt*

$$\prod_{k=1}^n a_k = a_1 a_2 \cdots a_n.$$

Da in einem Körper Addition und Multiplikation assoziativ und kommutativ sind, sind Klammern entbehrlich und die Reihenfolge unerheblich. Dies spielt erst eine Rolle bei *Reihen*, also unendlichen Summen.

► *Beispiele* Es gilt

$$na = \sum_{k=1}^n a, \quad a^n = \prod_{k=1}^n a, \quad n! = \prod_{k=1}^n k. \quad \blacktriangleleft$$

Als Summationsindex kann man übrigens jedes Symbol verwenden. Ebenso kann man umnummerieren. So ist beispielsweise

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{v=1}^n a_v = \sum_{l=0}^{n-1} a_{l+1}.$$

Allgemeiner erklärt man

$$\sum_{k=m}^n a_k := \sum_{m \leq k \leq n} a_k := \begin{cases} a_m + \dots + a_n, & m \leq n, \\ 0, & m > n. \end{cases}$$

Entsprechendes gilt für Produkte.

Rechenregeln für Summen In einem Körper gilt

$$\sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n (a_k + b_k), \quad a \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n ab_k$$

sowie

$$\sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{l=1}^m b_l = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m a_k b_l = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq m}} a_k b_l,$$

wobei sich die Doppelsumme über alle möglichen Kombinationen der Indizes k und l mit $1 \leq k \leq n$ und $1 \leq l \leq m$ erstreckt und damit nm Summanden umfasst. \times

⟨⟨⟨ Wir zeigen nur die letzte Behauptung mit Induktion über n . Für $n = 1$ reduziert sich die Aussage auf die korrekte Gleichung

$$a_1 \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n a_1 b_k.$$

Für $n + 1$ anstelle von n haben wir

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k \cdot \sum_{l=1}^m b_l = \left(\sum_{k=1}^n a_k + a_{n+1} \right) \cdot \sum_{l=1}^m b_l = \sum_{k=1}^n a_k \cdot \sum_{l=1}^m b_l + a_{n+1} \sum_{l=1}^m b_l.$$

Ist die Gleichung wahr für n und alle $m \geq 1$, so folgt

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k \cdot \sum_{l=1}^m b_l = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq m}} a_k b_l + \sum_{\substack{k=n+1 \\ 1 \leq l \leq m}} a_k b_l = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n+1 \\ 1 \leq l \leq m}} a_k b_l.$$

Also gilt sie auch für $n + 1$ und alle $m \geq 1$. $\rangle\rangle\rangle\rangle$

Entsprechend werden andere Sätze auf allgemeine Summen und Produkte verallgemeinert. Beispielsweise lautet die *allgemeine Dreiecksungleichung*

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

Mit diesen Rechenregeln lassen sich viele Summen und Produkte ohne expliziten Rückgriff auf die vollständige Induktion bestimmen. Ein Beispiel ist die

- 10 **Geometrische Summe** Für jedes reelle q und alle $n \geq 0$ gilt

$$(1 - q)(1 + q + \dots + q^n) = 1 - q^{n+1}.$$

Für $q \neq 1$ gilt also

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Für $n = 0$ ist die Gleichung korrekt. Sei also $n \geq 1$. Dann ist

$$(1 - q) \sum_{k=0}^n q^k = \sum_{k=0}^n q^k - \sum_{k=0}^n q^{k+1} = q^0 + \sum_{k=1}^n q^k - \sum_{k=0}^{n-1} q^{k+1} - q^{n+1}.$$

Die beiden mittleren Terme annullieren sich, denn

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^{k+1} = \sum_{k=1}^n q^k.$$

Somit erhalten wir

$$(1 - q) \sum_{k=0}^n q^k = 1 - q^{n+1}.$$

Das entspricht der Behauptung. ⟩⟩⟩

■ Allgemeine Rekursion

Das Rekursionsprinzip mag auf den ersten Blick einleuchten, so wie auch das Induktionsprinzip. Dennoch bedarf es eines Beweises, dass durch rekursive Definitionen tatsächlich *Folgen*¹ in eindeutiger Weise definiert werden. Dies leistet der folgende Satz, der durch Induktion bewiesen wird und beim ersten Lesen übergangen werden kann.

- 11 **Rekursionsatz** Sei X eine beliebige Menge, und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\phi_n : X^n \rightarrow X$$

¹ Folgen werden im übernächsten Kapitel behandelt.

eine beliebige Abbildung. Dann existiert zu jedem $a \in X$ eine eindeutige Folge $(f_n)_{n \geq 1}$ in X mit

$$f_1 = a, \quad f_{n+1} = \phi_n(f_1, \dots, f_n), \quad n \geq 1. \quad \times$$

Das bedeutet, dass mit dem *Startwert* $f_1 := a$ sukzessive die Werte

$$\begin{aligned} f_2 &:= \phi_1(f_1), \\ f_3 &:= \phi_2(f_1, f_2), \\ &\vdots \\ f_{n+1} &:= \phi_n(f_1, \dots, f_n) \end{aligned}$$

eindeutig erklärt sind. Die Abbildung ϕ_n definiert den nächsten Wert f_{n+1} als Funktion der ersten n Werte f_1, \dots, f_n .

Unsere bisherigen Beispielen sind allerdings viel einfacher gebaut. Alle Funktionen ϕ_n sind identisch und haben nur ein Argument.

12 \blacktriangleright *Beispiel* Die *Fibonacchifolge*

$$(f_n)_{n \geq 1} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$$

ist rekursiv erklärt durch

$$f_1 = f_2 = 1, \quad f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \quad n \geq 2.$$

Die Rekursionsvorschriften sind

$$\begin{aligned} \phi_1(f_1) &= f_1, \\ \phi_n(f_1, \dots, f_n) &= f_{n-1} + f_n, \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

und die Fibonacchifolge resultiert aus den Startwert $f_1 = 1$. \blacktriangleleft

3.2

Ganze und rationale Zahlen

Definition und Satz

$$\mathbb{Z} := \{m - n : n, m \in \mathbb{N}\}$$

heißt Menge der *ganzen Zahlen*. Für diese gilt

$$\mathbb{Z} = \{-n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}. \quad \times$$

⋄⋄⋄ Sei $G = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Dann gilt $G \subset \mathbb{Z}$, denn jedes Element von G kann als Differenz zweier natürlicher Zahlen geschrieben werden.

Um auch $\mathbb{Z} \subset G$ zu zeigen, sei $m - n \in \mathbb{Z}$. Ist $m = n$, so ist $m - n = 0 \in G$. Ist $m > n$, so ist $m - n \in \mathbb{N} \subset G$. Ist aber $m < n$, so ist mit demselben Argument $-(m - n) \in \mathbb{N}$ und damit $m - n$ ebenfalls Element von G . Da damit alle Möglichkeiten erfasst sind, gilt auch $\mathbb{Z} \subset G$. \gggg

Satz In der Menge \mathbb{Z} gelten alle Axiome eines angeordneten Körpers mit Ausnahme der Existenz eines multiplikativen Inversen. Insbesondere ist die Gleichung

$$m + x = n$$

in \mathbb{Z} immer eindeutig lösbar, und zwar mit $x = n - m$. \times

Man sagt, die ganzen Zahlen bilden einen *Ring mit Eins*. Der Beweis dieses Satzes ist Routine.

Die Sätze vom Minimum₆ und Maximum₉ gelten in \mathbb{Z} entsprechend. Der einzige Unterschied ist, dass Teilmengen von \mathbb{Z} *a priori* nicht nach unten beschränkt sind. Der folgende Satz wird auf die entsprechenden Sätze für natürliche Zahlen zurückgeführt_{A-14}.

13 Satz vom Minimum & Maximum In \mathbb{Z} besitzt jede nach unten beschränkte Menge ein Minimum und jede nach oben beschränkte Menge ein Maximum. \times

14 \Rightarrow *Beispiel* Die Funktion

$$[\cdot] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad x \mapsto [x] := \max \{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$$

weist jeder reellen Zahl x die größte ganze Zahl $m \leq x$ zu und wird als *Gaußklammer* bezeichnet. Andere Bezeichnungen sind *Abrundungs-* oder *Ganzzahlfunktion*. Zum Beispiel ist

$$[\pi] = 3, \quad [-\pi] = -4.$$

Der Graph dieser Funktion ist in Abbildung 1 dargestellt. \lll

Definition und Satz Die Menge

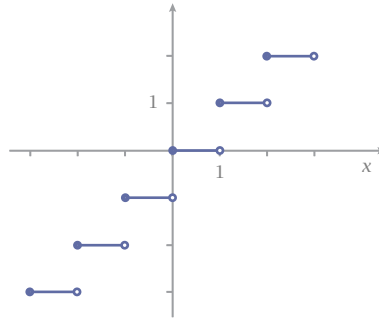
$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{n}{m} : n \in \mathbb{Z} \wedge m \in \mathbb{N} \right\}$$

heißt *Menge der rationalen Zahlen*. Mit der von \mathbb{R} induzierten totalen Ordnung bildet \mathbb{Q} einen archimedisch angeordneten Körper. In ihm ist auch die Gleichung

$$mx = n, \quad m \neq 0,$$

immer eindeutig lösbar, und zwar mit $x = \frac{n}{m}$. \times

Abb 1

Graph der
Gaußklammer

Auch der Beweis dieses Satzes ist Routine. Es ist im Wesentlichen nur zu zeigen, dass alle Operationen nicht aus \mathbb{Q} herausführen.

Bemerkung Die totale Ordnung von \mathbb{Q} lässt sich auf die natürliche Ordnung von \mathbb{Z} zurückführen, in dem man

$$\frac{n}{m} < \frac{p}{q} \Leftrightarrow nq < mp$$

definiert. Diese Definition hängt nicht von der Wahl der Darstellung einer rationalen Zahl ab, solange man verlangt, dass die Nenner positiv sind. Für verschiedene Darstellungen derselben rationalen Zahl gilt ja

$$\frac{n}{m} = \frac{p}{q} \Leftrightarrow nq = mp. \quad \rightarrow$$

Die rationalen Zahlen bilden eine echte Teilmenge der reellen Zahlen. Sie liegen aber *dicht* in \mathbb{R} .

- 15 **Satz** Zu zwei beliebigen reellen Zahlen $a < b$ existiert immer eine rationale Zahl r mit $a < r < b$. \times

⟨⟨⟨ Sei $a < b$. Dann ist $b - a > 0$, und es existiert g eine natürliche Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit

$$0 < \frac{1}{m} < b - a.$$

Dies ist äquivalent mit $1 < bm - am$ oder $am + 1 < bm$. Für die nach dem Satz vom Minimum₁₃ existierende ganze Zahl

$$n := \min \{k \in \mathbb{Z} : k > am\}$$

gilt dann $am < n \leq am + 1 < bm$. Division durch $m > 0$ ergibt

$$a < \frac{n}{m} < b.$$

Die rationale Zahl $r = n/m$ hat also die gewünschte Eigenschaft. ⟩⟩⟩

3.3

Eindeutigkeit der reellen Zahlen

Nachdem \mathbb{Q} als dichte Teilmenge von \mathbb{R} definiert ist, können wir noch kurz die Eindeutigkeit der reellen Zahlen ansprechen. Es ist durchaus möglich, ganz unterschiedliche *Modelle* der reellen Zahlen zu konstruieren – also total geordnete Mengen mit zwei Operationen, in denen sämtliche geforderten Axiome gelten. Diese verschiedenen Modelle sind jedoch alle von derselben *Gestalt* – man kann sie mitsamt ihren Strukturen eins-zu-eins aufeinander abbilden. Mathematisch gesprochen sind sie *isomorph*.

Im Fall der reellen Zahlen bedeutet dies Folgendes.

- 16 **Isomorphiesatz** Sind $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ und $(\mathbb{K}, \boxplus, \boxtimes, \sqsubset)$ zwei vollständige angeordnete Körper, so existiert eine bijektive Abbildung $\Phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ derart, dass

$$\Phi(x + y) = \Phi(x) \boxplus \Phi(y),$$

$$\Phi(x \cdot y) = \Phi(x) \boxtimes \Phi(y)$$

und

$$x < y \Leftrightarrow \Phi(x) \sqsubset \Phi(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt. \times

Es spielt also zum Beispiel keine Rolle, ob ich zwei Operanden zuerst in \mathbb{R} addiere und das Ergebnis mit Φ abbilde, oder ob ich zuerst die Operanden mit Φ abbilde und danach in \mathbb{K} addiere.

⟨⟨⟨⟨ *Beweisskizze* Für jede Abbildung Φ mit den geforderten Eigenschaften gilt beispielsweise

$$\Phi(x) = \Phi(x + 0) = \Phi(x) \boxplus \Phi(0)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Also ist notwendigerweise $\Phi(0) = 0$, das neutrale Element der Addition in \mathbb{K} . Analog ist $\Phi(1) = 1$ das neutrale Element der Multiplikation in \mathbb{K} . Daher *definieren* wir

$$\Phi(0) := 0, \quad \Phi(1) := 1$$

Damit ist aber Φ auch schon für alle natürlichen Zahlen festgelegt, wie beispielsweise

$$\Phi(2) = \Phi(1 + 1) = \Phi(1) \boxplus \Phi(1) = 1 \boxplus 1 = 2.$$

Mithilfe der Körperoperationen ist damit Φ auch für die ganzen und rationalen Zahlen eindeutig festgelegt. Und mithilfe der Vollständigkeit dann auch für alle nicht-reellen, also irrationalen Zahlen A-2.21 . \gggg

3.4

Abzählbarkeit und Mächtigkeit

Gibt es mehr rationale Zahlen als natürliche Zahlen? Gibt es mehr reelle Zahlen als rationale Zahlen? Und gibt es Mengen, die ›noch größer‹ sind als die Menge der reellen Zahlen? Um diese Fragen zu beantworten, definieren wir zuerst, wann wir zwei Mengen als ›gleich groß‹ ansehen wollen.

Definition Zwei nichtleere Mengen A und B heißen *gleichmächtig*, geschrieben $A \sim B$, wenn sie bijektiv aufeinander abgebildet werden können. \times

Diese Definition entspricht der intuitiven Vorstellung. Können wir die Elemente zweier Mengen paarweise zuordnen, ohne dass am Ende ein Element übrig bleibt, so betrachten wir diese Mengen als gleich groß. Dazu müssen wir die Mengen nicht einmal abzählen oder auf andere Weise ihre Größe quantifizieren.

Offensichtlich definiert \sim eine Äquivalenzrelation, deren Klassen aus gleichmächtigen Mengen bestehen.

- ▶ A. Die Mengen $\{H, i, l, f, e\}$ und $\{\ominus, \oplus, \otimes, \odot, \otimes\}$ sind gleichmächtig.
- B. Die Mengen \mathbb{N} und $2\mathbb{N} = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ sind gleichmächtig, eine Bijektion ist zum Beispiel $n \mapsto 2n$.
- C. Ebenso sind \mathbb{N} und \mathbb{Z} gleichmächtig, eine Bijektion ist beispielsweise

$$\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad n \mapsto \begin{cases} n/2, & n \text{ gerade,} \\ (1-n)/2, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Diese nummeriert \mathbb{Z} als Folge $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots$ durch. \blacktriangleleft

Als *Standardmengen* für endliche Mengen definieren wir

$$\mathbb{A}_0 := \emptyset,$$

$$\mathbb{A}_n := \mathbb{A}_{n-1} \cup \{n\} = \{1, \dots, n\}, \quad n \geq 1.$$

Die Mengen \mathbb{A}_n sind tatsächlich nicht gleichmächtig und von \mathbb{N} verschieden, wie die beiden folgenden Sätze zeigen.

Satz Es gilt $\mathbb{A}_m \sim \mathbb{A}_n$ genau dann, wenn $m = n$. \times

⟨⟨⟨⟨ \Leftarrow Ist $m = n$, so sind die beiden Mengen gleich, also erst recht gleichmächtig.

\Rightarrow Sei umgekehrt $\mathbb{A}_m \sim \mathbb{A}_n$, wobei wir $1 \leq m \leq n$ annehmen dürfen. Wir argumentieren induktiv bezüglich n . Für $n = 1$ ist $m = n$, und die Behauptung ist wahr. Ist $n > 1$, so existiert nach Annahme zwischen beiden Mengen eine Bijektion. Dann gibt es aber auch eine Bijektion mit $m \mapsto n$. Die Einschränkung dieser Bijektion auf \mathbb{A}_{m-1} ist dann auch eine Bijektion zwischen \mathbb{A}_{m-1} und \mathbb{A}_{n-1} , es ist also $\mathbb{A}_{m-1} \sim \mathbb{A}_{n-1}$. Nach Induktionsannahme folgt hieraus $m - 1 = n - 1$. Also ist $m = n$, und wir sind fertig. ⟩⟩⟩⟩

Satz Es ist $\mathbb{A}_n \not\sim \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. \times

⟨⟨⟨⟨ Der Beweis ist als Übungsaufgabe überlassen A_{15} . ⟩⟩⟩⟩

Definition Eine nichtleere Menge M heißt

- (i) *endlich*, falls $M \sim \mathbb{A}_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$,
- (ii) *abzählbar unendlich*, falls $M \sim \mathbb{N}$,
- (iii) *abzählbar*, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist,
- (iv) *überabzählbar*, wenn sie nicht abzählbar ist. \times

Wegen des vorangehenden Satzes ist eine Menge nicht gleichzeitig endlich und abzählbar unendlich. Die Definition ist also sinnvoll.

Definition Die *Kardinalität* einer Menge ist ²

$$|M| := \begin{cases} n & \text{falls } M \sim \mathbb{A}_n, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases} \quad \times$$

Andere gebräuchliche Bezeichnungen sind $\text{card } M$, $\text{Anz}(M)$ oder $\#M$. Die so definierte Anzahlfunktion macht keinen Unterschied zwischen ›abzählbar unendlich‹ und ›überabzählbar‹.

■ Abzählbare Mengen

Zunächst einige Beobachtungen zu abzählbaren Mengen. Es überrascht nicht, dass Teilmengen abzählbarer Mengen wieder abzählbar sind. Zuerst betrachten wir die Menge \mathbb{N} selbst.

17 **Satz** Jede Teilmenge von \mathbb{N} ist entweder endlich oder abzählbar unendlich. \times

² Die Striche $|\cdot|$ werden in der Mathematik vielfach verwendet – für den Betrag einer reellen Zahl, die Länge eines Intervalls, die Kardinalität einer Menge, und manches andere. Es sollte jeweils aus dem Kontext erkennbar sein, was gemeint ist.

«»» Man zeigt durch Induktion über das Maximum, dass jede beschränkte Teilmenge A von \mathbb{N} endlich ist A-13. Ist also A *nicht* endlich, so ist A jedenfalls unbeschränkt. Wir können dann eine Abbildung

$$\phi : \mathbb{N} \rightarrow A$$

induktiv definieren durch

$$\begin{aligned}\phi(1) &:= \min A, \\ \phi(n+1) &:= \min \{q \in A : q > \phi(n)\}, \quad n \geq 1.\end{aligned}$$

Aus dieser Definition folgt $\phi(1) < \phi(2) < \dots$ und allgemein

$$\phi(n) < \phi(m), \quad n < m.$$

Die Funktion ϕ ist, wie man sagt 7.14, *streng monoton steigend*. Hieraus folgt, dass sie auch *injektiv* ist.

Bleibt zu zeigen, dass ϕ *surjektiv* auf A ist. Zu beliebigen $p \in A$ sollte

$$n := \min \{m \in \mathbb{N} : \phi(m) \geq p\}$$

der richtige Kandidat sein. In der Tat folgt unmittelbar aus dieser Definition

$$\phi(n) \geq p.$$

Für $n > 1$ gilt außerdem $\phi(n-1) < p$, denn $\phi(n-1) \geq p$ widerspräche der Definition von n . Mit der Definition von ϕ erhalten wir

$$\phi(n) = \min \{q \in A : q > \phi(n-1)\} \leq p,$$

denn p ist ja Element der Menge in der Mitte. Aus den beiden letzten Ungleichungen folgt $\phi(n) = p$. »»»

Bemerkung Eine Bijektion $\phi : \mathbb{N} \rightarrow M$ kann man als ›Durchnummerierung‹ aller Elemente von M auffassen. Sie erlaubt es, alle Elemente in Form einer Folge m_1, m_2, m_3, \dots mit $m_n = \phi(n)$ hinzuschreiben, so dass

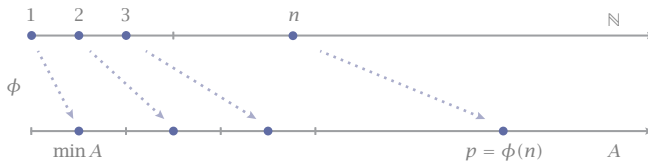
$$M = \phi(\mathbb{N}) = \{m_n : n \geq 1\}.$$

Obendrein tritt jedes Folgenglied *genau einmal* auf. \rightarrow

Da jede abzählbare Menge bijektiv auf \mathbb{N} oder eine der Mengen \mathbb{A}_n abgebildet werden kann, folgt aus diesem Satz das entsprechende Result für beliebige abzählbare Mengen.

18 Korollar *Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar.* \times

Abb 2 Zum Beweis von Satz 17



Abzählbarkeit ›vererbt‹ sich also auf Teilmengen – was nicht wirklich überrascht. Interessanter ist da die Frage, ob zum Beispiel ›abzählbar \times abzählbar = abzählbar‹ gilt. Das ist in der Tat richtig.

19 **Satz** Die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar. \times

⟨⟨⟨ Wir ordnen die Elemente von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in folgendem Matrixschema an:

$$\begin{array}{cccc} (1, 1) & (1, 2) & (1, 3) & \dots \\ (2, 1) & (2, 2) & (2, 3) & \dots \\ (3, 1) & (3, 2) & (3, 3) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Dieses zählen wir mit dem *Cantorschen Diagonalverfahren* ab, indem wir sukzessive die *Diagonalen* durchnummerieren, deren Elemente (n, m) dieselbe Summe $n + m$ haben. Die ersten Glieder dieser Diagonalnummerierung sind

$$\begin{aligned} &(1, 1), \\ &(2, 1), (1, 2), \\ &(3, 1), (2, 2), (1, 3), \\ &(4, 1), (3, 2), (2, 3), (1, 4), \dots \end{aligned}$$

Dies ist möglich, da jede dieser Diagonalen nur *endlich* viele Elemente besitzt, und liefert eine Bijektion $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. $\rangle\rangle\rangle$

Korollar Das kartesische Produkt zweier und allgemeiner endlich vieler abzählbarer Mengen ist abzählbar. \times

⟨⟨⟨ Wir betrachten nur den Fall zweier abzählbar *unendlicher* Mengen. Es sei also $A \sim \mathbb{N}$ und $B \sim \mathbb{N}$. Dann aber ist $A \times B \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, und die Behauptung folgt mit $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ aus dem vorangehenden Satz.

Das kartesische Produkt von mehr als zwei, aber endlich vielen abzählbaren Mengen behandelt man mit Induktion über die Anzahl der Faktoren. $\rangle\rangle\rangle$

20 **Satz** Die Menge \mathbb{Q} der rationalen Zahlen ist abzählbar. \times

«»» Wählen wir für jede rationale Zahl auf irgendeine Weise eine eindeutige Darstellung $r = n/m$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$, so erhalten wir eine Bijektion zwischen \mathbb{Q} und einer Teilmenge von $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Da diese Teilmenge abzählbar ist, ist auch \mathbb{Q} abzählbar. »»»

■ Überabzählbare Mengen

Wir klären zunächst die Frage, ob es überhaupt überabzählbare Mengen gibt. Der nächste Satz führt zu einer positiven Antwort.

Satz *Es gibt keine Surjektion einer beliebigen Menge X auf $\mathcal{P}(X)$.* ✕

«»» Für $X = \emptyset$ ist $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$. Da die Bildmenge einer auf der leeren Menge definierten Abbildung ebenfalls leer ist und somit \emptyset nicht zu deren Bild gehören kann, ist die Behauptung in diesem Fall richtig.

Sei jetzt $X \neq \emptyset$ und $\Phi: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ eine *beliebige* Abbildung. Betrachte

$$A := \{x \in X : x \notin \Phi(x)\} \in \mathcal{P}(X).$$

Angenommen, es gibt ein $\alpha \in X$ mit

$$\Phi(\alpha) = A.$$

Wäre $\alpha \in A$, so folgt $\alpha \notin \Phi(\alpha) = A$ aufgrund der Definition von A . Wäre aber $\alpha \notin A$, so bedeutet dies $\alpha \in \Phi(\alpha)$, und es folgt $\alpha \in A$. Das klappt also hinten und vorne nicht, und so kann es kein $\alpha \in X$ mit $\Phi(\alpha) = A$ geben. Also ist Φ *nicht* surjektiv. »»»

Da man die Menge X durch

$$X \rightarrow \mathcal{P}(X), \quad x \mapsto \{x\}$$

bijektiv auf eine Teilmenge von $\mathcal{P}(X)$ abbilden kann, ist $\mathcal{P}(X)$ *immer mächtiger* als X . Somit ist $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ mächtiger als \mathbb{N} und damit *überabzählbar*. Es ist sogar jede der Mengen

$$\mathbb{N}, \quad \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})), \quad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))), \quad \dots$$

mächtiger als die vorangehende, *ad infinitum*. Es gibt somit mindestens unendlich viele verschiedene Unendlichkeiten ... — Aber was gilt für die reellen Zahlen?

Satz *Die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen ist überabzählbar.* ✕

«»» Angenommen, \mathbb{R} ist abzählbar. Dann gibt es eine Nummerierung ³

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$$

³ Wir fangen zur Abwechslung bei 0 an.

aller reellen Zahlen. Wir konstruieren dann eine weitere reelle Zahl ξ , die *nicht* in dieser Nummerierung vorkommt.

Wir konstruieren ξ mithilfe einer fallenden Folge von Intervallen

$$I_n = [a_n, b_n], \quad n \geq 0,$$

die wir induktiv definieren. Als I_0 wählen wir ein beliebiges abgeschlossenes Intervall, das *nicht* den Punkt x_0 enthält:

$$I_0 := [a_0, b_0] \not\ni x_0.$$

Ist nun I_{n-1} für $n > 0$ bereits konstruiert, so wählen wir I_n als linkes oder rechtes abgeschlossenes Drittel von I_{n-1} so, dass

$$I_n := [a_n, b_n] \not\ni x_n.$$

Das ist immer möglich, da x_n nicht in beiden Dritteln gleichzeitig enthalten sein kann. Offensichtlich ist $I_n \subset I_{n-1}$.

Für die Randpunkte der so definierten Intervalle gilt

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n < b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0, \quad n \geq 0.$$

Also gilt auch

$$A := \{a_n : n \geq 0\} < B := \{b_n : n \geq 0\}.$$

Insbesondere ist A nach oben beschränkt, und es existiert $\xi = \sup A$ wegen der Vollständigkeit von \mathbb{R} . Es gilt dann

$$A \leq \xi \leq B,$$

denn alle Elemente von B sind obere Schranken von A , und ξ ist die kleinste obere Schranke. Somit gilt

$$\xi \in I_n, \quad n \geq 0.$$

Aufgrund der Konstruktion der Intervalle I_n bedeutet dies aber, dass $\xi \neq x_n$ für alle $n \geq 0$. Wir haben also eine reelle Zahl ξ gefunden, die nicht in der Aufzählung x_0, x_1, x_2, \dots enthalten ist – ein Widerspruch. \gggg

Bemerkungen a. Die Intervalle I_n bilden eine sogenannte *Intervallschachtelung* A-2.39.

b. Aus der Überabzählbarkeit der reellen Zahlen ergibt sich, dass auch das kartesische Produkt abzählbar unendlich vieler endlicher Mengen mit mindestens zwei Elementen überabzählbar ist. \rightarrow

3.5

Etwas Kombinatorik

Wir erwähnen noch einige elementare Sätze der Kombinatorik, die sämtlich mittels vollständiger Induktion bewiesen werden, beispielsweise Sätze über die Anzahl von Teilmengen, Permutationen, und Auswahlmengen. Ein wesentliches Ergebnis ist hierbei die allgemeine binomische Formel.

Satz Eine n -elementige Menge M besitzt genau 2^n verschiedene Teilmengen:

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Induktionsanfang: Dies gilt bereits für $n = 0$, also $M = \emptyset$, denn

$$|\emptyset| = 0, \quad |\mathcal{P}(\emptyset)| = |\{\emptyset\}| = 1 = 2^0.$$

Für $n = 1$ rechnet man dies genau so nach. *Induktionsschluss:* Der Satz gelte für jede n -elementige Menge M . Sei

$$M_+ = M \cup \{+\}$$

eine $n + 1$ -elementige Menge – wir nehmen also $+ \notin M$ an. Dann gilt

$$\mathcal{P}(M_+) = P_+ \cup P_-,$$

wobei P_+ alle Teilmengen von M_+ umfasst, die $+$ enthalten, und P_- die übrigen, die dieses Element nicht enthalten. Diese beiden Familien sind also disjunkt. Außerdem können wir P_- unmittelbar mit der Potenzmenge von M identifizieren. Dasselbe gilt für P_+ , denn jede Menge in P_+ entsteht durch Hinzunahme von $+$ zu einer Teilmenge von M . Daher gilt mit der Induktionsannahme

$$|\mathcal{P}(M_+)| = |P_+| + |P_-| = |\mathcal{P}(M)| + |\mathcal{P}(M)| = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Damit sind wir fertig. ⟩⟩⟩

Als Nächstes betrachten wir die Anzahl aller möglichen Bijektionen einer n -elementigen Menge auf sich. Dies ist gleichbedeutend mit der Frage, wieviele Vertauschungen der Elemente eines n -Tupels es gibt.

Satz Es gibt genau $n!$ verschiedene Permutationen von n Objekten. \times

⟨⟨⟨ Induktionsanfang: Für ein einziges Objekt gibt es genau eine Möglichkeit der Anordnung, die Anzahl ist also $1 = 1!$.

Induktionsschluss: Haben wir $n + 1$ Objekte, so haben wir für die Wahl des ersten Elements der Anordnung genau $n + 1$ Möglichkeiten. Danach bleiben uns noch n Elemente für die weitere Anordnung. Wenden wir hierauf die Induktions-

annahme an, so erhalten wir als Gesamtzahl der Anordnungsmöglichkeiten

$$(n+1) \cdot n! = (n+1)! \quad \gggg$$

Schließlich fragen wir nach der Zahl aller möglichen m -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge.

Satz Eine n -elementige Menge M besitzt genau

$$\binom{n}{m} := \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

m -elementige Teilmengen, wobei $0 \leq m \leq n$. \times

An dieser Stelle zeigt sich der Sinn der Vereinbarung $0! = 1$. Denn

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad n \geq 0,$$

ist die korrekte Anzahl von Teilmengen für diese Fälle.

««« Die Gesamtzahl aller m -Tupel, die sich aus $n \geq m$ Elementen bilden lassen, ist

$$n(n-1) \cdots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!},$$

denn sukzessive können wir aus $n, n-1, \dots, n-m+1$ Elementen für die nächste Komponente auswählen. Da es bei Mengen aber nicht auf die Reihenfolge der Elemente ankommt, müssen wir noch durch die Anzahl aller möglichen Permutationen von m Elementen dividieren. Somit ist die Anzahl aller m -elementigen Teilmengen gleich

$$\frac{1}{m!} \cdot \frac{n!}{(n-m)!} = \binom{n}{m}. \quad \gggg$$

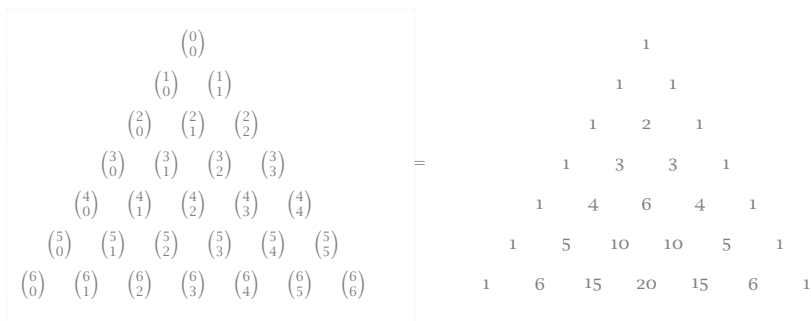
► **Beispiel** Es gibt

$$\binom{49}{6} = 10\,068\,347\,520$$

Möglichkeiten, 6 aus 49 zu spielen. ◀

Die im vorangehenden Satz auftretenden Ausdrücke heißen *Binomialkoeffizienten* und treten in vielen Fragestellungen der Kombinatorik und Statistik auf. Für uns spielen sie vor allem eine Rolle in der binomischen Formel und der Produktregel der Differenziation. — Zunächst die elementarsten Eigenschaften dieser Koeffizienten.

Abb 3 Die ersten sieben Zeilen des Pascalschen Dreiecks



21 **Satz** Für alle $0 \leq m \leq n$ gilt

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$$

sowie für $1 \leq m \leq n$

$$\binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m}. \quad \times$$

Man beachte, dass dies die binomischen Koeffizienten rekursiv beschreibt.

⟨⟨⟨ Die erste Identität ergibt sich sofort. Die zweite Identität ist eine direkte Rechnung:

$$\begin{aligned} \binom{n}{m-1} + \binom{n}{m} &= \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} + \frac{n!}{m!(n-m)!} \\ &= \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} \left(\frac{1}{n-m+1} + \frac{1}{m} \right) \\ &= \frac{n!}{(m-1)!(n-m)!} \cdot \frac{n+1}{m(n-m+1)} \\ &= \frac{(n+1)!}{m!(n-m+1)!} = \binom{n+1}{m}. \end{aligned}$$

Aus der letzten Formel ergibt sich, dass bei Anordnung der Binomialkoeffizienten im Pascalschen Dreieck wie in Abbildung 3 – mit $\binom{n}{m}$ an der m -ten Stelle in der n -ten Zeile, wobei die Zählung bei Null beginnt – jedes Element die Summe der beiden direkt über ihm stehenden Elemente ist.

22 **Binomische Formel** Für alle reellen Zahlen a und b und alle $n \geq 0$ gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \quad \times$$

««« Induktionsanfang: Für $n = 0$ reduziert sich die Behauptung auf $1 = 1$, und für $n = 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = a^1 b^0 + a^0 b^1 = a + b = (a + b)^1.$$

Dies ist also korrekt. *Induktionsschluss:* Nehmen wir die Gültigkeit der Formel für irgendein $n \geq 1$ an, so folgt

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n = (a + b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1}. \end{aligned}$$

Nach Umm Nummerierung $k + 1 \rightarrow k$ wird

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n-k+1} b^k + a^0 b^{n+1},$$

während

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k = a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k.$$

Mit $_{21}$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

erhalten wir also

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + a^0 b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k, \end{aligned}$$

was der Behauptung für $n + 1$ entspricht. »»»

Mit den binomischen Formeln für $(1 + 1)^n = 2^n$ und $(1 - 1)^n = 0$ erhalten wir zum Beispiel folgendes

Korollar Für alle $n \geq 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0. \quad \times$$

Aufgaben

- 1 Welche Aussagen sind wahr?
 - a. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $n \geq 1$ mit $1/n < \varepsilon^n$.
 - b. Die Menge der rationalen Zahlen ist mächtiger als die der natürlichen Zahlen.
 - c. Die Menge \mathbb{R} ist keine induktive Menge.
 - d. Die Menge aller abzählbaren Teilmengen von \mathbb{Q} ist abzählbar.
- 2 Man beweise das modifizierte Induktionsprinzip $_5$ und damit
 - a. $n^2 \geq 2n + 1$ für $n \geq 3$
 - b. $2^n \geq n^2$ für $n \geq 4$
 - c. $2^n \geq n^2 + n$ für $n \geq 5$
- 3 Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b)(a^n + a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1} + b^n).$$

- 4 Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $1 + 2^{2^n} + 2^{2^{n+1}}$ durch 7 teilbar.
- 5 Gilt $A > n$ für eine Menge $A \subset \mathbb{N}$ und ein $n \in \mathbb{N}$, so gilt auch $A \geq n + 1$.
- 6 Für die Abbildung $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ gelte $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ für alle $n \geq 1$. Dann gilt $\varphi(n) \geq n$ für alle $n \geq 1$.
- 7 Beweisen sie die folgenden Identitäten.
 - a. $\sum_{k=1}^n (2k - 1) = n^2$
 - b. $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
 - c. $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
 - d. $\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = \frac{n^n}{n!}$
 - e. $\prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$
- 8 Man beweise die *Lagrangesche Identität*

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) - \sum_{1 \leq k < l \leq n} (a_k b_l - a_l b_k)^2.$$

- 9 Sei $0 < x_k < 1$ für $1 \leq k \leq n$. Dann gilt
 - a. $\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^n x_k$
 - b. $\prod_{k=1}^n (1 - x_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^n x_k$

$$c. \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \left(\sum_{k=1}^n x_k^{-1} \right) \geq n^2.$$

10 Beweisen sie die folgenden Ungleichungen.

$$a. \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$$

$$b. \frac{(2n)!}{(n!)^2} \geq \frac{4^n}{n+1}$$

$$c. \sum_{k=1}^{n-1} k^3 < \frac{n^4}{4} < \sum_{k=1}^n k^3.$$

11 Die natürlichen Potenzen eines Elementes a eines beliebigen Körpers \mathbb{K} wurden rekursiv erklärt durch $a^0 := a$ und $a^n := a \cdot a^{n-1}$ für $n \geq 1$. Für $a \neq 0$ und $n \geq 1$ setzt man ferner

$$a^{-n} := (a^n)^{-1}.$$

Für $a, b \neq 0$ und $m, n \in \mathbb{Z}$ gelten dann die *Potenzgesetze*

$$a^n b^n = (ab)^n, \quad a^n a^m = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = a^{nm}.$$

- 12 Jede nach unten beschränkte Teilmenge von \mathbb{Z} besitzt ein minimales Element.
 13 Eine Teilmenge von \mathbb{N} ist beschränkt genau dann, wenn sie endlich ist.
 14 Beweisen sie den Satz vom Minimum und Maximum₁₃ für \mathbb{Z} .
 15 Man zeige, dass $\mathbb{A}_n \sim \mathbb{N}$ für alle $n \geq 1$.
 16 Beschreiben sie die im Beweis von Satz 19 beschriebene Bijektion explizit als Abbildung

$$\phi: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad (m, n) \mapsto k = \phi(m, n).$$

Geben sie auch die Umkehrabbildung an.

- 17 Ist die Menge $\mathcal{P}_0(\mathbb{N})$ aller *endlichen* Teilmengen von \mathbb{N} abzählbar? Mit Begründung natürlich.
 18 Die Vereinigung abzählbar vieler endlicher Mengen ist abzählbar.
 19 Eine Menge von disjunkten, nichtentarteten Intervallen mit rationalen Endpunkten ist abzählbar.
 20 Man zeige:
 a. $[0, \infty)$ und $[0, 1)$ sind gleichmächtig,
 b. $[0, 1)$ und $[0, 1]$ sind gleichmächtig.
 21 *Dirichletsches Schubfachprinzip* Eine Abbildung $\varphi: \mathbb{A}_m \rightarrow \mathbb{A}_n$ mit $m > n$ kann nicht injektiv sein. — Man kann also nicht $n + 1$ Socken auf n Schubladen verteilen, ohne dass wenigstens eine Schublade zwei Socken enthält.
 22 Sei $\pi: \mathbb{A}_n \rightarrow \mathbb{A}_n$ eine Bijektion. Ist n ungerade, so ist $\prod_{k=1}^n (\pi_k - k)$ gerade.
 23 Eine nichtleere Menge X ist genau dann abzählbar, wenn es eine Surjektion von \mathbb{N} auf X gibt.
 24 Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $x = \sup \{r \in \mathbb{Q} : r < x\}$.

- 25 In jedem Intervall positiver Länge liegen unendlich viele rationale Zahlen.
- 26 *Algebraische Zahlen* Eine reelle Zahl r heißt *algebraisch*, wenn sie Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist, wenn es also ganze Zahlen a_0, \dots, a_n mit $a_n \neq 0$ gibt, so dass $a_n r^n + \dots + a_1 r + a_0 = 0$. Jede rationale Zahl $r = p/q$ ist zum Beispiel algebraisch, denn $qr - p = 0$. Man zeige, dass die Menge aller algebraischen Zahlen abzählbar ist.
- 27 *Transzendente Zahlen* Jede nicht-algebraische reelle Zahl wird *transzendent* genannt. Man zeige, dass jedes nichtentartete Intervall abzählbar viele algebraische und überabzählbar viele transzendente Zahlen enthält.
- 28 *Beweis des Rekursionssatzes 11* a. Sind $(f_n)_{n \geq 1}$ und $(g_n)_{n \geq 1}$ zwei Folgen mit den geforderten Eigenschaften, so führt die Annahme

$$N := \{n \in \mathbb{N} : f_n \neq g_n\} \neq \emptyset$$

mit dem Satz vom Minimum zu einem Widerspruch. Also ist die Folge $(f_n)_{n \geq 1}$ eindeutig.

b. Um ihre Existenz zu zeigen, beweist man zunächst per Induktion, dass zu jedem $n \geq 1$ eine Abbildung $h_n: \mathbb{A}_n \rightarrow X$ existiert mit

$$\begin{aligned} h_n(1) &= a, \\ h_n(k) &= h_k(k), \quad 1 \leq k < n, \\ h_n(n) &= \phi_{n-1}(h_n(0), \dots, h_n(n-1)). \end{aligned}$$

c. Nun definiert man

$$f_n := h_n(n), \quad n \geq 1$$

und zeigt, dass diese Folge die Bedingungen des Rekursionssatzes erfüllt. — Eine ausführliche Fassung dieses Beweises findet sich in AMANN-ESCHER, S. 43.

- 29 *Binetsche Darstellung der Fibonacchizahlen* Für die Folge $(f_n)_{n \geq 1}$ der Fibonacchizahlen₁₂ mache man den Ansatz

$$f_n = a\lambda^n + b\mu^n, \quad n \geq 0.$$

- a. Man bestimme a und b aus den beiden Anfangswerten der Fibonacchifolge.
 b. Man bestimme λ und μ aus der Rekursionsformel.
 c. Man zeige damit die *Binetsche Darstellung*

$$f_n = \frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu}$$

mit den Zahlen des *goldenen Schnitts* $\lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ und $\mu = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$.

- 30 Für die Fibonacchizahlen gilt

$$a. \sum_{k=1}^n f_k = f_{n+2} - 1,$$

$$b. \sum_{k=1}^n B_k^n f_k = f_{2n}.$$

- 31 Kann man nur bis 3 zählen, so ist $\{a, b, c, d\}$ überabzählbar.
- 32 Einem französischem Mathematiker ist es endlich gelungen, die erste These der Juli-Revolution – »Alle Menschen sind gleich« – mathematisch zu beweisen: Ist M eine Menge mit endlich vielen Elementen, so ist $a \doteq b$ für alle $a, b \in M$, wobei ' \doteq ' für die politische Gleichheit steht.

Der Beweis erfolgt durch Induktion. *Induktionsanfang*: Hat M genau ein Element, so ist die Aussage wohl richtig, denn jeder ist sich selbst gleich. *Induktionsschluss*: Die Aussage sei richtig für alle Mengen mit n Elementen, und es sei M eine Menge mit $n + 1$ Elementen. Ist b irgendein Element in M und $N = M \setminus \{b\}$, so sind alle Elemente von N nach Induktionsannahme \doteq . Bleibt noch $b \doteq c$ für ein beliebiges $c \in N$ zu zeigen. Es sind aber $b, c \in \tilde{N} = M \setminus \{d\}$ für irgendein weiteres Element d in M , nach Induktionsvoraussetzung also auch $b \doteq c \dots$

Wo steckt der Fehler?

- 33 *Peano-Axiome* Die natürlichen Zahlen bilden eine Menge \mathbb{N} mit einem ausgezeichneten Element e und einer Abbildung

$$\nu: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{e\}$$

mit den folgenden Eigenschaften:

(P-1) ν ist injektiv.

(P-2) Ist $N \subset \mathbb{N}$ mit $e \in N$ und $\nu(N) \subset N$, so ist $N = \mathbb{N}$.

Für diese Menge beweise man folgende Aussagen.

- a. Die Abbildung ν ist surjektiv.
- b. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau eine Abbildung $\varphi_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit

$$\varphi_e = \nu, \quad \varphi_n \circ \nu = \nu \circ \varphi_n.$$

- c. Die Operation

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad n + m = \varphi_n(m)$$

ist assoziativ und kommutativ.

4

Komplexe Zahlen

Wir haben bisher das Zahlengebäude

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

beschrieben. Von ›unten‹ betrachtet, werden die *ganzen Zahlen* als Erweiterung der natürlichen Zahlen eingeführt, um uneingeschränkt die Gleichung

$$m + x = n$$

innerhalb dieses Zahlensystems lösen zu können. Die *rationalen Zahlen* werden eingeführt, um uneingeschränkt die Gleichung

$$mx = n$$

für $m \neq 0$ lösen zu können. Die rationalen Zahlen werden zu dem angeordneten Körper der *reellen Zahlen* vervollständigt, um unter anderem die quadratische Gleichung

$$x^2 = a$$

für alle $a \geq 0$ lösen zu können.

Mehr ist allerdings auch nicht möglich! Denn in jedem angeordneten Körper gilt ja $x^2 \geq 0$. Eine Gleichung wie

$$x^2 = -1$$

ist dort *unerfüllbar*. Trotzdem bleibt das Bedürfnis, auch diese Gleichung ›irgendwie zu lösen‹. Dies führt zur Erweiterung der reellen Zahlen zu den *komplexen Zahlen*, und damit zu einer weiteren Stufe des Zahlengebäudes

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Dieser *Erweiterungskörper* \mathbb{C} kann allerdings nicht mehr angeordnet sein.

4.1

Vorüberlegungen

Angenommen, es gibt irgendeinen größeren Körper $\mathbb{K} \supset \mathbb{R}$ mit einem gewissen Element, nennen wir es einmal i , so dass

$$i^2 = -1.$$

Dann ist jedenfalls $i \notin \mathbb{R}$. Ferner gehören zu \mathbb{K} auch alle Ausdrücke der Form

$$z := x + yi, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Dabei sind der *Realteil* $\Re z := x$ und der *Imaginärteil* $\Im z := y$ eindeutig durch z bestimmt. Denn ist $x + yi = u + vi$, so ist

$$x - u = (v - y)i.$$

Wäre $v \neq y$, so könnten wir diese Gleichung umformen zu

$$i = \frac{x - u}{v - y}.$$

Dann aber wäre i eine reelle Zahl - ein Widerspruch. Also ist $v = y$ und damit auch $x = u$.

Setze jetzt

$$\mathbb{C} := \{z = x + yi \in \mathbb{K} : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Für Summe und Produkt zweier Elemente $z = x + yi$ und $w = u + vi$ in \mathbb{C} gilt dann notwendigerweise

$$\begin{aligned} z + w &= (x + yi) + (u + vi) \\ &= (x + u) + (y + v)i, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} zw &= (x + yi)(u + vi) \\ &= xu + xvi + yui + yvi^2 \\ &= (xu - yv) + (xv + yu)i. \end{aligned}$$

Wir erhalten also wiederum Elemente von \mathbb{C} .

Behauptung Mit diesen Operationen ist \mathbb{C} ein Körper. \times

⟨⟨⟨⟨ Zum Beispiel sind $0_{\mathbb{C}} = 0 + 0i$ und $1_{\mathbb{C}} = 1 + 0i$ die Null und Eins in \mathbb{C} . Für $z \neq 0_{\mathbb{C}}$ ist ferner

$$z^{-1} = \frac{1}{x + yi} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2} i$$

wegen $x^2 + y^2 \neq 0$ ein wohldefiniertes Element in \mathbb{C} . Durch Multiplikation mit z verifiziert man, dass dies tatsächlich das multiplikativ Inverse zu z ist.

Sind also z und w in \mathbb{C} , so sind es auch $z + w$, zw , $-z$ und z^{-1} für $z \neq 0_{\mathbb{C}}$. Die Körperoperationen führen also nicht aus \mathbb{C} heraus. Da die Körperaxiome nach Voraussetzung in \mathbb{K} gelten, gelten sie damit auch in \mathbb{C} . \gggg

Gibt es also überhaupt einen Erweiterungskörper \mathbb{K} von \mathbb{R} mit der gewünschten Eigenschaft, so enthält dieser immer den Körper \mathbb{C} als Erweiterung von \mathbb{R} . Damit ist allerdings noch nichts über dessen *Existenz* gesagt. Wir kommen nicht umhin, einen solchen Körper explizit zu konstruieren – wobei wir uns natürlich von unseren Vorüberlegungen leiten lassen.

4.2

Konstruktion der komplexen Zahlen

Sei $\mathbb{K} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$. Wir *definieren*

$$(x, y) \oplus (u, v) := (x + u, y + v),$$

$$(x, y) \odot (u, v) := (xu - yv, xv + yu).$$

Dann verifiziert man:

- (i) \oplus und \odot sind assoziativ und kommutativ.
- (ii) Es gilt das Distributivgesetz.
- (iii) Es ist $0_{\mathbb{K}} = (0, 0)$ und $1_{\mathbb{K}} = (1, 0)$.
- (iv) Die inversen Elemente sind $-(x, y) = (-x, -y)$ und

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right), \quad (x, y) \neq 0_{\mathbb{K}}.$$

Das Ergebnis lautet somit:

Satz $(\mathbb{K}, \oplus, \odot)$ ist ein Körper. \times

Bemerkung Ganz ähnlich verfährt man übrigens bei der Konstruktion der ganzen aus den natürlichen Zahlen, und der rationalen aus den ganzen Zahlen. Statt ›Zahlen‹ betrachtet man Zahlenpaare und definiert für diese Operationen, die die vertraute Addition und Multiplikation nachbilden. \rightarrow

Dieser Körper \mathbb{K} erweitert \mathbb{R} in folgendem Sinn. Die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto \varphi(x) = (x, 0)$$

ist injektiv und vertauscht mit den Operationen: für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) \oplus \varphi(y),$$

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \odot \varphi(y).$$

Wir können deshalb \mathbb{R} mit dem *Unterkörper* $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \times \{0\} \subset \mathbb{K}$ identifizieren. Setzen wir jetzt noch

$$\mathbf{1} := (1, 0), \quad \mathbf{i} := (0, 1),$$

und schreiben im Folgenden wieder $+$ statt \oplus und \cdot statt \odot , so wird $-$ und hier verwenden wir einige Konzepte aus der linearen Algebra —

$$(x, y) = (x, 0) \oplus (0, y) = x \mathbf{1} + y \mathbf{i}.$$

Mit anderen Worten: $\mathbf{1}$ und \mathbf{i} sind *Basisvektoren* des zweidimensionalen reellen Vektorraumes \mathbb{K} , und $z = x + yi$ ist eine kompakte Schreibweise für die Linearkombination $x \mathbf{1} + y \mathbf{i}$.

In diesem Körper gilt dann unter anderem

$$\mathbf{i}^2 = (0, 1) \odot (0, 1) = (-1, 0) = -\mathbf{1}.$$

Es ist also nichts Imaginäres dabei, dass das Quadrat eines Körperelements das additiv Inverse der Eins ergibt.

Von nun an schreiben wir für diesen Körper \mathbb{C} und nennen ihn den *Körper der komplexen Zahlen*.

4.3 Einige elementare Eigenschaften

Geometrisch stellt man die Menge

$$\mathbb{C} = \{z = x + yi : x, y \in \mathbb{R}\}$$

als Punkte in der *komplexen Ebene* dar. Der *Realteil* x wird auf der Abszisse, der *Imaginärteil* y auf der Ordinate abgetragen. Diese werden auch als die *reelle* und *imaginäre Achse* der komplexen Ebene bezeichnet.

Eine komplexe Zahl z heißt *reell*, wenn ihr Imaginärteil verschwindet:

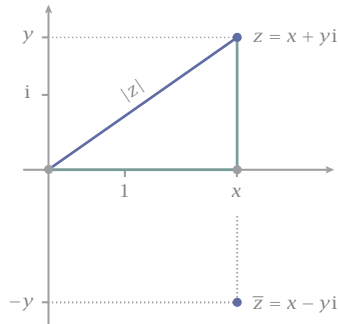
$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Im z = 0.$$

Als *komplexe Konjugation* bezeichnet man die Abbildung

$$\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \sigma(x + yi) = x - yi,$$

Abb 1

Komplexe Ebene,
Konjugation und Betrag



die z auf die zu ihr *komplex konjugierte Zahl* $\sigma(z)$ abbildet. Diese bezeichnet man üblicherweise mit

$$\bar{z} := \sigma(z).$$

Geometrisch handelt es sich um die Spiegelung der komplexen Ebene an der reellen Achse.

1 Rechenregeln für die komplexe Konjugation Für komplexe Zahlen gilt:

- (i) $\Re z = \frac{z + \bar{z}}{2}$ und $\Im z = \frac{z - \bar{z}}{2i}$,
- (ii) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$,
- (iii) $\overline{\bar{z}} = z$,
- (iv) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ und $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$,
- (v) $z\bar{z} = x^2 + y^2$ mit $x = \Re z$, $y = \Im z$. \times

⟨⟨⟨ (i) Mit $z = x + yi$ ist zum Beispiel

$$\frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{1}{2i}((x + yi) - (x - yi)) = y = \Im z.$$

(ii) Mit (i) gilt

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Im z = 0 \Leftrightarrow z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z}.$$

(v) Mit $z = x + yi$ ist

$$z\bar{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2.$$

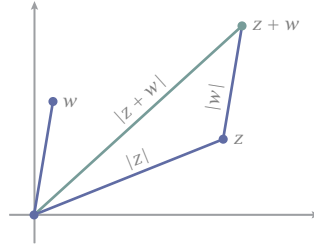
Die übrigen Aussagen sind ebenso leicht zu beweisen. ⟩⟩⟩

Bemerkung Wegen (iv) ist die komplexe Konjugation σ ein *Automorphismus* von \mathbb{C} , also eine bijektive Abbildung, die mit den Körperoperationen vertauscht:

$$\sigma(z + w) = \sigma(z) + \sigma(w), \quad \sigma(zw) = \sigma(z)\sigma(w).$$

Abb 2

Dreiecksungleichung in der komplexen Ebene



Wegen (iii) ist dies außerdem eine *Involution*: es gilt $\sigma^2 = id$ und damit auch $\sigma^{-1} = \sigma$. \rightarrow

■ Betrag

Den Betrag $|x|$ einer reellen Zahl x haben wir mithilfe der Ordnung der reellen Zahlen definiert. Eine solche Ordnung steht uns für die komplexen Zahlen nicht zur Verfügung, denn sowohl $i > 0$ also auch $i < 0$ führen sofort zu einem Widerspruch A-2.14. \mathbb{C} ist also kein angeordneter Körper. Interpretieren wir jedoch $|x|$ als *Abstand* des Punktes x zum Punkt 0, so können wir dies zu einem Betrag für komplexe Zahlen verallgemeinern.

Aufgrund des Satzes von Pythagoras ist $\sqrt{x^2 + y^2}$ der euklidische Abstand des Punktes $z = x + yi$ vom Nullpunkt in der komplexen Ebene. Andererseits ist $x^2 + y^2 = z\bar{z}$. Für jedes $z \in \mathbb{C}$ definieren wir daher

$$|z|_{\mathbb{C}} := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

als den *Betrag* der komplexen Zahl $z = x + yi$. Ist z reell, also $\Im z = 0$, so gilt

$$|z|_{\mathbb{C}} = \sqrt{x^2} = |\Re z|_{\mathbb{R}}, \quad \Im z = 0.$$

Somit ist der komplexe Betrag eine *Erweiterung* des reellen Betrags, und wir können hierfür wieder einfach $|\cdot|$ schreiben.

2 Rechenregeln für den Betrag Für komplexe Zahlen gilt:

- (i) $|\Re z| \leq |z|$ und $|\Im z| \leq |z|$,
- (ii) $|z| \geq 0$ und $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$,
- (iii) $|\bar{z}| = |z|$,
- (iv) $|z|^2 = z\bar{z}$,
- (v) $|zw| = |z||w|$,
- (vi) $|z + w| \leq |z| + |w|$ (*Dreiecksungleichung*). \times

⟨⟨⟨ (i) Für $z = x + yi$ ist zum Beispiel

$$|\Re z| = |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|.$$

Aussagen (ii), (iii) und (iv) sind einfach. Gleichung (v) folgt aus

$$|zw|^2 = zw \overline{z\overline{w}} = z\overline{z} w \overline{w} = |z|^2 |w|^2$$

und Wurzelziehen. Und für (vi) haben wir

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \\ &= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w} \\ &= |z|^2 + 2\Re(z\overline{w}) + |w|^2, \end{aligned}$$

denn $w\overline{z} = \overline{z\overline{w}}$. Für den mittleren Term gilt mit (i), (iii) und (v)

$$|\Re z\overline{w}| \leq |z\overline{w}| = |z||\overline{w}| = |z||w|.$$

Also erhalten wir

$$|z+w|^2 \leq |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2.$$

Wurzelziehen_{2.8} ergibt die Behauptung. \gggg

4.4 Fundamentalsatz der Algebra

Ausgangspunkt unserer Überlegungen war, eine Lösung von $x^2 + 1 = 0$ zu konstruieren. Tatsächlich haben wir viel mehr erreicht. Im Körper der komplexen Zahlen besitzt *jedes Polynom* eine Nullstelle. Polynome sind die einfachsten Funktionen, die sich übrigens in jedem Körper definieren lassen.

Definition Ein Ausdruck der Gestalt

$$\sum_{k=0}^n a_k z^k = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$$

mit *Koeffizienten* $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$ heißt (*komplexes*) *Polynom vom Grad n* . Das Polynom heißt *reell*, wenn alle Koeffizienten reell sind. Es heißt *normiert*, falls $a_n = 1$. \times

- *Beispiel* A. Eine Konstante $a_0 \neq 0$ ist ein Polynom vom Grad 0.
 B. Eine lineare Funktion $mx + b$ mit $m \neq 0$ ist ein Polynom vom Grad 1.
 C. $x^2 + px + q$ ist ein normiertes quadratisches Polynom.
 D. Die Konstante 0 ist streng genommen *kein Polynom*. Es wird sich jedoch als sinnvoll erweisen, dies als *Nullpolynom* zu definieren und ihm den Grad $-\infty$ zuzuweisen. ◀

Ein Polynom auf \mathbb{C} definiert eine Funktion $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Umgekehrt sind durch diese Funktion auch die Koeffizienten des Polynoms eindeutig bestimmt. Dies ist Methode des Koeffizientenvergleichs. In *endlichen* Körpern gilt der folgende Satz übrigens nicht A_{-10} !

- 3 **Methode des Koeffizientenvergleichs** *Zwei Polynome auf \mathbb{R} oder \mathbb{C} sind als Funktionen gleich genau dann, wenn ihre entsprechenden Koeffizienten gleich sind.* ✕

⟨⟨⟨ Dies folgt durch Induktion über den Polynomgrad A_{-9} . ⟩⟩⟩

Ein Punkt $a \in \mathbb{C}$ heißt *Nullstelle* eines Polynoms p , falls

$$p(a) = 0.$$

Die einfachsten Fälle sind uns vertraut. Jede lineare Gleichung $mx + b = 0$ mit $m \neq 0$ besitzt genau eine Nullstelle $x_0 = -b/m$. Für die Nullstellen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

lernt man – hoffentlich – die *Mitternachtsformel*

$$x_{\pm} = \frac{1}{2} \left(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q} \right).$$

Diese sind reell und verschieden für $p^2 > 4q$, reell und doppelt für $p^2 = 4q$, und komplex konjugiert für $p^2 < 4q$.

Ähnliche, allerdings wesentlich kompliziertere und für praktische Zwecke kaum brauchbare Formeln gibt es für kubische und biquadratische Gleichungen. Für polynomiale Gleichungen ab dem Grad 5 kann man jedoch beweisen, dass es solche algebraische Formeln *nicht gibt* – dies ist ein Resultat der Galois-Theorie.

Umso wichtiger ist es daher zu wissen, dass *jedes Polynom* überhaupt eine Nullstelle besitzt. Dies leistet der

Fundamentalsatz der Algebra *Jedes nicht-konstante komplexe Polynom besitzt mindestens eine komplexe Nullstelle.* ✕

Für diesen wichtigen Satz gibt es verschiedene Beweise. Den Standardbeweis werden wir im Rahmen der Funktionentheorie kennenlernen¹. Im Reellen gilt dieser Satz dagegen nicht, denn $x^2 + 1$ hat keine reelle Nullstelle.

Akzeptieren wir den Fundamentalsatz für den Augenblick, so können wir sofort noch mehr aussagen.

¹ Dies ist die Theorie der *komplexen* differenzierbaren Funktionen, nicht der allgemeinen reellen Funktionen. Diese Bezeichnung hat historische Gründe.

Satz Ist a eine Nullstelle des normierten Polynoms p vom Grad $n \geq 1$, so ist

$$p(z) = (z - a)q(z)$$

mit einem eindeutigen normierten Polynom q vom Grad $n - 1$. \times

⟨⟨⟨ Wir zeigen zuerst, dass für jedes beliebige a die Gleichung

$$p(z) = (z - a)q(z) + c$$

mit einem normierten Polynom und einem gewissen c erfüllt werden kann. Mit

$$p(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k, \quad q(z) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k$$

ist dies äquivalent mit $p(z) + aq(z) = zq(z) + c$, oder

$$z^n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k + ab_k)z^k = \sum_{k=1}^n b_{k-1}z^k + c.$$

Durch Koeffizientenvergleich folgt

$$b_{n-1} = 1,$$

$$b_{k-1} = a_k + ab_k, \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

$$c = a_0 + ab_0.$$

Somit sind die Koeffizienten b_{n-1}, \dots, b_0, c eindeutig bestimmt. Ist nun a eine Nullstelle von p , so ist notwendigerweise $c = 0$, und es folgt die Behauptung. \gggg

Ist also a eine Nullstelle eines Polynoms p vom Grad n gefunden, so ist

$$q(z) = \frac{p(z)}{z - a}$$

ein wohldefiniertes Polynom vom Grad $n - 1$, welches man durch *Polynomdivision* bestimmt.

▶ **Beispiel** Das Polynom $z^3 + 2z^2 - 11z + 6$ hat bei 2 eine Nullstelle. Polynomdivision ergibt

$$\begin{array}{r} (z^3 + 2z^2 - 11z + 9) : (z - 2) = z^2 + 4z - 3 \\ -(z^3 - 2z^2) \\ \hline 4z^2 - 11z + 6 \\ -(4z^2 - 8z) \\ \hline -3z + 6 \\ -(-3z + 6) \\ \hline 0 \end{array}$$

Ist das Polynom q nicht konstant, so kann man wiederum den Fundamentalsatz anwenden. Nach $n = \text{grad } p$ Schritten gelangt man somit zu folgendem Ergebnis.

Satz Zu jedem normierten komplexen Polynom p vom Grad n existieren eindeutig bestimmte komplexe Zahlen z_1, \dots, z_n , so dass

$$p(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k). \quad \times$$

Diese z_i sind offensichtlich sämtliche Nullstellen von p . Dabei kann eine Nullstelle mehrfach auftreten, sogar maximal n mal. Erscheint sie $\mu \geq 1$ mal, so spricht man von einer μ -fachen Nullstelle. Sind also z_1, \dots, z_r die verschiedenen Nullstellen von p mit Vielfachheiten μ_1, \dots, μ_r , so gilt

$$p(z) = \prod_{i=1}^r (z - z_i)^{\mu_i}, \quad \sum_{i=1}^r \mu_i = n.$$

Außerdem ist

$$q_i(z) := \frac{p(z)}{(z - z_i)^{\mu_i}}, \quad 1 \leq i \leq r,$$

ein Polynom vom Grad $n - \mu_i$ mit $q_i(z_i) \neq 0$.

Korollar Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n verschiedene Nullstellen. Stimmen zwei Polynome vom Grad n oder kleiner an $n + 1$ verschiedenen Stellen überein, so sind sie gleich. \times

⟨⟨⟨ Ein beliebiges nicht-normiertes Polynom vom Grad n hat die Gestalt

$$p(z) = a_n(z - z_1) \cdots (z - z_n).$$

Gilt $p(z_0) = 0$ für ein z_0 verschieden von z_1, \dots, z_n , so sind alle z -Faktoren ungleich Null, und somit notwendigerweise $a_n = 0$. Stimmen zwei Polynome vom Grad n oder kleiner an $n + 1$ Stellen überein, so ist deren Differenz ein Polynom vom Grad n oder kleiner mit $n + 1$ Nullstellen. Also ist es das Nullpolynom. ⟩⟩⟩

Ein Polynom vom Grad n ist also nicht nur durch seine $n + 1$ Koeffizienten eindeutig bestimmt, sondern auch durch seine Werte an $n + 1$ beliebigen verschiedenen Punkten. Umgekehrt können $n + 1$ Punkte in der kartesischen Zeichenebene mit unterschiedlichen Abszissen immer durch ein eindeutiges *Interpolationspolynom* vom Grad n oder kleiner *interpoliert* werden:

Satz Zu $n + 1$ verschiedenen komplexen *Stützstellen* a_0, \dots, a_n und $n + 1$ beliebigen Werten c_0, \dots, c_n gibt es genau ein Polynom p mit $\text{grad } p \leq n$

und

$$p(a_i) = c_i, \quad 0 \leq i \leq n. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Zu $n + 1$ verschiedenen Stützstellen definiert man die entsprechende Anzahl von *Lagrangepolynomen*

$$\lambda_k(z) = \prod_{i \neq k} \frac{z - a_i}{a_k - a_i}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Da die a_i paarweise verschieden sind, sind dies wohldefinierte Polynome von Grad n mit der Eigenschaft, dass

$$\lambda_k(a_l) = \delta_{kl} := \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}.$$

Aus diesen ›Basispolynomen‹ kombinieren wir nun das gesuchte Polynom mit beliebigen Werten an den Stützstellen als

$$p = \sum_{k=0}^n c_k \lambda_k.$$

Dann gilt:

$$p(a_l) = \sum_{k=0}^n c_k \lambda_k(a_l) = \sum_{k=0}^n b_k \delta_{kl} = c_l, \quad 0 \leq l \leq n. \quad \rangle\rangle\rangle$$

Aufgaben

- 1 Sei $\mathbb{S} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Welche Aussagen sind wahr?
 - a. Die komplexe Multiplikation ist eine Operation auf \mathbb{S} .
 - b. Für $z \in \mathbb{S}$ ist $z^{-1} = -z$.
 - c. Für $z \in \mathbb{S}$ ist $z^{-1} = \bar{z}$.
 - d. Die Gleichung $z^4 = 1$ hat in \mathbb{S} genau zwei Lösungen.
- 2 Bestimmen sie zu den folgenden komplexen Zahlen die komplex Konjugierten, die Beträge, die multiplikativ Inversen, sowie alle möglichen Produkte und Quotienten. Stellen sie die Ergebnisse immer in der Form $u + vi$ dar.
 - a. $3 + 2i$
 - b. $2 - 4i$
 - c. $-i$
 - d. $1 - i$
- 3 Bringen sie die folgenden komplexen Zahlen in die Form $u + vi$.
 - a. $\frac{1+i}{1-i}$
 - b. $\left| \frac{2-3i}{3+4i} \right|$
 - c. $(2+3i)^3$
 - d. $\sum_{n=1}^{77} i^n$
- 4 Für $z \in \mathbb{C}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt $\Im \lambda z = \lambda \Im z$.
- 5 Man beweise die *umgekehrte Dreiecksungleichung*

$$|z + w| \geq ||z| - |w||$$

und die *Parallelogrammgleichung*

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2.$$

- 6 Skizzieren sie die folgenden Mengen in der komplexen Ebene.
 - a. $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z - 1 + i| < 2\}$
 - b. $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = |z + 1|\}$
 - c. $\{z \in \mathbb{C} : \Re z^2 = 1\}$
 - d. $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \cdot |z + 1| = r^2\}$
- 7 Zeigen sie, dass es in \mathbb{C} nur die Körperautomorphismen $z \mapsto z$ und $z \mapsto \bar{z}$ gibt. *Hinweis:* Ist ρ ein solcher Automorphismus, so betrachte man $\rho(i)$.
- 8 *Hauptteil der Wurzel* Zu jedem $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ gibt es genau ein $w \in \mathbb{C}$ mit

$$w^2 = z, \quad \Re w > 0.$$

Und zwar ist

$$w = \sqrt{\frac{|z| + \Re z}{2}} + i\sigma \sqrt{\frac{|z| - \Re z}{2}}, \quad \sigma = \operatorname{sgn}(\Im z).$$

- 9 Beweisen sie den Satz über den Koeffizientenvergleich ₃.
- 10 Konstruieren Sie auf \mathbb{F}_2 ein Nullpolynom mit nicht-verschwindenden Koeffizienten.

5

Folgen

Eine *Folge* in einer beliebigen Menge X ist eine Funktion

$$f : \mathbb{N} \rightarrow X,$$

die man üblicherweise durch Aufzählung ihrer Funktionswerte in der Form

$$(f_1, f_2, f_3, \dots) = (f_n)_{n \geq 1} = (f_n)_n = (f_n)$$

angibt. Man spricht von *Zahlenfolgen*, wenn f eine Abbildung nach \mathbb{R} oder \mathbb{C} ist und alle Folgenglieder demzufolge reelle oder komplexe Zahlen sind.

An einer Zahlenfolge interessiert uns vor allem ihr *asymptotisches Verhalten* – also wie sie sich verhält, wenn der Folgenindex gegen Unendlich strebt. Gibt es zum Beispiel einen Punkt, dem sich die Folge ›immer weiter annähert‹ und den man als ihren *Grenzwert* bezeichnen könnte?

Die reelle Folge

$$\left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right)$$

beispielsweise scheint gegen 0 zu streben, denn die Folgenglieder sind positiv, werden aber immer kleiner. Dagegen hat die reelle Folge

$$((-1)^n)_{n \geq 1} = (-1, 1, -1, 1, -1, \dots)$$

wohl keinen Grenzwert, da sie ständig zwischen 1 und -1 wechselt.

Der Begriff des Grenzwertes ist von fundamentaler Bedeutung für die gesamte Analysis. Er präzisiert die intuitive Vorstellung, dass eine Folge einem bestimmten Punkt ›beliebig nahe kommt‹. Auf ihm basieren die Konzepte der Stetigkeit sowie der Differenziation und Integration.

5.1

Grenzwerte reeller Folgen

Wir betrachten zunächst *reelle Folgen*, also Folgen reeller Zahlen. Von zentraler Bedeutung ist der Begriff der *konvergenten Folge* und ihres *Grenzwertes*.

Definition Eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ reeller Zahlen heißt *konvergent*, wenn es eine reelle Zahl a gibt, so dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geq 1$ existiert mit der Eigenschaft, dass

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Diese Zahl a heißt der *Grenzwert* der Folge, geschrieben

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a,$$

und man sagt, (a_n) konvergiert gegen a für n gegen Unendlich. \times

Andere Schreibweisen hierfür sind

$$a_n \rightarrow a, \quad n \rightarrow \infty,$$

oder auch nur kurz $a_n \rightarrow a$ oder $\lim a_n = a$.

Die in der Definition geforderte Eigenschaft wird als ε - N -Test bezeichnet. Zu jeder *Fehlerschranke* $\varepsilon > 0$ muss es eine *Indexschranke* $N \geq 1$ geben, jenseits derer *alle* Folgenglieder einen Abstand kleiner als ε von a haben:

$$n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon.$$

Umgekehrt bedeutet dies, dass *höchstens endlich viele* Folgenglieder einen Abstand größer oder gleich ε von a haben, und zwar allenfalls a_1, \dots, a_{N-1} .

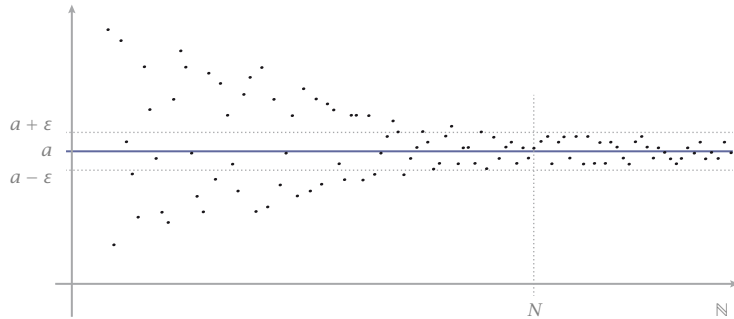
Im ε - N -Test hängt die Schranke N im Allgemeinen von ε ab, weshalb man auch oft $N(\varepsilon)$ schreibt. Es ist aber nicht erforderlich, diese Abhängigkeit *explizit* anzugeben, oder das bestmögliche N zu suchen. Es genügt zu zeigen, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ ein solches $N(\varepsilon)$ gibt.

Im ε - N -Test kommt es auch auf große ε nicht an. Es genügt, hinreichend *kleine* ε zu betrachten. Gilt der ε - N -Test für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ mit irgendeinem $\varepsilon_0 > 0$, so gilt er auch für *alle* $\varepsilon > 0$.

Bei Konvergenzfragen kommt es auch nicht auf die ersten Folgenglieder an. Es spielt keine Rolle, ob die Indizierung einer Folge bei 0, 1, oder irgend einer anderen natürlichen Zahl beginnt. Daher kann man auf eine explizite Angabe im Allgemeinen verzichten, wenn es nur um den Grenzwert geht.

Schließlich spielt es im ε - N -Test keine Rolle, ob man $|a_n - a| < \varepsilon$ oder $|a_n - a| \leq \varepsilon$, oder ob man $n \geq N$ oder $n > N$ fordert. Alle möglichen Formulierungen sind äquivalent.

Abb 1
 ε - N -Test



► **Triviales Beispiel** Jede *konstante* reelle Folge $(a)_{n \geq 1}$ ist konvergent mit Grenzwert a . — Hier ist also $a_n = a$ für alle $n \geq 1$. ◀

1 ► **Beispiel** Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. ◀

◀◀◀ Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert nach dem Prinzip des Archimedes_{3.7} eine natürliche Zahl $N > 1/\varepsilon$. Mit $1/N < \varepsilon$ gilt dann für alle $n \geq N$ ebenfalls

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Somit gilt auch

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Damit haben wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein geeignetes $N \geq 1$ gefunden. ◀◀◀

■ Eindeutigkeit und Beschränktheit

Die Definition des Grenzwertes suggeriert, dass eine konvergente Folge nur *einen* Grenzwert haben kann. Auch wenn dies offensichtlich erscheint, erfordert es einen Beweis.

2 **Eindeutigkeitssatz** *Der Grenzwert einer konvergenten reellen Folge ist eindeutig bestimmt.* ✕

◀◀◀ Angenommen, (a_n) hat zwei verschiedene Grenzwerte \tilde{a} und \hat{a} . Dann ist $\varepsilon = |\tilde{a} - \hat{a}| > 0$. Zu $\varepsilon/2$ existieren ein $\tilde{N} \geq 1$ und $\hat{N} \geq 1$, so dass

$$|a_n - \tilde{a}| < \varepsilon/2, \quad n \geq \tilde{N},$$

$$|a_n - \hat{a}| < \varepsilon/2, \quad n \geq \hat{N}.$$

Mit irgendeinem $N \geq \max(\tilde{N}, \hat{N})$ folgt hieraus mit der Dreiecksungleichung

$$|\tilde{a} - \hat{a}| \leq |\tilde{a} - a_N| + |a_N - \hat{a}| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Dies ist ein Widerspruch zu $\varepsilon = |\tilde{a} - \hat{a}|$. ◀◀◀

- 3 **Beschränktheitsatz** Eine konvergente reelle Folge ist *beschränkt*. Das heißt, es gibt ein reelle Zahl $M \geq 0$, so dass $|a_n| \leq M$ für alle n . ✕

Mit anderen Worten, eine reelle Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ ist beschränkt, wenn die Menge ihrer Folgenglieder $\{a_n : n \geq 1\}$ beschränkt in \mathbb{R} ist.

⟨⟨⟨ Ist (a_n) konvergent mit Grenzwert a , so gibt es zum Beispiel zu $\varepsilon = 1$ ein $N \geq 1$, so dass

$$|a_n - a| < 1, \quad n \geq N.$$

Auslo gilt mit der Dreiecksungleichung auch

$$|a_n| \leq |a_n - a| + |a| < |a| + 1, \quad n \geq N.$$

Wählen wir jetzt

$$M = \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a| + 1\},$$

so gilt $|a_n| \leq M$ für alle n . Somit ist die Folge (a_n) beschränkt. ⟩⟩⟩

Definition Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt *divergent*. ✕

- ▶ **Beispiele**
- A. Die reelle Folge $((-1)^n)_{n \geq 1}$ ist divergent.
 - B. Jede unbeschränkte Folge ist divergent ₃.
 - C. Jede Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ist divergent _{A-4}. ◀

Die Beispiele zeigen insbesondere, dass aus der Beschränktheit einer Folge allein nicht deren Konvergenz folgt. Wir werden jedoch bald sehen, dass jede *beschränkte monotone* Folge konvergiert, und dass jede beschränkte Folge eine *konvergente Teilfolge* besitzt.

5.2

Grenzwertsätze

Um Folgen auf Konvergenz zu untersuchen, verwendet man den ε - N -Test eher selten. Meistens greift man auf bereits bekannte Grenzwerte zurück und wendet *Grenzwertsätze* an. Dabei ist es bequem, den Begriff der konvergenten Folge auf den Begriff der *Nullfolge* zurückzuführen. Dies sind konvergente Folge mit Grenzwert 0.

- 4 **Notiz** Eine reelle Folge (a_n) ist konvergent mit Grenzwert a genau dann, wenn $(a_n - a)$ eine Nullfolge bildet. ✕

⟨⟨⟨ Gilt $a_n \rightarrow a$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geq 1$ so, dass

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Dies ist aber äquivalent mit

$$|(a_n - a) - 0| < \varepsilon, \quad n \geq N,$$

also zu der Aussage, dass $(a_n - a)$ gegen 0 konvergiert. ⟩⟩⟩

- 5 **Majorantenkriterium** Gilt $|a_n - a| \leq |b_n|$ für alle n mit einer Nullfolge (b_n) , so ist die Folge (a_n) konvergent mit Grenzwert a . ✕

⟨⟨⟨ Nach Voraussetzung existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geq 1$, so dass

$$|b_n| < \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Also ist $|a_n - a| \leq |b_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Somit konvergiert (a_n) gegen a . ⟩⟩⟩

▶ **Beispiel** Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 1} = 1$. Denn

$$\left| \frac{n^2}{n^2 + 1} - 1 \right| = \frac{1}{n^2 + 1} < \frac{1}{n},$$

und die rechte Seite bildet eine Nullfolge $\mathbf{1}$. ◀

Nullfolgen haben die nützliche Eigenschaft, »robust« zu sein. Multiplizieren wir sie gliedweise mit einer Folge, von der wir nur wissen, dass sie *beschränkt* ist, so erhalten wir trotzdem wieder eine Nullfolge.

- 6 **Nullfolgensatz** Sei (a_n) eine Nullfolge. Ist (b_n) eine Nullfolge, so ist auch $(a_n + b_n)$ eine Nullfolge. Ist (b_n) nur eine beschränkte Folge, so ist $(a_n b_n)$ immer noch eine Nullfolge. ✕

⟨⟨⟨ Seien (a_n) und (b_n) Nullfolgen. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert dann ein $N \geq 1$, so dass

$$|a_n| < \varepsilon/2, \quad |b_n| < \varepsilon/2, \quad n \geq N.$$

Dann gilt aber auch

$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Da für jedes $\varepsilon > 0$ ein solches N existiert, bildet auch $(a_n + b_n)$ eine Nullfolge.

Sei nun (a_n) eine Nullfolge und (b_n) eine beschränkte Folge. Dann existiert ein $M > 0$, so dass

$$|b_n| \leq M$$

für alle n . Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert dann ein N , so dass

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{M}, \quad n \geq N.$$

Dann aber gilt

$$|a_n b_n| = |a_n| |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Da für jedes $\varepsilon > 0$ ein solches N existiert, bildet auch $(a_n b_n)$ eine Nullfolge. \gggg

► **Beispiele** A. Ist (b_n) eine beliebige beschränkte Folge, so ist (b_n/n) eine Nullfolge:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{n} = 0.$$

B. Das Produkt der Nullfolge $(1/n)$ mit der unbeschränkten Folge (n^2) ist die unbeschränkte Folge (n) und damit *divergent*. Auf die Beschränktheit der Folge (b_n) kann im Nullfolgensatz also nicht verzichtet werden. ◀

■ Grenzwertgleichungen

Es folgen die klassischen Grenzwertsätze für Summe, Produkt und Quotient konvergenter Folgen.

7 **Satz** Sind die reellen Folgen (a_n) und (b_n) konvergent mit $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$, so konvergieren auch $(|a_n|)$, $(a_n + b_n)$ und $(a_n b_n)$, und es gilt

$$|a_n| \rightarrow |a|, \quad a_n + b_n \rightarrow a + b, \quad a_n b_n \rightarrow ab.$$

Ist außerdem $b \neq 0$, so existiert a_n/b_n für alle hinreichend großen n , und

$$a_n/b_n \rightarrow a/b. \quad \times$$

◀◀◀ **Betrag:** Aufgrund der umgekehrten Dreiecksungleichung 2.5 gilt

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|.$$

Da die rechte Seite eine Nullfolge bildet, folgt die Behauptung 5.

Summe: Da $(a_n - a)$ und $(b_n - b)$ Nullfolgen bilden, gilt dies auch für deren Summe $((a_n + b_n) - (a + b))$. Das entspricht der Behauptung.

Produkt: Es ist

$$a_n b_n - ab = (a_n - a)b_n + (b_n - b)a.$$

Nach Voraussetzung sind $(a_n - a)$ und $(b_n - b)$ Nullfolgen, und nach dem Beschränktheitssatz 3 ist (b_n) beschränkt. Also sind aufgrund des Nullfolgensatzes 6 auch $(a_n - a)b_n$ und $(b_n - b)a$ Nullfolgen. Mit dem eben Bewiesenen

ist auch deren Summe eine Nullfolge, und damit auch $(a_n b_n - ab)$. Also gilt $a_n b_n \rightarrow ab$.

Quotient: Aufgrund der eben bewiesenen Produktregel genügt es zu zeigen, dass $1/b_n \rightarrow 1/b$. Nach Voraussetzung ist $b \neq 0$ und damit $\varepsilon = |b|/2 > 0$. Dazu existiert ein $N \geq 1$, so dass

$$|b_n - b| < \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Dann aber ist

$$|b_n| \geq |b| - \varepsilon = 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Somit ist $(1/b_n)_{n \geq N}$ beschränkt¹. Schreiben wir jetzt

$$\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b} = \frac{b - b_n}{b_n b},$$

so ist die rechte Seite das Produkt einer Nullfolge mit einer beschränkten Folge, also wieder eine Nullfolge⁶. Also gilt $1/b_n \rightarrow 1/b$. \gggg

Für konvergente Folgen (a_n) und (b_n) gilt somit

$$\lim(a_n * b_n) = (\lim a_n) * (\lim b_n)$$

für $* \in \{+, \cdot, :\}$, im Fall der Division allerdings nur, wenn $\lim b_n \neq 0$. Man sagt, die Grenzwertbildung *vertauscht* mit den arithmetischen Operationen. Später werden wir dies als die *Stetigkeit* dieser Operationen auf \mathbb{R} interpretieren.

\blacktriangleright *Beispiele* A. Bevor man Grenzwertgleichungen anwenden kann, sind oft Umformungen nötig, um konvergente Folgen zu erhalten. Ein typisches Beispiel sind Quotienten, deren Zähler und Nenner für sich betrachtet divergieren. So gilt

$$\frac{n^2 + 2n + 3}{n^2} = 1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2} \rightarrow 1.$$

B. Allgemein kürzt man rationale Ausdrücke durch die höchste Potenz, die in Zähler und Nenner auftritt:

$$\frac{n}{n^2 + 2n + 3} = \frac{1/n}{1 + 2/n + 3/n^2} \rightarrow \frac{0}{1} = 0,$$

und

$$\frac{(n^2 + 1)(n - 3)}{(2n + 1)^3} = \frac{(1 + 1/n^2)(1 - 3/n)}{(2 + 1/n)^3} \rightarrow \frac{1 \cdot 1}{2^3} = \frac{1}{8}. \quad \blacktriangleleft$$

¹ Da es auf die ersten Folgenglieder nicht ankommt, fordern wir nicht explizit, dass *alle* b_n von Null verschieden sind.

■ Grenzwertungleichungen

Mindestens ebenso wichtig wie Gleichungen für Grenzwerte sind *Ungleichungen*. Das nächste Lemma bildet hierfür die Grundlage.

- 8 **Lemma** Sei (a_n) eine konvergente reelle Folge und b eine reelle Zahl. Gilt für jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$a_n \leq b + \varepsilon$$

für unendlich viele n , so ist

$$\lim a_n \leq b. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Sei $a = \lim a_n$. Wäre $a > b$, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$ mit $a - \varepsilon \geq b + \varepsilon$, und dazu ein $N \geq 1$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Insbesondere gilt dann

$$a_n > a - \varepsilon \geq b + \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Dann aber gilt $a_n \leq b + \varepsilon$ nicht mehr für unendlich viele n – ein Widerspruch. Also ist $a \leq b$. ⟩⟩⟩

Bemerkung Typischerweise gilt $a_n \leq b + \varepsilon$ für alle $n \geq N$ mit einem hinreichend großen N . Aber dies wird im Beweis nicht benötigt. \rightarrow

- 9 **Grenzwertungleichung** Die reellen Folgen (a_n) und (b_n) seien konvergent. Gilt $a_n \leq b_n$ für unendlich viele n , so gilt auch

$$\lim a_n \leq \lim b_n. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Sei $b = \lim b_n$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \geq 1$, so dass $|b_n - b| < \varepsilon$ für $n \geq N$. Insbesondere gilt dann $b_n < b + \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Folglich gibt es unendlich viele n mit der Eigenschaft, dass

$$a_n \leq b_n < b + \varepsilon.$$

Mit dem vorangehenden Lemma folgt daraus $\lim a_n \leq b = \lim b_n$. ⟩⟩⟩

Achtung: Selbst wenn $a_n < b_n$ für *alle* n gelten sollte, folgt daraus *nicht*, dass die strikte Ungleichung auch für die Grenzwerte gilt. Für $a_n = -1/n$ und $b_n = 1/n$ gilt offensichtlich

$$a_n < b_n, \quad n \geq 1,$$

aber

$$\lim a_n = 0 = \lim b_n.$$

Strikte Ungleichungen überleben einen Grenzübergang im Allgemeinen nicht, und Grenzwertungleichungen schließen immer auch den Fall der Gleichheit ein.

5.3 Einige wichtige Grenzwerte

10 Lemma Für jede reelle Zahl q mit $|q| < 1$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$. \times

⟨⟨⟨ Der Fall $q = 0$ ist trivial. Sei also $0 < |q| < 1$. Dann ist

$$|q| = \frac{1}{1 + \varepsilon}$$

mit einer reellen Zahl $\varepsilon > 0$. Aufgrund der Bernoullischen Ungleichung $_{3.3}$ ist

$$(1 + \varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon, \quad n \geq 1.$$

Damit erhalten wir

$$|q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1 + \varepsilon)^n} \leq \frac{1}{1 + n\varepsilon} \leq \frac{1}{n\varepsilon}.$$

Da auf der rechten Seite eine Nullfolge steht, bildet aufgrund des Majorantenkriterium $_{5}$ auch q^n eine Nullfolge. $\rangle\rangle\rangle$

11 Lemma Für jede reelle Zahl q mit $|q| < 1$ und jedes $p \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^p q^n = 0.$$

Somit dominiert q^n jede Potenz von n , wenn $|q| < 1$. \times

⟨⟨⟨ Sei $q \neq 0$, und betrachte $a_n := n^p |q|^n$. Für festes p folgt aus den Grenzwertsätzen $_{7}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^p = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)^p = 1.$$

Also gilt auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^p |q| = |q| < 1.$$

Wählen wir eine beliebige reelle Zahl r mit $|q| < r < 1$, so gibt es also ein $N \geq 1$ mit der Eigenschaft, dass

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r < 1, \quad n \geq N.$$

Also ist $0 < a_{n+1} < r a_n$ für alle $n \geq N$. Induktiv folgt daraus

$$0 < a_{N+n} < r^n a_N, \quad n \geq 0.$$

Hier bildet (r^n) aufgrund des letzten Lemmas $_{10}$ eine Nullfolge. Also $_{5}$ bildet auch (a_n) eine Nullfolge. Das ergibt die Behauptung. $\rangle\rangle\rangle$

12 **Lemma** Für jede reelle Zahl a gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0.$$

Die Fakultät wächst somit schneller als jede Potenz. \times

⟨⟨⟨ Fixiere irgendein r mit $0 < r < 1$. Dann gibt es ein $N \geq 1$, so dass

$$\frac{|a|}{n} \leq r, \quad n \geq N.$$

Für alle $n \geq N$ gilt dann

$$0 < \frac{|a|^n}{n!} = \prod_{k=1}^n \frac{|a|}{k} = \prod_{k=1}^N \frac{|a|}{k} \prod_{k=N+1}^n \frac{|a|}{k} \leq |a|^N \prod_{k=N+1}^n r \leq |a|^N r^{n-N}.$$

Die rechte Seite bildet eine Nullfolge bezüglich n , und wir sind fertig. $\rangle\rangle\rangle$

Im nächsten Lemma antizipieren wir die Existenz und Monotonie der n -ten Wurzelfunktion auf den positiven reellen Zahlen _{7.15}.

13 **Lemma** Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $0 < \frac{1}{1 + \varepsilon} < 1$, und daher ₁₁

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(1 + \varepsilon)^n} = 0.$$

Also gibt es ein $N \geq 1$, so dass

$$\frac{n}{(1 + \varepsilon)^n} < 1, \quad n \geq N.$$

Dies ist äquivalent mit $n < (1 + \varepsilon)^n$, oder

$$\sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Da andererseits auch $1 \leq \sqrt[n]{n}$ für alle $n \geq 1$, folgt hieraus

$$|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Da für jedes $\varepsilon > 0$ ein solches N existiert, folgt die Behauptung. $\rangle\rangle\rangle$

5.4 Existenzsätze

Bisher gingen wir davon aus, dass wir den Grenzwert einer konvergenten Folge kennen – schließlich spielt dieser eine zentrale Rolle in der Definition ihrer Konvergenz. Tatsächlich sieht man jedoch vielen konvergenten Folgen *nicht an*, welchen Grenzwert sie haben. So ist die Folge der reellen Zahlen

$$e_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

konvergent ¹⁵, auch wenn wir ihren Grenzwert nicht kennen.

Es stellt sich deshalb die Frage, ob man nur durch Betrachten einer Folge selbst auf deren Konvergenz und die Existenz eines Grenzwertes schließen kann. Am einfachsten ist diese Frage für *monotone* Folgen zu beantworten.

■ Monotone Folgen

Definition Eine reelle Folge (a_n) heißt *monoton steigend*, falls

$$a_n \leq a_{n+1}$$

für alle n gilt. Sie heißt *streng monoton steigend*, falls sogar

$$a_n < a_{n+1}$$

für alle n gilt. Analog sind *monoton fallend* und *streng monoton fallend* definiert. Schließlich heißt eine Folge (*streng*) *monoton*, wenn sie (*streng*) *monoton steigt oder fällt*. ✕

Konvergiert eine Folge (a_n) *monoton* gegen ihren Grenzwert a , so schreibt man auch genauer $a_n \nearrow a$ für monoton steigende und $a_n \searrow a$ für monoton fallende Folgen.

- 14 **Satz von der monotonen Konvergenz** Eine monotone Folge (a_n) ist konvergent genau dann, wenn sie beschränkt ist. In diesem Fall gilt

$$\lim a_n = \sup \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$$

für monoton steigende Folgen. Für monoton fallende Folgen gilt entsprechend $\lim a_n = \inf \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. ✕

⟷ ⇒ Jede konvergente Folge ist beschränkt ₃.

⇐ Sei umgekehrt etwa (a_n) monoton steigend und beschränkt. Dann ist die Menge $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt, und es existiert die reelle Zahl

$$a = \sup A < \infty.$$

Aufgrund des Approximationssatzes 2.9 existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Element $a_N \in A$ mit $a - \varepsilon < a_N \leq a$. Aufgrund der Monotonie der Folge (a_n) und der Definition von a als obere Schranke aller a_n gilt dann auch

$$a - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq a, \quad n \geq N.$$

Das aber bedeutet, dass

$$|a_n - a| < \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt also $\lim a_n = a = \sup A$. \gggg

Bemerkung Die Existenz des Grenzwertes folgt somit aus der Existenz eines Supremums, und damit aus der Vollständigkeit der reellen Zahlen. Im Körper \mathbb{Q} gilt der Satz *nicht* $A_{5.1}$. \rightsquigarrow

15 \Rightarrow *Beispiel* Die Folge der Summen

$$e_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n!}$$

ist offensichtlich streng monoton steigend. Außerdem ist zum Beispiel

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}, \quad k \geq 1.$$

Somit gilt mit $q = 1/2$ 3.10

$$e_n - 1 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \leq \frac{1}{1 - q} = 2.$$

Die Folge ist also beschränkt, und es existiert die *Eulersche Zahl*

$$e := \lim_{n \rightarrow \infty} e_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} =: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!},$$

wobei $e \leq 3$ aufgrund unserer groben Abschätzung. \lll

■ Teilfolgen

Nicht jede reelle Folge ist monoton. Man kann aber immer eine monotone *Teilfolge* auswählen, indem man nur einen Teil der Folgenglieder betrachtet und die übrigen ignoriert.

Definition Ist $(a_n)_n$ eine Folge in einer Menge X und $(n_k)_k$ eine streng monoton steigende Folge natürlicher Zahlen, so heißt

$$(a_{n_k})_k = (a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$$

eine *Teilfolge* von (a_n) . Die Folge $(n_k)_k$ selbst heißt eine *Auswahlfolge*. \times

Eine Teilfolge ist also die Komposition einer Folge $a: \mathbb{N} \rightarrow X$ mit einer streng monoton steigenden Folge $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, also die Folge

$$a \circ \varphi = (a_{\varphi(n)})_{n \geq 1} = (a_{\varphi(1)}, a_{\varphi(2)}, \dots).$$

► **Beispiele** A. $(1/n^2)$ und (2^{-n}) sind Teilfolgen von $(1/n)$.

B. Die Folge $(0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, \dots)$ besitzt unter anderem die beiden Teilfolgen $(0, 0, 0, \dots)$ und $(1, 2, 3, \dots)$.

C. Die Folge $((-1)^n)$ besitzt die beiden Teilfolgen

$$(1, 1, \dots), \quad (-1, -1, \dots),$$

und noch viele andere, zum Beispiel $((-1)^{k^3})$ oder $((-1)^{k!})$.

D. Jede Folge besitzt übrigens überabzählbar viele Teilfolgen A-21. ◀

Jede Teilfolge einer *konvergenten* Folge ist offensichtlich ebenfalls konvergent mit demselben Grenzwert. Interessanter ist die Frage, ob *jede* Folge eine konvergente Teilfolge besitzt. Die Antwort gibt der Satz von Bolzano-Weierstraß 17, der auf folgender Beobachtung basiert.

16 Lemma Jede reelle Folge (a_n) enthält eine monotone Teilfolge. ✕

⟨⟨⟨⟨ Betrachte die Menge

$$A = \{n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_m \text{ für alle } m \geq n\}.$$

Ist A *unendlich*, so bildet eine streng monotone Abzählung von A eine Auswahlfolge (n_k) mit der Eigenschaft, dass

$$a_{n_k} \geq a_{n_{k+1}}.$$

Also ist (a_{n_k}) monoton *fallend*. Ist dagegen A *endlich*, so ist $\sup A < \infty$, und das gilt auch, wenn A leer ist. Zu jedem $n > \sup A$ existiert dann ein $m > n$ mit

$$a_n < a_m,$$

denn andernfalls wäre $n \in A$. Auf diese Weise können wir induktiv eine Auswahlfolge (n_k) konstruieren, so dass

$$a_{n_k} < a_{n_{k+1}}.$$

Wir erhalten somit eine streng monoton *steigende* Teilfolge (a_{n_k}) . ⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Der Satz behauptet *nicht*, dass man immer je eine monoton fallende und eine steigende Teilfolge auswählen kann. Ist zum Beispiel die Ausgangsfolge monoton steigend, so ist auch jede Teilfolge monoton steigend. ◻

- 17 **Satz von Bolzano-Weierstraß** Jede beschränkte reelle Folge besitzt eine konvergente Teilfolge. ✕

⟨⟨⟨ Mit dem vorangehenden Lemma können wir aus jeder Folge eine monotone Teilfolge auswählen. Diese ist beschränkt, wenn die Originalfolge beschränkt ist. Also ist sie mit dem Satz von der monotonen Konvergenz ₁₄ konvergent. ⟩⟩⟩

▶ **Beispiele** A. $((-1)^n)$ besitzt unter anderem die konvergenten Teilfolgen $(1, 1, \dots)$ und $(-1, -1, \dots)$.

B. Jede Abzählung der rationalen Zahlen im Intervall $[0, 1]$ besitzt eine konvergente Teilfolge. Es gibt sogar zu jeder reellen Zahl $x \in [0, 1]$ eine Teilfolge, die gegen x konvergiert.

C. Die monotone Folge $(1, 2, 3, \dots)$ besitzt *keine* konvergente Teilfolge. Sie ist aber auch nicht beschränkt. ◀

■ Cauchyfolgen

Wann aber ist eine beschränkte Folge auch ohne Auswahl einer Teilfolge konvergent? Mit anderen Worten, wann kann man von der Konvergenz einer Teilfolge auf die Konvergenz der gesamten Folge schließen? Die Untersuchung dieser Frage führt zum Begriff der *Cauchyfolge*.

Definition Eine reelle Folge (a_n) heißt *Cauchyfolge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geq 1$ gibt, so dass

$$|a_m - a_n| < \varepsilon, \quad m, n \geq N. \quad \times$$

In einer Cauchyfolge wird der Abstand *aller* Folgenglieder untereinander also beliebig klein, wenn deren Indizes nur groß genug sind.

- 18 ▶ **Beispiele** A. $((-1)^n)$ bildet *keine* Cauchyfolge, denn

$$|(-1)^{n+1} - (-1)^n| = 2, \quad n \geq 1.$$

- B. Für die Summen e_n von Beispiel 15 gilt für alle $m \geq n \geq 1$

$$|e_m - e_n| = \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2^{k-1}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Da dies für alle $m \geq n$ gilt und die rechte Seite eine Nullfolge in n bildet, ist (e_n) eine Cauchyfolge. ◀

Weitere Beispiele für Cauchyfolgen sind an dieser Stelle nicht nötig. Denn es gilt ganz allgemein:

- 19 **Satz** Jede konvergente reelle Folge ist eine Cauchyfolge. ✕

⟨⟨⟨⟨ Sei (a_n) konvergent mit Grenzwert a . Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geq 1$, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon/2, \quad n \geq N.$$

Für alle $m, n \geq N$ gilt dann aufgrund der Dreiecksungleichung

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a - a_n| < \varepsilon.$$

Somit bildet (a_n) eine Cauchyfolge. ⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Es reicht nicht, nur die Abstände $|a_{n+1} - a_n|$ zu betrachten. So bilden die Summen

$$h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

eine streng monoton steigende Folge, und es gilt

$$|h_{n+1} - h_n| = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0.$$

Trotzdem ist diese Folge divergent 6.4. \rightarrow

Uns interessiert natürlich vor allem die Frage, ob auch umgekehrt eine Cauchyfolge immer konvergiert. Dazu zunächst zwei Teilergebnisse.

20 **Lemma 1** *Jede Cauchyfolge ist beschränkt.* ✕

⟨⟨⟨⟨ Dies wird genauso bewiesen wie der Beschränktheitsatz 3. Nur wählt man statt des Grenzwertes a zum Beispiel das Folgenglied a_N . ⟩⟩⟩⟩

21 **Lemma 2** *Besitzt eine Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge, so ist auch die Gesamtfolge konvergent, und die Grenzwerte stimmen überein.* ✕

⟨⟨⟨⟨ Sei (a_n) eine Cauchyfolge, (a_{n_k}) eine konvergente Teilfolge, und a ihr Grenzwert. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert aufgrund der Cauchyfolgen-Eigenschaft ein $N \geq 1$, so dass

$$|a_m - a_n| < \varepsilon/2, \quad m, n \geq N.$$

Aufgrund der Konvergenz der Teilfolge existiert außerdem ein $K \geq 1$, so dass

$$|a_{n_k} - a| < \varepsilon/2, \quad k \geq K.$$

Wählen wir ein $k \geq K$ mit $n_k \geq N$, so folgt

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt die Konvergenz von (a_n) gegen a . ⟩⟩⟩⟩

Zusammen mit dem Satz von Bolzano-Weierstrass folgt nun das Konvergenzkriterium von Cauchy, das ohne Kenntnis des Grenzwertes auskommt.

- 22 **Cauchy Kriterium** Eine reelle Folge ist konvergent genau dann, wenn sie eine Cauchyfolge bildet. ✕

⟨⟨⟨⟨ ⇒ Siehe oben 19.

⇐ Eine reelle Cauchyfolge (a_n) ist beschränkt 20. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 17 besitzt sie also eine konvergente Teilfolge. Dann 21 ist aber auch die gesamte Folge konvergent mit demselben Grenzwert. ⟩⟩⟩⟩

- 23 ▶ **Beispiel** Die durch

$$d_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

definierte Folge (d_n) ist nicht monoton, doch für $m > n \geq 1$ gilt

$$|d_m - d_n| \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

mit derselben Abschätzung wie in Beispiel 18. Also ist auch (d_n) eine Cauchyfolge und damit konvergent. Übrigens gilt

$$\lim d_n = \frac{1}{e} = \frac{1}{\lim e_n}.$$

Dies ergibt sich aus der Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion. ◀

5.5 Häufungswerte

Es gibt Folgen, die nicht konvergieren, aber trotzdem einem oder mehreren Punkten immer wieder ›beliebig nahe‹ kommen. Statt von Grenzwerten spricht man in diesen Fällen von *Häufungswerten*.

Definition Eine reelle Zahl a heißt *Häufungswert* einer reellen Folge (a_n) , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $N \geq 1$ ein $n \geq N$ gibt, so dass

$$|a_n - a| < \varepsilon. \quad \times$$

Da es zu *jedem* N ein solches $n \geq N$ gibt, ist die Menge $\{n : |a_n - a| < \varepsilon\}$ *unbeschränkt*. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es daher *unendlich viele* n mit der Eigenschaft, dass $|a_n - a| < \varepsilon$. Nicht verlangt wird dagegen, dass dies für *alle hinreichend großen* n gilt.

- **Beispiele** A. $(1/n)$ hat 0 als Häufungswert und als Grenzwert.
 B. $((-1)^n)$ hat die zwei Häufungswerte 1 und -1 .
 C. (n) hat keinen Häufungswert.
 D. $(\sin(n\pi/2 + 1/n))$ hat die drei Häufungswerte -1 , 0 und 1. ◀

Den Unterschied zwischen Grenz- und Häufungswert verdeutlicht folgende *Sprachregelung*. Eine Eigenschaft A gilt für *unendlich viele* n , wenn die Menge $\{n \in \mathbb{N} : A(n)\}$ unbeschränkt ist. Sie gilt *für alle bis auf endlich viele* n , oder kurz für *fast alle* n , wenn die Menge $\{n \in \mathbb{N} : \neg A(n)\}$ endlich und damit beschränkt ist.

- **Beispiele** A. Fast alle Primzahlen sind ungerade.
 B. Unendlich viele natürlichen Zahlen sind ungerade, aber nicht fast alle.
 C. Fast alle ungeraden Zahlen sind nicht durch 2 teilbar. ◀

Schließlich führen wir noch den grundlegenden Begriff der *Umgebung* ein. Ist $a \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$, so nennen wir das offene Intervall

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

die ε -*Umgebung* von a . Sie besteht aus allen reellen Zahlen x , deren Abstand von a strikt kleiner als ε ist. — Mit diesen Begriffen können wir Häufungs- und Grenzwerte wie folgt charakterisieren.

- 24 **Charakterisierung von Häufungs- und Grenzwert** *Eine reelle Zahl a ist Häufungswert einer reellen Folge (a_n) genau dann, wenn in jeder ε -Umgebung von a unendlich viele Folgenglieder liegen. Sie ist ihr Grenzwert, wenn in jeder ε -Umgebung sogar fast alle Folgenglieder liegen.* ✕

Jeder Grenzwert ist somit ein Häufungswert. Aber nicht jeder Häufungswert ist ein Grenzwert. Eine Folge kann keinen, einen, oder viele Häufungswerte haben. Selbst wenn sie nur einen Häufungswert hat, muss dieser kein Grenzwert sein.

- **Beispiele** A. $((-1)^n)_{n \geq 0}$ besitzt genau zwei Häufungswerte, 1 und -1 .
 B. $(1, 2, 3, \dots)$ besitzt keinen Häufungswert.
 C. $(0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots)$ besitzt 0 als einzigen Häufungswert, ist aber nicht konvergent. ◀

Zwischen Häufungswert und Teilfolge besteht folgender Zusammenhang, der ebenfalls als Charakterisierung von Häufungswerten dienen kann.

- 25 **Satz** *Eine reelle Folge (a_n) besitzt a als Häufungswert genau dann, wenn es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen a konvergiert.* ✕

⟨⟨⟨⟨ ⇐ Gibt es eine Teilfolge (a_{n_k}) mit $a_{n_k} \rightarrow a$, so liegen in jeder ε -Umgebung von a fast alle Glieder der Teilfolge. Damit liegen in dieser Umgebung aber auch unendlich viele Glieder der Originalfolge. Also ist a ein Häufungswert dieser Folge.

⇒ Sei umgekehrt a ein Häufungswert der Folge (a_n) . Sei (ε_n) eine beliebige monoton fallende Nullfolge, zum Beispiel $\varepsilon_n = 1/2^n$. Dann definieren wir rekursiv eine Auswahlfolge (n_k) durch $n_1 := 1$ und

$$n_k := \min \{n > n_{k-1} : a_n \in U_{\varepsilon_k}(a)\}, \quad k \geq 2.$$

Da a ein Häufungswert ist, sind die betrachteten Mengen nicht leer und besitzen somit ein Minimum. Offensichtlich gilt dann $n_k > n_{k-1}$.²

Wir behaupten, dass $a_{n_k} \rightarrow a$. Nun, da (ε_n) eine positive Nullfolge bildet, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $K \geq 1$ so, dass

$$0 < \varepsilon_k < \varepsilon, \quad k \geq K.$$

Aufgrund der Definition der n_k gilt dann auch

$$a_{n_k} \in U_{\varepsilon_k}(a) \subset U_\varepsilon(a), \quad k \geq K.$$

In jeder ε -Umgebung von a liegen somit fast alle Glieder der Teilfolge (a_{n_k}) . Also gilt $a_{n_k} \rightarrow a$. ⟩⟩⟩⟩

Den Satz von Bolzano-Weierstraß können wir damit auch so formulieren.

Satz von Bolzano-Weierstraß *Jede beschränkte reelle Folge besitzt einen Häufungswert.* ✕

⟨⟨⟨⟨ Jede beschränkte reelle Folge besitzt eine konvergente Teilfolge¹⁷. Deren Grenzwert ist damit auch Häufungswert der Gesamtfolge. ⟩⟩⟩⟩

5.6

Uneigentliche Grenzwerte

Neben den klassisch konvergenten Folgen hat man es oft auch mit Folgen zu tun, die in gewisser Weise gegen ∞ oder $-\infty$ streben. Dieses Verhalten können wir präzisieren, indem wir auch für diese Fälle geeignete Umgebungen betrachten. Dazu definieren wir für alle $\varepsilon > 0$ die offenen Intervalle

$$U_\varepsilon(\infty) := (1/\varepsilon, \infty), \quad U_\varepsilon(-\infty) := (-\infty, -1/\varepsilon)$$

² Statt des Minimums könnten wir auch irgendein Element dieser Menge wählen. Das daran anschließende Argument bleibt davon unberührt.

als ε -Umgebungen von ∞ respektive $-\infty$. Es gilt dann beispielsweise

$$U_\delta(\infty) \subset U_\varepsilon(\infty), \quad 0 < \delta < \varepsilon.$$

Die Umgebungen werden also ›kleiner‹, wenn ε kleiner wird – wie es sich für Umgebungen gehört. Man beachte, dass diese Umgebungen die Punkte ∞ respektive $-\infty$ nicht enthalten.

Definition Eine reelle Folge (a_n) *konvergiert uneigentlich gegen ∞* , wenn in jeder ε -Umgebung von ∞ fast alle Folgenglieder liegen. Man nennt dann ∞ den *uneigentlichen Grenzwert* einer solchen Folge und schreibt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty.$$

Entsprechendes gilt für die uneigentliche Konvergenz gegen $-\infty$. ✕

Auch im Fall der uneigentlichen Konvergenz ist der Grenzwert *eindeutig bestimmt*. Aber natürlich ist eine uneigentlich konvergente Folge *nicht beschränkt*.

Notiz Es gilt $a_n \rightarrow \infty$ genau dann, wenn zu jedem $M > 0$ ein $N \geq 1$ existiert, so dass

$$a_n > M, \quad n \geq N.$$

Jede beliebige Schranke wird also von fast allen Folgengliedern übertroffen. ✕

► **Beispiel** Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

Denn sei $M > 0$. Wegen $M^n/n! \rightarrow 0$ ¹² gibt es ein N , so dass

$$\frac{M^n}{n!} < 1, \quad n \geq N.$$

Für $n \geq N$ ist also $n! > M^n$ und damit $\sqrt[n]{n!} > M$. ◀

■ Grenzwertsätze

Die Grenzwertgleichungen ⁷ verallgemeinern sich nur unter zusätzlichen Voraussetzungen auf uneigentliche Grenzwerte. Um diese handlich zu formulieren, schreiben wir $a_n \succ c$ mit einer reellen Konstanten c , wenn $a_n > c$ für fast alle n gilt.

26 Satz Für reelle Folgen (a_n) und (b_n) gilt:

- (i) $|a_n| \rightarrow \infty \Rightarrow a_n^{-1} \rightarrow 0$.
- (ii) $a_n \rightarrow 0 \wedge a_n \succ 0 \Rightarrow a_n^{-1} \rightarrow \infty$.
- (iii) $a_n \rightarrow \infty \wedge b_n \succ c \Rightarrow a_n + b_n \rightarrow \infty$.

(iv) $a_n \rightarrow \infty \wedge b_n > c > 0 \Rightarrow a_n b_n \rightarrow \infty$. ✕

««« Sei jeweils $\varepsilon > 0$. (i) Gilt $|a_n| > 1/\varepsilon$ für fast alle n , so gilt auch

$$|a_n^{-1}| = |a_n|^{-1} < \varepsilon$$

für fast alle n . Also bildet (a_n^{-1}) eine Nullfolge.

(ii) Nach Voraussetzung sind fast alle Folgenglieder a_n positiv. Da (a_n) eine Nullfolge bildet, gilt $0 < a_n < \varepsilon$ für fast alle n . Dann gilt aber auch

$$\frac{1}{\varepsilon} < \frac{1}{a_n},$$

also $a_n^{-1} \in U_\varepsilon(\infty)$ für fast alle n . Somit gilt $a_n^{-1} \rightarrow \infty$.

(iii) Wegen $a_n \rightarrow \infty$ gilt $a_n > 1/\varepsilon - c$ für fast alle n . Also gilt auch

$$a_n + b_n > \frac{1}{\varepsilon} - c + b_n > \frac{1}{\varepsilon}$$

für fast alle n . Fast alle Glieder der Folge $(a_n + b_n)$ liegen somit in $U_\varepsilon(\infty)$, was zu zeigen war.

(iv) Für fast alle n gilt $a_n > \varepsilon/c$. Mit $b_n > c > 0$ für fast alle n folgt

$$a_n b_n > a_n c > 1/\varepsilon$$

für fast alle n . Also konvergiert auch $(a_n b_n)$ uneigentlich gegen ∞ . »»»

Die Aussagen werden *falsch*, wenn man die $>$ -Bedingungen fallen lässt A-31.

Interpretieren wir die Symbole $\pm\infty$ als Grenzwerte uneigentlich konvergenter Folgen und identifizieren eine reelle Zahl x mit einer konstanten Folge, so rechtfertigt dieser Satz die folgenden Vereinbarungen für das Rechnen mit diesen Symbolen. Für reelle x *definieren* wir demnach

$$\infty + x := \infty, \quad \frac{x}{\infty} = 0, \quad \infty \cdot x := \begin{cases} \infty, & x > 0, \\ -\infty, & x < 0. \end{cases}$$

Die Konventionen für $-\infty$ erhält man durch Ersetzen von ∞ durch $-\infty$.

Nicht erklärt sind dagegen die Ausdrücke

$$\infty - \infty, \quad \infty \cdot 0, \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Ihnen lässt sich kein Wert in sinnvoller Weise zuordnen, denn mit geeigneten Folgen kann man *jeden Wert* als Grenzwert realisieren A-35.

Wir erweitern jetzt noch drei Existenzsätze auf uneigentliche Grenzwerte.

- 27 **Erweiterter Approximationssatz** *In jeder nichtleeren Menge A reeller Zahlen existiert eine Folge (a_n) , die gegen $\sup A$ konvergiert. Entsprechendes gilt für $\inf A$.* ✕

⟨⟨⟨ Sei $a = \sup A$ und (ε_n) eine beliebige Nullfolge positiver Zahlen. Aufgrund des Approximationssatzes _{2.9} existiert zu jedem n ein Element

$$a_n \in U_{\varepsilon_n}(a) \cap A.$$

Dies gilt sowohl für $a < \infty$ als auch für $a = \infty$. Die so gewonnene Folge (a_n) liegt in A , und genau wie zuvor _{2.5} zeigt man, dass sie gegen a konvergiert. ⟩⟩⟩

Erweiterter Satz von der monotonen Konvergenz *Jede monotone Folge konvergiert gegen einen eigentlichen oder uneigentlichen Grenzwert.* ✕

⟨⟨⟨ Ist die Folge beschränkt, so kommt der Satz von der monotonen Konvergenz _{1.4} zur Anwendung. Andernfalls ist die Folge unbeschränkt. Wegen der Monotonie hat sie dann den uneigentlichen Grenzwert ∞ oder $-\infty$. ⟩⟩⟩

Erweiterter Satz von Bolzano-Weierstraß *Jede reelle Folge besitzt eine eigentlich oder uneigentlich konvergente Teilfolge.* ✕

⟨⟨⟨ Dies folgt mit dem Satz von der Existenz monotoner Teilfolgen _{1.6} und dem erweiterten Satz von der monotonen Konvergenz. ⟩⟩⟩

▶ **Beispiele** A. $(n!^{n!})$ konvergiert uneigentlich gegen ∞ .

B. $(0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots)$ besitzt die konvergente Teilfolge $(0, 0, \dots)$ und die uneigentlich konvergente Teilfolge $(1, 2, 3, \dots)$.

C. $((-1)^n n)$ besitzt die uneigentlich konvergenten Teilfolgen $(2, 4, 6, \dots)$ und $(-1, -3, -5, \dots)$. ◀

5.7

Normierte Räume und Banachräume

Bisher haben wir Folgen in \mathbb{R} und deren Konvergenz betrachtet. Aber natürlich wollen wir später auch Folgen in \mathbb{R}^n und vielen anderen Räumen betrachten. Um auch dort Begriffe wie Konvergenz und Grenzwert zu definieren, verallgemeinern wir den *Betrag* einer reellen Zahl zur *Norm* eines Vektors in einem *reellen Vektorraum*. Zunächst definieren wir den Begriff des *reellen Vektorraums*.

Definition Ein *reeller Vektorraum* E ist eine additive Gruppe zusammen mit einer Verknüpfung

$$\mathbb{R} \times E \rightarrow E, \quad (\lambda, v) \mapsto \lambda v,$$

genannt *skalare Multiplikation*, mit folgenden Eigenschaften für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $u, v \in E$:

$$(V-1) \quad 1v = v,$$

$$(V-2) \quad \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v,$$

$$(V-3) \quad (\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v,$$

$$(V-4) \quad \lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v. \quad \times$$

Additive Gruppe bedeutet hierbei, dass für die Addition in E die Axiome (A1-3)_{2.1} gelten. — Die gesamte Spannweite des Begriffs des Vektorraums wird im Laufe der Zeit klar werden. Im Augenblick reichen uns folgende Beispiele.

► A. Das Standardbeispiel ist der \mathbb{R}^n mit der Addition

$$u + v = (u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n) := (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)$$

und der skalaren Multiplikation

$$\lambda v = \lambda(v_1, \dots, v_n) := (\lambda v_1, \dots, \lambda v_n).$$

Diese hat alle geforderten Eigenschaften.

B. Insbesondere kann auch \mathbb{R} als reeller Vektorraum aufgefasst werden. Allerdings ignoriert man dabei die Körperstruktur.

C. Der Raum \mathbb{C} mit der üblichen Addition komplexer Zahlen und der Multiplikation mit *reellen Zahlen* ist ein reeller Vektorraum. Man kann ihn mit dem \mathbb{R}^2 identifizieren. ◀

Die Untersuchung von Vektorräumen ist ein wichtiges Thema der linearen Algebra. Für uns reicht im Moment die Definition, das Standardbeispiel und die Tatsache, dass man auf solchen Räumen das Konzept des Betrages zu dem der *Norm* verallgemeinern kann.

Definition Eine *Norm* auf einem reellen Vektorraum E ist eine Funktion

$$\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften für alle $x, y \in E$ und $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(N-1) \text{ *Definitheit*: } \|x\| \geq 0, \quad \text{und} \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

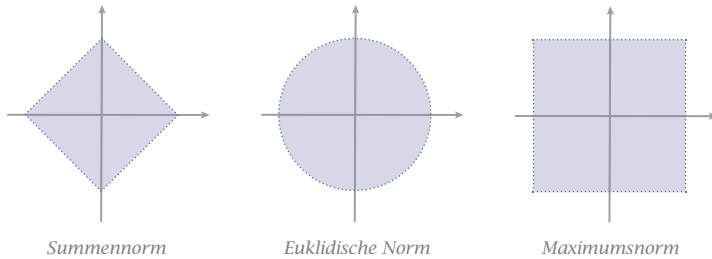
$$(N-2) \text{ *Positive Homogenität*: } \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|,$$

$$(N-3) \text{ *Dreiecksungleichung*: } \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$$

Das Paar $(E, \|\cdot\|)$ nennt man einen *normierten Vektorraum* oder kurz *normierten Raum*. \times

Die Bedingungen (N-1)–(N-3) abstrahieren die wesentlichen Eigenschaften der Betragsfunktion, die eine Längenfunktion auf einem beliebigen Vektorraum aufweisen sollte. Zum Beispiel gilt auch die umgekehrte Dreiecksungleichung.

Abb 2 Einheitskugeln bezüglich verschiedener Normen



28 **Lemma** Für jede Norm gilt die *umgekehrte Dreiecksungleichung*

$$\|x - y\| \geq \left| \|x\| - \|y\| \right|. \quad \times$$

««« Wie bei die Betragsfunktion $_{2.5}$, nur mit $\|\cdot\|$ anstelle von $|\cdot|$. »»»

► *Beispiele* A. Auf \mathbb{R} wie auf \mathbb{C} definiert der Betrag $|\cdot|$ eine Norm, die sogenannte *Betragsnorm*. Die Normeigenschaften haben wir bereits verifiziert $_{2.4}$ & $_{4.2}$.

B. Auf dem \mathbb{R}^n wird durch

$$\|x\|_1 := |x_1| + \dots + |x_n|$$

die sogenannte *Summennorm* und durch

$$\|x\|_\infty := \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$$

die sogenannte *Maximumsnorm* definiert. Die Normeigenschaften sind leicht zu verifizieren.

C. Die *euklidische* oder *natürliche Norm* auf dem \mathbb{R}^n ist

$$\|x\|_2 := \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_n|^2}.$$

Nach dem Satz des Pythagoras misst sie die ›natürliche‹ Länge des Vektors x . Die Gültigkeit der Dreiecksungleichung ist allerdings nicht offensichtlich und wird gleich bewiesen werden.

D. Tatsächlich wird für jedes $p \geq 1$ durch

$$\|x\|_p := \sqrt[p]{|x_1|^p + \dots + |x_n|^p}$$

eine Norm auf \mathbb{R}^n definiert. Das wird uns aber erst später beschäftigen. ◀

■ Skalarprodukte

Um auch den euklidischen Abstand als Norm zu erkennen, benötigen wir noch das Konzept des *Skalarproduktes*.

Definition Ein *Skalarprodukt* auf einem reellen Vektorraum E ist eine Funktion

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

mit folgenden Eigenschaften für alle $x, y, z \in E$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

(S-1) **Definitheit:** $\langle x, x \rangle \geq 0$, und $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(S-2) **Symmetrie:** $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$,

(S-3) **Linearität:** $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$. \times

Wegen der Symmetrie ist ein reelles Skalarprodukt auch linear im zweiten Argument, also

$$\langle x, \lambda y + \mu z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \mu \langle x, z \rangle,$$

Man spricht daher auch von einer *bilinearen Form* auf E . Für diese gilt übrigens $\langle x, 0 \rangle = 0$ für alle $x \in E$.

Für Skalarprodukte gilt folgende grundlegende Ungleichung, die man meist nur *Schwarzsche Ungleichung* nennt.

29 Cauchy-Schwarz-Bunjakowskische Ungleichung Für ein Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum E gilt

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle, \quad x, y \in E.$$

Gleichheit gilt dabei genau dann, wenn x und y linear abhängig sind. \times

⟨⟨⟨⟨ Für jedes Skalarprodukt und jede reelle Zahl λ gilt

$$0 \leq \langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \langle y, y \rangle.$$

Da die Behauptung offensichtlich für $y = 0$ gilt, dürfen wir $y \neq 0$ annehmen. Dann ist $\langle y, y \rangle > 0$, und wir können

$$\lambda = -\frac{\langle x, y \rangle}{\langle y, y \rangle}$$

wählen. Einsetzen in die vorangehende Ungleichung ergibt

$$0 \leq \langle x, x \rangle - 2 \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle} + \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle} = \langle x, x \rangle - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle y, y \rangle}.$$

Multiplikation mit $\langle y, y \rangle > 0$ ergibt die Behauptung

$$0 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2.$$

Angenommen, es gilt sogar Gleichheit. Ist $y = 0$, so sind x und y ohnehin linear abhängig. Ist dagegen $y \neq 0$, so ergibt dieselbe Wahl von λ und dieselbe Rechnung in umgekehrter Richtung die Identität

$$\langle x + \lambda y, x + \lambda y \rangle = 0.$$

Also ist $x + \lambda y = 0$, und x und y sind linear abhängig. \gggg

30 Satz Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf einem Vektorraum E , so definiert

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

eine Norm auf E . \times

\lllll Definitheit ist leicht zu verifizieren. Positive Homogenität folgt mit

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\langle \lambda x, \lambda x \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \sqrt{\langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|.$$

Ferner ist aufgrund der Cauchyungleichung

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle} = \|x\| \|y\|.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle + 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Wurzelziehen ergibt die Dreiecksungleichung. \gggg

\triangleright Das *Standardskalarprodukt* auf dem \mathbb{R}^n ist

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^n x_k y_k = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Somit ist

$$\langle x, x \rangle = |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2.$$

Die hiervon induzierte Norm ist die *euklidische Norm* $\|\cdot\|_2$, die hiermit 30 auch tatsächlich als Norm erkannt ist. \lll

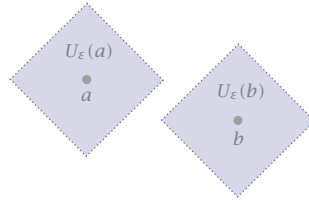
Bemerkung Nicht jede Norm wird durch ein Skalarprodukt gegeben. Dies ist nur dann der Fall, wenn die *Parallelogrammgleichung*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2 \|x\|^2 + 2 \|y\|^2$$

erfüllt ist A-41 . ∞

Abb 3

Trennende Umgebungen
 $U_\varepsilon(a)$ und $U_\varepsilon(b)$



Wir haben damit erste Beispiele von normierten Räumen. Viele weitere werden folgen. Eine zentrale Rolle spielen sie zum Beispiel in der Funktionalanalysis, wo man verschiedenste Räume von Funktionen und Abbildungen studiert.

■ Konvergenz

Um Konvergenz für Folgen in einem normierten Vektorraum E zu definieren, genügt es nun, den Begriff der Umgebung entsprechend zu verallgemeinern. Die ε -Umgebungen eines Punktes a sind hier die Mengen

$$U_\varepsilon(a) := \{x \in E : \|x - a\| < \varepsilon\}.$$

Sie werden auch *offene ε -Kugeln* um a genannt und mit $B_\varepsilon(a)$ bezeichnet.

Allerdings sehen diese Kugeln nur im Fall der euklidischen Norm wie handelsübliche Kugeln aus – siehe Abbildung 2. Dies ist jedoch für mathematische Zwecke unwesentlich. Wichtig ist, dass es um zwei verschiedene Punkte eines normierten Raumes immer ε -Umgebungen gibt, die *disjunkt* sind. Man sagt, man kann verschiedene Punkte durch offene Umgebungen *trennen*.

- 31 **Trennungseigenschaft** Zu je zwei Punkten $a \neq b$ eines normierten Raumes gibt es immer ein $\varepsilon > 0$ derart, dass

$$U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset. \quad \times$$

«»» Man nehme $\varepsilon = \|b - a\| / 2 > 0$ und führe die Annahme, dass die entsprechenden Umgebungen einen Punkt gemeinsam haben, zum Widerspruch. «»»

Die Definition einer konvergenten Folge und ihres Grenzwertes in einem normierten Raum ist nun *wörtlich* dieselbe wie im reellen Fall ²⁴.

Definition und Satz Eine Folge (a_n) in einem normierten Raum E heißt *konvergent* mit Grenzwert a , falls jede ε -Umgebung von a fast alle Folgenglieder enthält. Dieser Grenzwert a ist eindeutig bestimmt. \times

«»» Zu jedem $b \neq a$ existiert aufgrund des Trennungssatzes ³¹ ein $\varepsilon > 0$, so dass die ε -Umgebungen um a und b disjunkt sind. Da fast alle Folgenglieder

in $U_\varepsilon(a)$ liegen, können nur noch höchstens endlich viele in $U_\varepsilon(b)$ liegen. Also kann b kein Grenzwert der Folge sein. \gggg

- 32 **Notiz** In einem normierten Raum konvergiert eine Folge (a_n) genau dann gegen den Punkt a , wenn $(\|a_n - a\|)$ eine reelle Nullfolge bildet. \times

\llll Dies ergibt sich aus

$$a_n \in U_\varepsilon(a) \Leftrightarrow \|a_n - a\| < \varepsilon \Leftrightarrow \|a_n - a\| \in U_\varepsilon(0),$$

wobei $U_\varepsilon(0)$ die ε -Umgebung von $0 \in \mathbb{R}$ meint. \gggg

Bemerkung Der Begriff des Häufungswertes wird entsprechend definiert. In allgemeinen normierten Räumen werden wir ihn allerdings nicht benötigen. \rightarrow

■ Grenzwertsätze

Auch die Grenzwertsätze verallgemeinern sich von reellen Folgen direkt auf Folgen in normierten Räumen. Wir fassen uns daher kurz.

- 33 **Satz** Gilt $a_n \rightarrow a$ in einem normierten Vektorraum E , so gilt auch

$$\|a_n\| \rightarrow \|a\|$$

in \mathbb{R} . Jede konvergente Folge ist daher auch *beschränkt* – das heißt, es gibt ein $M \geq 0$, so dass $\|a_n\| \leq M$ für alle n . \times

\llll Wegen der umgekehrten Dreiecksungleichung gilt

$$|\|a_n\| - \|a\|| \leq \|a_n - a\| \rightarrow 0.$$

Also konvergiert $(\|a_n\|)$ gegen $\|a\|$. Insbesondere ist diese Folge beschränkt. \gggg

- 34 **Grenzwertgleichung für Linearkombinationen** Sind (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen in einem normierten Vektorraum, so ist auch jede Linearkombination $(\lambda a_n + \mu b_n)$ konvergent, und es gilt

$$\lim(\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda(\lim a_n) + \mu(\lim b_n). \quad \times$$

\llll Mit $a = \lim a_n$ und $b = \lim b_n$ ist

$$\begin{aligned} \|(\lambda a_n + \mu b_n) - (\lambda a + \mu b)\| &= \|\lambda(a_n - a) - \mu(b_n - b)\| \\ &\leq |\lambda| \|a_n - a\| + |\mu| \|b_n - b\|. \end{aligned}$$

Wegen $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$ steht auf der rechten Seite eine Nullfolge₃₂. Also bildet auch die linke Seite eine Nullfolge₅, und die Behauptung folgt₃₂. \gggg

■ Konvergenz in \mathbb{R}^m und \mathbb{C}

Eine Folge (x_n) im \mathbb{R}^m heißt auch *vektorwertige Folge*. Hier ist jedes Folgenglied ein m -Tupel, also

$$x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,m}).$$

Ein Grenzwert einer solchen Folge ist dann ebenfalls ein m -Tupel $a = (a_1, \dots, a_m)$.

- 35 **Satz** Eine vektorwertige Folge (x_n) konvergiert gegen a bezüglich der Summen-, euklidischen und Maximumsnorm genau dann, wenn sie *komponentenweise konvergiert*, also gilt:

$$x_{n,i} \rightarrow a_i, \quad 1 \leq i \leq m. \quad \times$$

Zunächst eine Ungleichung, die öfter benötigt wird.

Lemma Für $x \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq m \|x\|_\infty. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Es ist ja

$$\begin{aligned} \left(\max_{1 \leq i \leq m} |x_i|\right)^2 &\leq |x_1|^2 + \dots + |x_m|^2 \\ &\leq (|x_1| + \dots + |x_m|)^2 \leq \left(m \max_{1 \leq i \leq m} |x_i|\right)^2. \end{aligned}$$

Das heißt, es ist $\|x\|_\infty^2 \leq \|x\|_2^2 \leq \|x\|_1^2 \leq m^2 \|x\|_\infty^2$. Wurzelziehen ergibt die Behauptung. ⟩⟩⟩

⟨⟨⟨ *Beweis des Satzes* Aufgrund des letzten Lemmas ist

$$\|x_n - a\|_\infty \leq \|x_n - a\|_2 \leq \|x_n - a\|_1 \leq m \|x_n - a\|_\infty.$$

Bildet also eine dieser Normen eine Nullfolge, dann auch jede andere. Konvergenz in jeder Komponente ist gleichbedeutend mit Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, woraus die Behauptung folgt. ⟩⟩⟩

Komplexe Folgen – also Folgen in \mathbb{C} – können als Spezialfall dieses Satzes betrachtet werden, wenn man \mathbb{C} mit \mathbb{R}^2 identifiziert. Eine komplexe Folge konvergiert genau dann, wenn Real- und Imaginärteile ihrer Folgenglieder konvergieren A-40. – Schließlich gilt auch der

Satz von Bolzano-Weierstraß im \mathbb{R}^m Jede beschränkte vektorwertige Folge besitzt eine konvergente Teilfolge. \times

⟨⟨⟨ Sei $(x_n)_n$ eine beschränkte Folge im \mathbb{R}^m . Sei $x_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,m})$. Dann ist auch jede Komponentenfolge

$$(x_{n,i})_n, \quad 1 \leq i \leq m,$$

beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß für reelle Folgen¹⁷ existiert somit eine erste Teilfolge $(x_{n'_k})$, deren erste Koordinate konvergiert:

$$x_{n'_k,1} \rightarrow a_1.$$

Aus dieser können wir eine zweite Teilfolge $(x_{n''_k})$ auswählen, wo auch die zweite Koordinate konvergiert:

$$x_{n''_k,2} \rightarrow a_2.$$

Diesen Auswahlverfahren können wir fortsetzen, bis wir eine letzte Teilfolge $(x_{n'''_k})$ erhalten, wo auch die letzte Koordinate konvergiert:

$$x_{n'''_k,m} \rightarrow a_m.$$

Somit konvergiert jede Komponente der Teilfolge $(x_{n'''_k})$. Damit³⁵ konvergiert diese Teilfolge aber auch in der euklidischen Norm gegen $a = (a_1, \dots, a_m)$. \gggg

■ Cauchyfolgen und Banachräume

Cauchyfolgen in normierten Räumen sind wie reelle Cauchyfolgen definiert.

Definition Eine Folge (a_n) in einem normierten Vektorraum heißt *Cauchyfolge*, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geq 1$ gibt, so dass

$$\|a_n - a_m\| < \varepsilon, \quad n, m \geq N. \quad \times$$

Jede konvergente Folge ist wieder eine Cauchyfolge, und Lemma 1²⁰ und 2²¹ für reelle Cauchyfolgen gelten genauso in normierten Räumen. In den Beweisen muss man lediglich den Betrag durch die jeweilige Norm ersetzen:

Satz In einem normierten Vektorraum gilt:

- (1) Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.
- (2) Jede Cauchyfolge ist beschränkt.
- (3) Besitzt eine Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge, so ist die gesamte Folge konvergent mit demselben Grenzwert. \times

Der große Unterschied ist jedoch, dass das Cauchy Kriterium im Allgemeinen *nicht mehr gilt*: es gibt normierte Vektorräume, in denen Cauchyfolgen *keinen* Grenzwert haben. Ein Beispiel dafür geben wir im nächsten Abschnitt.

Vielmehr ist dies eine Eigenschaft, die eine wichtige Klasse von normierten Räumen *auszeichnet*, während sie anderen Räumen fehlt. Daher erhalten solche Räume auch einen eigenen Namen.

Definition Ein normierter Vektorraum heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge in ihm einen Grenzwert besitzt. Ein vollständiger, normierter Vektorraum wird *Banachraum* genannt. \times

Die einfachsten Beispiele von Banachräumen kennen wir bereits.

Satz Die Räume \mathbb{R} und \mathbb{C} mit der Betragsnorm sowie \mathbb{R}^n mit der euklidischen, Summen- oder Maximumsnorm sind vollständig, also Banachräume. \times

«««« Jede Cauchyfolge ist beschränkt. Da in den genannten Räumen der Satz von Bolzano-Weierstraß gilt, besitzt jede Cauchyfolge auch eine konvergente Teilfolge. Dann ist aber auch die Cauchyfolge selbst konvergent. »»»»

Bemerkung Wir werden später sehen, dass der \mathbb{R}^n mit jeder Norm vollständig ist, da dort alle Normen äquivalent sind 7.31. \rightarrow

► *Noch ein Beispiel* Sei X eine beliebige nichtleere Menge, und für eine Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ sei

$$\|f\|_X := \sup \{|f(x)| : x \in X\}.$$

Auf dem Raum der beschränkten reellen Funktionen auf X ,

$$B(X) = \{f: X \rightarrow \mathbb{R} : \|f\|_X < \infty\},$$

ist dies eine Norm, und $(B(X), \|\cdot\|_X)$ ist ein Banachraum A-44. \blacktriangleleft

5.8

Der Folgenraum c

Wir geben ein Beispiel eines vollständigen unendlich-dimensionalen Vektorraumes, sowie eines darin enthaltenen nicht-vollständigen Unterraums. Diese Resultate werden wir später nicht benötigen, der Abschnitt kann also beim ersten Lesen übersprungen werden.

Wir betrachten den Raum c aller konvergenten reellen Folgen,

$$c := \{\mathbf{a} = (a_n)_{n \geq 1} : (a_n) \text{ ist reell und konvergent}\}.$$

Lemma Der Raum c ist ein reeller Vektorraum bezüglich punktweiser Addition und skalarer Multiplikation von Folgen. \times

«««« Die Linearkombination $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$ zweier Elemente in c ist erklärt durch

$$(\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b})_n = \lambda a_n + \mu b_n, \quad n \geq 1.$$

Aus dem Satz über Grenzwertgleichungen 7 folgt, das $\lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}$ ebenfalls konvergiert, also Element von c ist. Somit ist c ein reeller Vektorraum. »»»»

Lemma *Mit der Supremumsnorm*

$$\|\alpha\| := \sup_{n \geq 1} |a_n|$$

wird c zu einem normierten Vektorraum. \times

⟨⟨⟨ Da jede konvergente Folge beschränkt ist₂₀, ist $\|\cdot\|$ eine Abbildung von c nach \mathbb{R} . Die Normeigenschaften sind leicht zu verifizieren. So ist

$$\begin{aligned} \|\alpha + \beta\| &= \sup_{n \geq 1} |a_n + b_n| \\ &\leq \sup_{n \geq 1} (|a_n| + |b_n|) \\ &\leq \sup_{n \geq 1} |a_n| + \sup_{n \geq 1} |b_n| = \|\alpha\| + \|\beta\|. \end{aligned}$$

36 Satz *Der normierte Raum $(c, \|\cdot\|)$ ist vollständig.* \times

⟨⟨⟨ Sei $(\alpha_m)_{m \geq 1}$ eine Cauchyfolge in c mit Gliedern $\alpha_m = (a_{m,n})_{n \geq 1}$. Dann ist auch für jedes $n \geq 1$ die Komponentenfolge $(a_{m,n})_{m \geq 1}$ eine reelle Cauchyfolge, denn

$$|a_{k,n} - a_{l,n}| \leq \|\alpha_k - \alpha_l\|.$$

Aufgrund der Vollständigkeit von \mathbb{R} existieren also die Grenzwerte

$$b_n = \lim_{m \rightarrow \infty} a_{m,n}, \quad n \geq 1.$$

Aus diesen bilden wir die Folge $\beta = (b_n)_{n \geq 1}$ und zeigen, dass β ebenfalls konvergent und damit zu c gehört, und dass $\alpha_m \rightarrow \beta$ in der Supremumsnorm.

Da $(\alpha_m)_{m \geq 1}$ eine Cauchyfolge bildet, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $K \geq 1$, so dass $\|\alpha_k - \alpha_l\| < \varepsilon$ für $k, l \geq K$. Also gilt für alle $n \geq 1$

$$|a_{k,n} - a_{l,n}| \leq \|\alpha_k - \alpha_l\| < \varepsilon, \quad k, l \geq K.$$

Wegen $a_{l,n} \rightarrow b_n$ für jedes $n \geq 1$ folgt hieraus durch Grenzwertübergang

$$|a_{k,n} - b_n| \leq \varepsilon, \quad k \geq K, \quad n \geq 1. \quad (1)$$

Außerdem existiert für die konvergente Folge α_K zu diesem $\varepsilon > 0$ ein $N \geq 1$ mit

$$|a_{K,n} - a_{K,m}| < \varepsilon, \quad n, m \geq N.$$

Aus den letzten beiden Ungleichungen folgt dann für $n, m \geq N$

$$|b_n - b_m| \leq |b_n - a_{K,n}| + |a_{K,n} - a_{K,m}| + |a_{K,m} - b_m| < 3\varepsilon.$$

Da zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches $N \geq 1$ existiert, ist β eine Cauchyfolge, somit konvergent und Element von c . Aus (1) folgt außerdem

$$\|\alpha_k - \beta\| \leq \varepsilon, \quad k \geq K.$$

Somit konvergiert (α_m) in der Supremumsnorm gegen \mathfrak{b} . \gggg

Die Grenzwertabbildung

$$L: c \rightarrow \mathbb{R}, \quad \alpha = (a_n) \mapsto L\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

die jeder Folge in c ihren Grenzwert zuordnet, definiert auf c eine lineare Funktion mit der Eigenschaft, dass

$$|L\alpha| = |\lim a_n| \leq \sup |a_n| = \|\alpha\|.$$

Ihr Kern ist der Raum aller Nullfolgen,

$$c_0 := L^{-1}\{0\} = \{\alpha = (a_n) \in c : \lim a_n = 0\}.$$

Dieser Raum ist also ebenfalls ein Vektorraum.

Satz *Der Unterraum c_0 aller Nullfolgen in c ist ebenfalls vollständig bezüglich der Supremumsnorm. \times*

\llll Eine Cauchyfolge (α_m) in c_0 ist auch eine Cauchyfolge in c , besitzt somit einen Grenzwert α in c aufgrund der Vollständigkeit von c . Wegen

$$|L\alpha| = |L\alpha - L\alpha_m| = |L(\alpha - \alpha_m)| \leq \|\alpha - \alpha_m\|$$

für alle m ist $L\alpha = 0$, also α ebenfalls eine Nullfolge. Also konvergiert (α_m) auch im Raum c_0 . \gggg

Betrachte jetzt in c_0 die Menge aller Nullfolgen mit nur endlich vielen nicht-verschwindenden Folgengliedern:

$$c_{00} := \{\alpha = (a_n)_{n \geq 1} \in c_0 : a_n = 0 \text{ für fast alle } n\}.$$

Man sieht leicht, dass dies ein Untervektorraum von c_0 ist.

Satz *Der Unterraum c_{00} mit der Supremumsnorm ist nicht vollständig. \times*

\llll Zum Beispiel definiert

$$\alpha_m = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{m-1}, 0, \dots\right), \quad m \geq 2,$$

eine Folge in c_{00} , die in c_0 gegen

$$\alpha = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n \geq 1}$$

konvergiert, denn

$$\|\alpha_m - \alpha\| = 1/m \rightarrow 0.$$

Da aber $\alpha \notin c_{00}$, hat die Folge $(\alpha_m)_{m \geq 1}$ in c_{00} *keinen Grenzwert*. \gggg

Aufgaben

- 1 Welche der folgenden Aussagen sind wahr?
 - a. Es gibt eine unbeschränkte reelle Folge mit genau drei Häufungswerten.
 - b. Eine reelle Folge mit genau einem Häufungswert ist konvergent.
 - c. Eine unbeschränkte Folge hat keinen Häufungswert.
 - d. Eine monotone Zahlenfolge ist entweder konvergent oder unbeschränkt.
 - e. Eine divergente Zahlenfolge hat keinen Häufungswert.
 - f. Eine divergente Folge hat mindestens zwei Häufungswerte.
- 2 Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Beschränkte reelle Folgen
 - a. sind konvergent.
 - b. haben mindestens einen Häufungswert.
 - c. haben höchstens einen Häufungswert.
 - d. können nicht monoton sein.
- 3 Formulieren sie einen ε - N -Test dafür, dass eine reelle Folge (a_n) keine Nullfolge bildet.
- 4 Jede Abzählung von $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ ist divergent.
- 5
 - a. Sei $A \subset \mathbb{R}$ nicht leer und beschränkt. Konstruieren sie eine konvergente Folge (a_n) in A mit $a_n \rightarrow \sup A$.
 - b. Konstruieren sie zu einer beliebigen Zahl $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ eine Folge (a_n) in \mathbb{Q} , die gegen x konvergiert.
 - c. Warum gilt der Satz von der monotonen Konvergenz ¹⁴ in \mathbb{Q} nicht?
- 6 **Einschlussungssatz** Seien (a_n) , (b_n) und (x_n) reelle Zahlenfolgen mit $a_n \leq x_n \leq b_n$ für alle $n \geq 1$. Konvergieren (a_n) und (b_n) mit demselben Grenzwert x , so konvergiert auch (x_n) gegen x .
- 7 Es gelte $a_n \rightarrow a$ und $b_n \rightarrow b$. Dann gilt auch $\max\{a_n, b_n\} \rightarrow \max\{a, b\}$.
- 8 Sei (x_n) eine konvergente reelle Folge mit Grenzwert \bar{x} . Für jedes Polynom p gilt dann

$$\lim p(x_n) = p(\bar{x}).$$
- 9 Bestimmen sie die Grenzwerte der Folgen mit Gliedern
 - a. $\sqrt[n]{2n + 3n + 4n}$ b. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ c. $\sqrt{n^2 + n} - n$
 - d. $\frac{n!}{n^n}$ e. $\frac{n + (-1)^n}{n - (-1)^n}$ f. $\sqrt[n]{n^p}$, $p \geq 1$.
- 10 Von der Folge (a_n) konvergieren die Teilfolgen (a_{2n}) , (a_{2n+1}) und (a_{3n}) . Konvergiert dann auch (a_n) ? Mit Beweis oder Gegenbeispiel!
- 11 Sei (a_n) eine Folge in $(0, \infty)$. Dann gilt $1/a_n \rightarrow 0$ genau dann, wenn $a_n \rightarrow \infty$.
- 12 Sei (a_n) eine konvergente Folge. Existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ wenigstens ein n mit $0 < a_n < \varepsilon$, so ist $\lim a_n = 0$.
- 13 Sei (a_n) eine Folge in $(0, \infty)$ und

$$b_n = \sum_{k=1}^n (a_k + a_k^{-1}), \quad n \geq 1.$$

Dann ist $(1/b_n)$ eine Nullfolge.

- 14 Wie ist das Konvergenzverhalten der Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ mit
- 15 Zu einer beliebigen reellen Zahl $a > 1$ definiere man drei Folgen (a_n) , (b_n) , (c_n) durch

$$a_n = \sqrt{n+a} - \sqrt{n}, \quad b_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}, \quad c_n = \sqrt{n+n/a} - \sqrt{n}.$$

Dann gilt $a_n > b_n > c_n$ für $n < a^2$, aber $a_n \rightarrow 0$, $b_n \rightarrow 1/2$ und $c_n \rightarrow \infty$.

- 16 Sei $a > 1$. Zeigen sie, dass die Folge

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{a}{a_n} \right), \quad n \geq 1.$$

monoton fallend gegen \sqrt{a} konvergiert. Wieso ist dies ein Gegenbeispiel zum Satz von der monotonen Konvergenz 14 in \mathbb{Q} ?

- 17 Ist eine beschränkte reelle Folge divergent, so besitzt sie mindestens zwei Häufungswerte.
- 18 Eine reelle Folge ist konvergent genau dann, wenn sie beschränkt ist und genau einen Häufungswert hat.
- 19 Eine reelle Folge ist beschränkt genau dann, wenn jede ihrer Teilfolgen eine konvergente Teilfolge enthält.
- 20 Besitzt jede *konvergente* Teilfolge einer *beschränkten* reellen Folge denselben Grenzwert, so ist auch die gesamte Folge konvergent mit demselben Grenzwert. Für unbeschränkte Folgen gilt dies nicht.
- 21 Jede Folge besitzt überabzählbar viele Teilfolgen.
- 22 *Cauchyscher Grenzwertsatz* *a*. Es gelte $a_n \rightarrow a$. Dann konvergieren auch für die *arithmetischen Mittel* gegen denselben Grenzwert:

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \rightarrow a.$$

- b*. Ist allgemeiner (p_n) eine Folge positiver Zahlen mit $p_1 + \dots + p_n \rightarrow \infty$, so gilt

$$\frac{p_1 a_1 + \dots + p_n a_n}{p_1 + \dots + p_n} \rightarrow a.$$

- 23 Seien a und b beliebige reelle Zahlen und die Folge (a_n) rekursiv definiert durch

$$a_0 := a, \quad a_1 := b, \quad a_{n+1} := \frac{a_n + a_{n-1}}{2}, \quad n \geq 1.$$

Zeigen sie, dass (a_n) konvergiert, und bestimmen sie den Grenzwert.

- 24 Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}, \quad n \geq 1.$$

Dann bildet (a_n) eine Cauchyfolge, die gegen die positive Lösung der Gleichung $x^2 + x - 1 = 0$ konvergiert.

- 25 Die reelle Folge (x_n) konvergiert genau dann, wenn es ein $r \in (0, 1)$ gibt, so dass die Folge (y_n) mit $y_n = x_n + r x_{n-1}$ konvergiert.

26 Für $n \geq 1$ sei

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

- $(a_n)_{n \geq 1}$ ist monoton steigend.
- $(b_n)_{n \geq 1}$ ist monoton fallend.
- Beide Folgen sind konvergent und haben denselben Grenzwert.
- Wie kann man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^n, \quad m \in \mathbb{N},$$

durch diesen Grenzwert ausdrücken?

27 Ist (q_n) eine Abzählung der rationalen Zahlen \mathbb{Q} , so ist die Menge ihrer Häufungswerte genau die Menge \mathbb{R} aller reellen Zahlen.

28 Bestimmen sie alle Häufungswerte der Folgen mit Gliedern

$$a. \frac{(-1)^n n}{n+1} \quad b. \frac{(-1)^n n}{n^2+1} \quad c. \frac{(-2)^n}{n^2+1} \quad d. \left(1 + (-1)^n\right) \frac{n+1}{n} + (-1)^n$$

29 Gibt es eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in $[0, 1]$,

- die abzählbar unendlich viele Häufungswerte hat?
- die überabzählbar viele Häufungswerte hat?
- deren Häufungswerte genau die rationalen Zahlen in $[0, 1]$ sind?

30 Gibt es eine Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ in $[0, 1]$ mit $|a_m - a_n| \geq \varepsilon/n$ für alle $m > n \geq 1$ und irgendeinem $\varepsilon > 0$?

31 Geben sie Beispiele dafür, dass die Aussagen über uneigentliche Grenzwerte ²⁶ falsch werden, wenn man die \succ -Bedingungen fallen lässt.

32 Bestimmen sie in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$ die Häufungswerte der Folge (a_n) mit

$$a_n = nx - [nx], \quad n \geq 1.$$

Hierbei bezeichnet $[\cdot]$ die Gaußklammer.

33 Von der Folge (a_n) konvergieren die Teilfolgen (a_{2n}) und (a_{2n+1}) . Dann hat (a_n) genau die beiden Häufungswerte $\lim a_{2n}$ und $\lim a_{2n+1}$.

34 Gibt es eine *divergente* komplexe Folge (z_n) , wo sowohl $(|z_n|)$ als auch $(\Re z_n)$ *konvergieren*?

35 Geben sie Beispiele reeller Folgen (a_n) und (b_n) mit $a_n \rightarrow \infty$ und $b_n \rightarrow 0$, so dass

- $\lim a_n b_n = \infty$
- $\lim a_n b_n = -\infty$
- $\lim a_n b_n = c$ beliebige reelle Zahl.

36 Ist p_n/q_n eine konvergente Folge rationaler Zahlen mit irrationalem Grenzwert, so gilt

$$|p_n| \rightarrow \infty, \quad q_n \rightarrow \infty.$$

37 Für eine Zahlenfolge (a_n) gelte $|a_{n+1} - a_n| \leq \theta |a_n - a_{n-1}|$ für $n \geq N > 1$ mit einem $\theta \in (0, 1)$. Dann ist (a_n) eine Cauchyfolge.

38 Man zeige, dass durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = (a_n + 2)/(a_n + 1)$ eine Cauchyfolge definiert wird, und bestimme ihren Grenzwert.

- 39 Jede Folge, die Cauchy ist bezüglich einer der Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$, ist auch Cauchy bezüglich der beiden anderen Normen.
- 40 Eine komplexe Folge (z_n) konvergiert in \mathbb{C} genau dann, wenn die Folgen $(\Re z_n)$ und $(\Im z_n)$ in \mathbb{R} konvergieren.

- 41 a. In einem Skalarproduktraum gilt die *Parallelogrammgleichung*

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

b. Im \mathbb{R}^n mit der Summen- oder Maximumsnorm gilt diese Identität *nicht*.

c. Gilt in einem reellen normierten Raum die Parallelogrammgleichung, so wird die Norm induziert durch das Skalarprodukt mit

$$2\langle u, v \rangle := \|u + v\|^2 - \|u\|^2 - \|v\|^2.$$

- 42 In einem normierten Raum ist jede Umgebung $U_\varepsilon(a)$ *konvex*. Das heißt, für alle $u, v \in U_\varepsilon(a)$ gilt

$$(1-t)u + tv \in U_\varepsilon(a), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

- 43 *Limes inferior und Limes superior* Der *Limes inferior* und *Limes superior* einer reellen Folge (c_n) sind definiert als die eigentlichen oder uneigentlichen Grenzwerte

$$\liminf c_n := \lim_n \inf_{m \geq n} c_m, \quad \limsup c_n := \lim_n \sup_{m \geq n} c_m.$$

a. Durch

$$a_n := \inf \{c_m : m \geq n\}, \quad b_n := \sup \{c_m : m \geq n\}$$

werden der Folge (c_n) eine monoton steigende Folge (a_n) und eine monoton fallende Folge (b_n) auf der erweiterten Zahlengeraden zugeordnet. Für diese gilt

$$a_n \nearrow a = \sup_n \inf_{m \geq n} c_m = \liminf_n c_n,$$

und

$$b_n \searrow b = \inf_n \sup_{m \geq n} c_m = \limsup_n c_m.$$

b. Die Punkte a und b sind der kleinste respektive größte Häufungswerte der Folge (c_n) auf der erweiterten Zahlengeraden.

c. Ist $a < \infty$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geq 1$, so dass

$$a - \varepsilon < c_n, \quad n \geq N.$$

Es ist $a = \infty$ genau dann, wenn $\lim_n c_n = \infty$. — Entsprechendes gilt für b .

d. Die Folge (c_n) ist eigentlich oder uneigentlich konvergent genau dann, wenn ihr Limes inferior und Limes superior zusammenfallen. In diesem Fall ist dies auch der Grenzwert der Folge.

- 44 Sei X eine nichtleere Menge, $F(X) = \{f : X \rightarrow \mathbb{R}\}$ der Raum aller reellen Funktionen auf X , und

$$\|f\|_X := \sup \{|f(x)| : x \in X\}.$$

- a. $F(X)$ ist ein reeller Vektorraum.
- b. $B(X) := \{f \in F(X) : \|f\|_X < \infty\}$ ist ein Unterraum von $F(X)$ mit Norm $\|\cdot\|_X$.
- c. Mit dieser Norm ist $B(X)$ ein Banachraum.
- d. Es ist $F(X) = B(X)$ genau dann, wenn $|X| < \infty$.

6

Reihen

Unendliche Summen

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots$$

reeller oder komplexer Zahlen sind Folgen besonderer Art. Da man nicht sämtliche Glieder einer Folge (a_k) auf einmal summieren kann, steht eine solche Summe genauer für die Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k, \quad n \geq 1,$$

die man in gewohnter Weise untersuchen kann.

Übrigens kann man jede Zahlenfolge (a_n) auch als Partialsummenfolge der Reihe

$$a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} (a_k - a_{k-1})$$

auffassen, denn es ist ja

$$s_n = a_1 + \sum_{k=2}^n (a_k - a_{k-1}) = a_n.$$

Folgen und Reihen sind somit im Grunde zwei Erscheinungsformen ein und derselben Sache. Reihen sind allerdings in vielen Zusammenhängen das natürlichere Objekt - die Stichworte *Potenzreihe*, *Taylorreihe* und *Fourierreihe* sollen an dieser Stelle genügen.

6.1

Konvergenz

Eine *Zahlenreihe* oder kurz *Reihe* ist ein Ausdruck der Form

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots$$

mit reellen oder komplexen *Gliedern* a_k . Die endlichen Summen

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k, \quad n \geq 1,$$

heißen die n -ten *Partialsommen* dieser Reihe.

Definition Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt *konvergent*, wenn die Folge ihrer Partialsommen konvergiert. Ihr Grenzwert heißt *Wert* dieser Reihe, es gilt dann

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Konvergiert die Folge der Partialsommen dagegen nicht, so heißt die Reihe *divergent*. ✕

Die Summation kann natürlich auch bei jedem anderen Index beginnen, nicht nur bei 1. Kommt es auf den Startindex nicht an, schreibt man auch kürzer $\sum_k a_k$.

Bemerkung Eigentlich ist zu unterscheiden zwischen der *formalen Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

deren Konvergenz noch nicht fest steht und die auch divergieren kann, und der *konvergenten Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k.$$

Die *formale Reihe* steht für die *Folge* ihrer Partialsommen, unabhängig von deren Konvergenz, die *konvergente Reihe* für deren *Grenzwert*, wenn er existiert. Dieser Unterschied kommt in der allgemein üblichen Notation für Reihen nicht zum Ausdruck. ∞

► **Beispiele** Die Partialsommen der *Quadratreihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots$$

sind monoton steigend, da alle Summanden positiv sind. Sie sind auch beschränkt, denn

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n} < 1.$$

Aufgrund des Satzes von der monotonen Konvergenz [5.14](#) konvergieren die Partialsummen, und die betrachtete Reihe ist konvergent. Übrigens wusste bereits Euler, dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad \blacktriangleleft$$

1 ▶ Die *geometrische Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \dots$$

konvergiert für $|q| < 1$. Denn für die Partialsummen gilt ja [3.10](#)

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad q \neq 1.$$

Für $|q| < 1$ gilt $q^{n+1} \rightarrow 0$ [5.10](#). Mit den Grenzwertgleichungen [5.7](#) folgt die Konvergenz der Partialsummen, und wir erhalten

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1 - q}, \quad |q| < 1.$$

Für $|q| \geq 1$ ist die Reihe dagegen offensichtlich divergent. \blacktriangleleft

■ Zwei elementare Kriterien

2 **Cauchy Kriterium** Die Zahlenreihe $\sum_k a_k$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geq 1$ gibt, so dass

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon, \quad m > n \geq N. \quad \times$$

⟨⟨⟨⟨ Wegen

$$|s_m - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right|, \quad m > n,$$

ist dies gerade das Cauchy Kriterium [5.22](#) für die Folge der Partialsummen (s_n) . $\rangle\rangle\rangle\rangle$

3 **Nullfolgenkriterium** Ist die Reihe $\sum_k a_k$ konvergent, so bilden ihre Glieder a_k eine Nullfolge. \times

⟨⟨⟨ Konvergiert die Folge der Partialsummen, so folgt für $a_n = s_n - s_{n-1}$ aus den Grenzwertgleichungen 5.8

$$\lim a_n = \lim (s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = 0. \quad \rangle\rangle\rangle$$

Konvergieren die Glieder a_k *nicht* gegen 0, so ist die Reihe $\sum_k a_k$ also divergent - und in dieser Form wird dieses Kriterium angewandt. Denn das Nullfolgenkriterium ist natürlich nicht hinreichend für die Konvergenz einer Reihe, wie das folgende Beispiel zeigt - das wäre ja auch zu einfach, und dieses Kapitel wäre überflüssig.

4 ▶ Die *harmonische Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

ist divergent. Denn die Partialsummen sind monoton steigend, aber es gilt

$$s_{2n} - s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}, \quad n \geq 1.$$

Sie bilden somit keine Cauchyfolge. Vielmehr konvergiert die harmonische Reihe uneigentlich gegen ∞ . ◀

Die Grenzwertsätze für Folgen übertragen sich auf dem Weg über die Partialsummen zu entsprechenden Sätzen für Reihen. Sind zum Beispiel $\sum_k a_k$ und $\sum_k b_k$ konvergente Reihen, so ist auch die Reihe $\sum_k (\lambda a_k + \mu b_k)$ konvergent, und es gilt

$$\sum_k (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_k a_k + \mu \sum_k b_k.$$

Wir führen das nicht weiter aus.

▶ Für $|q| < 1$ und $n \geq 0$ ist

$$\sum_{k=n}^{\infty} q^k = \sum_{k=0}^n q^{n+k} = q^n \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{q^n}{1-q}. \quad \blacktriangleleft$$

6.2

Absolute Konvergenz

In einer endlichen reellen Summe ist es kein Problem, die Reihenfolge der Summanden beliebig zu ändern - die Summe ändert sich dadurch nicht. In einer

unendlichen Reihe ist dies aber keineswegs immer so. Dazu bedarf es einer stärkeren Form der Konvergenz.

Definition Eine Reihe $\sum_k a_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn ihre *Absolutreihe* $\sum_k |a_k|$ konvergiert. Eine konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe heißt *bedingt konvergent*. \times

- 5 **Satz von der absoluten Konvergenz** Eine Reihe ist absolut konvergent genau dann, wenn ihre Absolutreihe beschränkt ist. Jede absolut konvergente Reihe ist auch konvergent, und es gilt die Dreiecksungleichung

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|. \quad \times$$

⋈⋈⋈ Die Folge der Partialsummen der Absolutreihe $\sum_k |a_k|$ ist monoton steigend. Aufgrund des Satzes von der monotonen Konvergenz 5.14 konvergiert sie genau dann, wenn sie beschränkt ist. In diesem Fall erfüllt sie auch das Cauchy Kriterium. Wegen

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m |a_k|$$

erfüllt dann auch die Reihe $\sum_k a_k$ das Cauchy Kriterium 2, ist also konvergent. Für jede endliche Summe gilt außerdem

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

Da die rechte Seite monoton mit n steigt und konvergiert, gilt dann auch

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|, \quad n \geq 1.$$

Da die Partialsummen auf der linken Seite konvergieren, folgt durch Grenzübergang die allgemeine Dreiecksungleichung. ⋈⋈⋈

Die Umkehrung des Satzes gilt *nicht* – sonst wäre der Begriff der absoluten Konvergenz ja auch nicht nötig. Eine Reihe kann also konvergieren, während ihre Absolutreihe divergiert. Das klassische Beispiel hierfür ist die alternierende harmonische Reihe, die wir weiter unten betrachten 15.

Wir beschreiben nun genauer, in welchem Sinn absolut konvergente Reihen in beliebiger Reihenfolge aufsummiert werden können. Eine *Umordnung* einer Reihe $\sum_k a_k$ ist gegeben durch eine *Bijektion*

$$\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N},$$

die zugehörige *umgeordnete Reihe* ist $\sum_k a_{\sigma(k)}$. Es treten also genau dieselben Summanden wie in $\sum_k a_k$ auf, nur in anderer Reihenfolge. Interessant ist dies natürlich erst, wenn *unendlich* viele Summanden umgeordnet werden.

- 6 Umordnungssatz** *Ist die Reihe $\sum_k a_k$ absolut konvergent, so ist auch jede Umordnung dieser Reihe absolut konvergent, und der Wert der Reihe ändert sich nicht.* ✕

⟨⟨⟨ Sei $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine beliebige Bijektion. Da die Reihe $\sum_{k \geq 1} a_k$ absolut konvergiert, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \geq 1$, so dass

$$\sum_{k=n+1}^m |a_k| < \varepsilon, \quad m > n \geq N.$$

Dann gilt mit $n = N$ und $m \rightarrow \infty$ auch

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon.$$

Die Glieder a_1, \dots, a_N haben in der umgeordneten Reihe $\sum_{k \geq 1} a_{\sigma(k)}$ maximal den Index $M = \max\{\sigma(1), \dots, \sigma(N)\}$. Für $n \geq N$ und $m \geq M$ gilt dann

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k - \sum_{k=1}^m a_{\sigma(k)} \right| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| \leq \varepsilon, \quad (1)$$

denn in der Differenz heben sich die Glieder a_1, \dots, a_N auf, während jedes weitere Glied sich entweder ebenfalls aufhebt oder genau einmal vorkommt. Durch Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ erhalten wir hieraus

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^m a_{\sigma(k)} \right| \leq \varepsilon, \quad m \geq M. \quad (2)$$

Da zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches M existiert, folgt die Konvergenz der umgeordneten Reihe gegen den Wert der ursprünglichen Reihe. Es gilt also

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Bleibt noch zu zeigen, dass auch die umgeordnete Reihe *absolut* konvergiert. Dazu genügt es zu bemerken, dass (1) und (2) mit demselben Argument auch für die Beträge gilt, also

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| - \sum_{k=1}^m |a_{\sigma(k)}| \right| \leq \varepsilon, \quad m \geq M.$$

Also ist $\sum_{k \geq 1} |a_{\sigma(k)}|$ beschränkt und damit konvergent. ⟩⟩⟩

Dass dieser Satz nicht selbstverständlich ist, verdeutlicht der komplementäre Satz über bedingt konvergente Reihen.

- 7 **Riemannscher Umordnungssatz** *Ist eine reelle Reihe konvergent, aber nicht absolut konvergent, so existiert zu jeder reellen Zahl s eine Umordnung dieser Reihe, die gegen s konvergiert.* ✕

⟨⟨⟨⟨ *Beweisskizze* Setze

$$a^+ = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ 0, & a < 0, \end{cases} \quad a^- = \begin{cases} 0, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Somit sind a^+ und a^- nicht-negativ, und $a = a^+ - a^-$ und $|a| = a^+ + a^-$.

Betrachte nun

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_k^+ - \sum_{k=1}^n a_k^-.$$

Die linke Seite konvergiert für $n \rightarrow \infty$ nach Voraussetzung. Würde einer der beiden Reihen auf der rechten Seite konvergieren, dann auch die andere. Konvergieren aber beide, so konvergiert auch

$$\sum_{k=1}^n a_k^+ + \sum_{k=1}^n a_k^- = \sum_{k=1}^n |a_k|,$$

die Reihe wäre also absolut konvergiert. Da dies nicht der Fall ist, gilt also

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ = \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- = \infty.$$

Dies ist die entscheidende Beobachtung.

Sei nun $s > 0$ eine beliebige reelle Zahl. Wir setzen $s_0^- = 0$ sowie $K_0^+ = K_0^- = 0$ und definieren induktiv

$$s_n^+ = s_{n-1}^- + \sum_{K_{n-1}^+ < k \leq K_n^+} a_k^+, \quad s_n^- = s_n^+ - \sum_{K_{n-1}^- < k \leq K_n^-} a_k^-, \quad n \geq 1,$$

wobei

$$K_n^+ := \min \left\{ K : s_{n-1}^- + \sum_{K_{n-1}^+ < k \leq K} a_k^+ > s \right\},$$

$$K_n^- := \min \left\{ K : s_n^+ - \sum_{K_{n-1}^+ < k \leq K} a_k^- < s \right\}.$$

Da die hier auftretenden Summen für $K \rightarrow \infty$ divergieren, sind die betrachteten Mengen nicht leer und K_n^+ und K_n^- wohldefiniert. Aus dieser Konstruktion folgt $s_n^- < s < s_n^+$ für alle n mit

$$s_n^+ - s \leq a_{K_n^+}^+, \quad s - s_n^- \leq a_{K_n^-}^-.$$

Wegen $K_n^\pm \rightarrow \infty$ und $a_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ zeigt dies, dass s_n^+ und s_n^- gegen s konvergieren. \gggg

6.3 Konvergenzkriterien

Das einfachste Konvergenzkriterium ergibt sich aus dem Vergleich einer Reihe mit einer konvergenten Majorante. Dabei heißt eine reelle Reihe $\sum_n b_n$ *Majorante* einer Reihe $\sum_n a_n$, wenn

$$|a_n| \leq b_n$$

für alle hinreichend großen n gilt. Offensichtlich ist notwendigerweise $b_n \geq 0$ für alle diese n .

Majorantenkriterium *Besitzt eine Reihe eine konvergente Majorante, so ist sie absolut konvergent.* \times

\llll Nach Voraussetzung existiert ein $N \geq 1$, so dass

$$\sum_{n=N}^m |a_n| \leq \sum_{n=N}^m b_n \leq \sum_{n=N}^{\infty} b_n < \infty.$$

Also ist die Absolutreihe $\sum_n |a_n|$ beschränkt, und die Behauptung folgt mit dem Satz von der absoluten Konvergenz $_5$. \gggg

Die Kontraposition dieses Satz ist das entsprechende

Minorantenkriterium *Besitzt eine Reihe eine *divergente Minorante* - gilt also*

$$a_n \geq b_n \geq 0$$

für fast alle n und divergiert $\sum_n b_n$ -, so divergiert auch $\sum_n a_n$. \times

Die Wahl spezieller Majoranten führt zu handlichen Konvergenzkriterien. Besonders einfach und praktisch sind das Wurzel- $_8$ und das Quotientenkriterium $_9$, die auf der geometrischen Reihe als Majorante beruhen. Dabei greifen wir auf die Definition der n -ten Wurzel vor, die erst in Abschnitt 7.15 erfolgt. Die Ergebnisse dort sind aber unabhängig von diesem Kapitel, so dass kein Zirkelschluss vorliegt.

8 Wurzelkriterium *Konvergiert die Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})$ und gilt*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

so ist die Reihe $\sum_n a_n$ absolut konvergent. Gilt dagegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1,$$

so ist diese Reihe divergent. ✕

⟨⟨⟨ Im ersten Fall existiert ein q mit $0 < q < 1$ und ein $N \geq 1$, so dass

$$\sqrt[n]{|a_n|} < q < 1, \quad n \geq N.$$

Also gilt $|a_n| \leq q^n$ für $n \geq N$, und die geometrische Reihe $\sum_n q^n$ bildet eine konvergente Majorante zu $\sum_n a_n$. Im anderen Fall ist $|a_n| \geq 1$ für fast alle n . Somit bilden die a_n keine Nullfolge, und die Reihe divergiert $_3$. ⟩⟩⟩

⇒ **Beispiel** Für $z \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ betrachte man die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^r z^n = z + 2^r z^2 + 3^r z^3 + \dots$$

Man erhält $_{5.13}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^r |z|^n} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} \right)^r |z| = |z|.$$

Somit ist die Reihe absolut konvergent für $|z| < 1$, und divergent für $|z| > 1$. Für $|z| = 1$ macht das Wurzelkriterium keine Aussage. ◀

9 **Quotientenkriterium** Gilt $a_n \neq 0$ für fast alle n und konvergiert die Folge sukzessiver Quotienten mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1,$$

so ist die Reihe $\sum_n a_n$ absolut konvergent. Gilt dagegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1,$$

so ist diese Reihe divergent. ✕

⟨⟨⟨ Im ersten Fall gibt es ein q mit $0 < q < 1$ und ein $N \geq 1$, so dass

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q < 1, \quad n \geq N.$$

Also ist $|a_{n+1}| \leq q |a_n|$ für $n \geq N$. Mit Induktion folgt hieraus

$$|a_n| \leq q^{n-N} |a_N| = cq^n, \quad n \geq N,$$

mit der Konstanten $c = q^{-N} |a_N|$. Also ist $\sum_n cq^n$ eine konvergente Majorante. Im anderen Fall gibt es ein $N \geq 1$, so dass $|a_n| \geq |a_{n-1}| \geq \dots \geq |a_N| > 0$ für $n \geq N$. Somit bilden die a_n keine Nullfolge, und die Reihe divergiert. ⟩⟩⟩

10 ▶ Die *Exponentialreihe*

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

ist für jedes $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent. Für $z = 0$ ist dies trivial, und für $z \neq 0$ gilt

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|z|^n} = \frac{|z|}{n+1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Dasselbe Ergebnis erhält man auch mit dem Wurzelkriterium, denn

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{|z|^n}{n!}} = \frac{|z|}{\sqrt[n]{n!}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad \blacktriangleleft$$

Konvergieren im Wurzel- und Quotientenkriterium die entsprechenden Ausdrücke gegen 1, so ist völlig offen, wie sich die Reihe verhält. Dann müssen andere Kriterien herangezogen werden, wie zum Beispiel das

11 **Verdichtungskriterium** Sei (a_n) eine monoton fallende Nullfolge. Dann haben die beiden Reihen

$$\sum_{n \geq 1} a_n, \quad \sum_{n \geq 0} 2^n a_{2^n}.$$

dasselbe Konvergenzverhalten. Das heißt, beide Reihen sind entweder absolut konvergent oder divergent. ✕

⟨⟨⟨⟨ Sei $m \geq 0$. Auf Grund der Monotonie der a_n gilt

$$\sum_{2^m < k \leq 2^{m+1}} a_{2^{m+1}} \leq \sum_{2^m < k \leq 2^{m+1}} a_k \leq \sum_{2^m < k \leq 2^{m+1}} a_{2^m},$$

also

$$2^m a_{2^{m+1}} \leq \sum_{2^m < k \leq 2^{m+1}} a_k \leq 2^m a_{2^m}.$$

Summieren wir über $m = 0, \dots, n$, so erhalten wir

$$\sum_{k=0}^n 2^k a_{2^{k+1}} \leq \sum_{k=2}^{2^{n+1}} a_k \leq \sum_{k=0}^n 2^k a_{2^k}.$$

Konvergiert die rechts stehende Reihe, so konvergiert auch $\sum_k a_k$. Konvergiert letztere Reihe, so konvergiert auch die linke Seite, und damit auch wieder die rechte Seite. Im Fall der Divergenz argumentiert man ebenso. Somit haben beide Reihen dasselbe Konvergenzverhalten. ⟩⟩⟩⟩

- 12 ▶ Betrachte die *allgemeine harmonische Reihe*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots$$

für $\alpha > 0$. Das Wurzel- und das Quotientenkriterium sind nicht anwendbar, denn

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}} \right)^\alpha \rightarrow 1$$

und

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{(n-1)^\alpha}{n^\alpha} = \left(1 - \frac{1}{n} \right)^\alpha \rightarrow 1.$$

Ihre verdichtete Reihe ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-\alpha n} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-\alpha})^n.$$

Wegen $2^{1-\alpha} < 1$ für $\alpha > 1$ konvergiert die allgemeine harmonische Reihe also für $\alpha > 1$. Ihre Divergenz für $\alpha \leq 1$ ist ohnehin klar, da dann die harmonische Reihe eine divergente Minorante ist. ◀

Die allgemeine harmonische Reihe konvergiert langsamer als die geometrische Reihe. Als Majorante liefert sie daher ein Konvergenzkriterium, das in Situationen hilft, wo das Wurzel- oder Quotientenkriterium keine Aussage ermöglichen. Dies führt zum

- 13 **Raabe-Kriterium** Eine Reihe $\sum_n a_n$ mit positiven Gliedern ist konvergent, wenn es ein $\alpha > 1$ gibt, so das

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - \frac{\alpha}{n}$$

für fast alle n . Gilt dagegen

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 - \frac{1}{n}$$

für fast alle n , so ist die Reihe divergent. ✕

◀◀◀ Gilt die Ungleichung für alle $n \geq N$, so folgt induktiv

$$a_{n+1} \leq a_N \prod_{k=N}^n \left(1 - \frac{\alpha}{k} \right).$$

Also gilt mit einer hinreichend großen Konstanten c für alle n

$$a_{n+1} \leq c \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\alpha}{k} \right).$$

Es gilt aber

$$\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\alpha}{k}\right) \leq \frac{1}{n^\alpha}, \quad n \geq 1.$$

Für $n = 1$ ist dies richtig, und der Induktionsschritt von $n - 1$ auf n reduziert sich auf

$$\frac{1}{(n-1)^\alpha} \left(1 - \frac{\alpha}{n}\right) \leq \frac{1}{n^\alpha}.$$

Dies ist aber äquivalent zur Bernoullischen Ungleichung

$$1 - \frac{\alpha}{n} \leq \left(\frac{n-1}{n}\right)^\alpha = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\alpha.$$

Somit ist ein Vielfaches der allgemeinen harmonischen Reihe eine konvergente Majorante für $\sum_n a_n$. Die Divergenzbehauptung folgt analog. \gggg

► *Beispiel* Betrachte die Reihe

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n+2)}.$$

Der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder ist

$$q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2n+1}{2n+4}.$$

Da dieser gegen 1 konvergiert, ist das Quotientenkriterium nicht anwendbar. Wegen

$$\frac{2n+1}{2n+4} = 1 - \frac{3}{2n+4} \leq 1 - \frac{4}{3n}, \quad n \geq 16,$$

ist aber das Raabe-Kriterium anwendbar, die Reihe also konvergent. ◀

Die bisherigen Konvergenzkriterien betreffen die absolute Konvergenz. Die bedingte Konvergenz ist subtiler. Daher erwähnen wir nur das einfachste Kriterium für sogenannte *alternierende Reihen*. Dies sind *reelle* Reihen der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - \dots$$

mit $a_n \geq 0$ für alle n .

- 14 **Leibniz-Kriterium** Ist (a_n) eine monoton fallende Nullfolge, so konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n = a_0 - a_1 + a_2 - \dots \quad \times$$

««« Für die Partialsummen dieser Reihe erhalten wir

$$s_{2n+1} - s_{2n-1} = a_{2n} - a_{2n+1} \geq 0,$$

$$s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0,$$

$$s_{2n+2} - s_{2n+1} = a_{2n+2} \geq 0.$$

Es gilt also

$$s_1 \leq s_3 \leq \dots \leq s_{2n-1} \leq s_{2n+1} \leq s_{2n+2} \leq s_{2n} \leq \dots \leq s_2 \leq s_0, \quad n \geq 1.$$

Die ›ungeraden‹ Partialsummen sind also monoton steigend, die ›geraden‹ Partialsummen monoton fallend, und beide sind beschränkt. Somit konvergieren (s_{2n}) und (s_{2n-1}) . Wegen

$$0 \leq s_{2n} - s_{2n-1} = a_{2n} \searrow 0$$

haben sie auch denselben Grenzwert. Also konvergiert die gesamte Reihe. »»»

15 ▶ Die *alternierende harmonische Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

konvergiert nach dem Leibnizkriterium₁₄, denn $1/n \searrow 0$. Ihr Wert ist übrigens $\log 2$. ◀

6.4 Potenzreihen

Eine Reihe der Gestalt

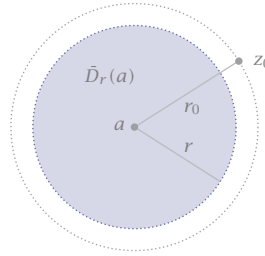
$$\sum_{n \geq 0} a_n (z - a)^n$$

mit komplexen Koeffizienten heißt *komplexe Potenzreihe* um den *Entwicklungspunkt* a . Sind die Koeffizienten a_n und a wie auch die Variable z reell, so spricht man von einer *reellen Potenzreihe*. Die Theorie für beide Arten von Potenzreihen ist jedoch dieselbe. Wir betrachten daher von vornherein den komplexen Fall und sprechen einfach von *Potenzreihen*.

Bei Potenzreihen stellt sich die Frage der Konvergenz der Reihe eigentlich für jedes einzelne Argument. Tatsächlich sind die Verhältnisse aber wesentlich einfacher.

Abb 1

Absolute und gleichmäßige
Konvergenz auf $\bar{D}_r(a)$



16 **Lemma** *Konvergiert die Potenzreihe*

$$\phi(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z - a)^n$$

in einem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, so konvergiert sie auch in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ mit

$$|z - a| \leq |z_0 - a|. \quad \times$$

Die Konvergenz ist sogar *gleichmäßig* auf jeder Kreisscheibe $|z - a| \leq r$ mit $r < |z_0 - a|$. Aber dieser Aspekt wird uns erst später beschäftigen, wenn es um Fragen wie Stetigkeit und Differenzierbarkeit geht.

⟨⟨⟨ Konvergiert ϕ im Punkt z_0 , so bilden die Koeffizienten von $\phi(z_0)$ eine Nullfolge. Es gilt also

$$c = \sup_{n \geq 0} |a_n(z_0 - a)^n| < \infty.$$

Mit diesem c gilt somit

$$|a_n| \leq \frac{c}{|z_0 - a|^n}, \quad n \geq 0.$$

Betrachten wir nun einen beliebigen anderen Punkt z mit $|z - a| \leq r < |z_0 - a|$, so ist dort

$$|a_n(z - a)^n| \leq |a_n| r^n \leq \frac{c r^n}{|z_0 - a|^n} = c q^n$$

mit

$$q = \frac{r}{|z_0 - a|} < 1.$$

Somit besitzt die Potenzreihe für alle diese z eine konvergente geometrische Reihe als gemeinsame Majorante, und es ist alles gezeigt. ⟩⟩⟩

Dieses Lemma beinhaltet folgende Umkehrung. *Divergiert* die Potenzreihe in einem Punkt z_0 , so divergiert sie in jedem Punkt z mit $|z - a| > |z_0 - a|$.

Denn konvergierte sie in z , so müsste sie ja aufgrund dieses Lemmas auch in z_0 konvergieren. Aus diesen Überlegungen folgt, dass jede Potenzreihe einen eindeutigen *Konvergenzradius* besitzt.

17 **Konvergenzsatz für Potenzreihen** *Zu jeder Potenzreihe*

$$\phi(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - a)^n$$

existiert ein eindeutiger *Konvergenzradius* $R \in [0, \infty]$ derart, dass sie für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - a| < R$ konvergiert, und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - a| > R$ divergiert. ✕

««« Die Menge

$$K = \{z \in \mathbb{C} : \phi(z) \text{ ist konvergent}\}$$

enthält immer den Punkt a , ist also nicht leer. Somit ist

$$R = \sup \{|z - a| : z \in K\}$$

ein wohldefiniertes Element von $[0, \infty]$. Für dieses R folgen die Behauptungen mit dem vorangehenden Lemma. Denn ist beispielsweise $|z - a| < R$, so muss es ein $z_0 \in K$ geben mit $|z_0 - a| > |z - a|$. Mit dem vorangehenden Lemma folgt somit die Konvergenz im Punkt z . »»»

Für den Konvergenzradius R einer Potenzreihe ϕ gilt damit:

- (i) Im Fall $R = 0$ divergiert ϕ für jedes $z \neq a$.
- (ii) Im Fall $R = \infty$ konvergiert ϕ für jedes $z \in \mathbb{C}$.
- (iii) Im Fall $0 < R < \infty$ konvergiert ϕ in jedem Punkt z mit $|z - a| < R$ und divergiert in jedem Punkt z mit $|z - a| > R$.

Man nennt die abgeschlossene Kreisscheibe

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leq R\},$$

den *Konvergenzkreis* der Potenzreihe. Über Konvergenz oder Divergenz in Punkten auf dem *Rand* $\{z \in \mathbb{C} : |z - a| = R\}$ dieses Konvergenzkreises lässt sich allerdings ohne weitere Annahmen *nichts sagen*. Dort kann das Verhalten sogar außerordentlich ›wild‹ sein.

Es gilt übrigens folgende Formel, die wir allerdings nicht benötigen und deren Beweis wir als Übung überlassen A-18.

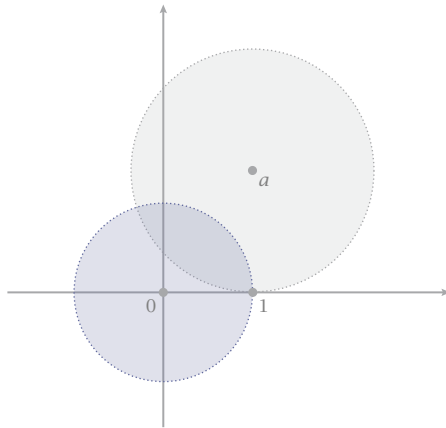
18 **Formel von Hadamard** *Für den Konvergenzradius R einer Potenzreihe*

$\sum_n a_n (z - a)^n$ gilt

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Abb 2

Zwei Konvergenzkreise
für $(1 - z)^{-1}$



mit den Vereinbarungen $1/0 = \infty$ und $1/\infty = 0$. \times

► **Beispiel** Betrachte die Potenzreihe

$$\phi(z) = \sum_{n \geq 0} z^n.$$

Aufgrund des Wurzelkriteriums konvergiert sie für $|z| < 1$ und divergiert für $|z| > 1$. Ihr Konvergenzradius ist also $R = 1$. Tatsächlich ist dies die geometrische Reihe zum Faktor z . Es ist also

$$\phi(z) = \sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1 - z}, \quad |z| < 1,$$

und man spricht von der **Entwicklung** der Funktion $(1 - z)^{-1}$ in ihre Potenzreihe am Punkt $a = 0$.

Die Funktion $(1 - z)^{-1}$ ist allerdings auf ganz $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ erklärt, und tatsächlich können wir sie auch in jedem anderen Punkt $a \neq 1$ in eine Potenzreihe entwickeln. In diesem Fall ist die Rechnung auch nicht schwer. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - z} &= \frac{1}{(1 - a) - (z - a)} = \frac{1}{1 - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - a}{1 - a}} \\ &= \frac{1}{1 - a} \sum_{n \geq 0} \left(\frac{z - a}{1 - a} \right)^n = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{(1 - a)^{n+1}} (z - a)^n. \end{aligned}$$

Diese Reihe hat den Konvergenzradius $R = |a - 1|$. Größer kann er nicht sein, da die Reihe ja nicht in einem Punkt konvergieren kann, wo die Funktion $(1 - z)^{-1}$ nicht erklärt ist. ◀

6.5

Reihen in Banachräumen

Bisher haben wir Reihen mit reellen oder komplexen Gliedern betrachtet. Reihen kann man aber auch aus Elementen eines beliebigen Banachraumes bilden, denn wir benötigen ja nur die Operation der Addition und die Konvergenz der Partialsummen.

Eine *Reihe* in einem Banachraum E ist also ein Ausdruck der Form $\sum_n a_n$ mit Gliedern $a_n \in E$. Die Reihe heißt *konvergent* in E , wenn die Folge ihrer Partialsummen in E konvergiert.

Das Cauchy Kriterium₂, das Nullfolgenkriterium₃ und der Satz von der absoluten Konvergenz₅ gelten unverändert weiter, wir müssen lediglich den Betrag durch die Norm von E ersetzen. Dasselbe gilt für das Wurzel- und Quotientenkriterium, welches zum Beispiel wie folgt lautet.

Quotientenkriterium für Banachraumreihen Gilt $a_n \neq 0$ für fast alle n und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} < 1,$$

so konvergieren die Reihen $\sum_n a_n$ und $\sum_n \|a_n\|$ – man sagt, die Reihe ist *normal konvergent*. Gilt dagegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\|a_{n+1}\|}{\|a_n\|} > 1,$$

so ist die Reihe *divergent*. ✕

Nicht mehr gelten solche Sätze, die auf der Anordnung von \mathbb{R} gründen, die also – wie das Leibnizkriterium – zum Beispiel den Begriff der Monotonie verwenden.

■ Reihen beschränkter linearer Operatoren

Sei $(E, |\cdot|)$ ein Banachraum, wobei wir die Norm diesmal mit *einem* Strich bezeichnen. Für einen linearen Operator $A: E \rightarrow E$ sei

$$\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{|x|=1} |Ax|,$$

wobei auch der Wert ∞ zugelassen ist. Man nennt A *beschränkt*, falls $\|A\| < \infty$, und bezeichnet mit

$$L(E) = \{A: E \rightarrow E: \|A\| < \infty\}$$

den Raum aller beschränkten linearen Operatoren auf E . Für $A \in L(E)$ gilt immer

$$|Ax| \leq \|A\| |x|, \quad x \in E. \quad (3)$$

Satz Auf $L(E)$ definiert $\|\cdot\|$ eine Norm, die von $|\cdot|$ induzierte Operatornorm. Mit dieser wird $L(E)$ ein Banachraum. \times

»»» Der Beweis ist nicht schwierig, wir übergangen ihn hier aber. Einen etwas allgemeineren Satz beweisen wir im Kapitel »Mehrdimensionale Differenziation« im zweiten Band »Etwas mehr Analysis«. »»»

► **Beispiel** Für $E = \mathbb{R}^n$ ist $L(E)$ der Raum aller linearen Abbildungen des \mathbb{R}^n in sich selbst. Diesen kann man mit dem Raum aller reellen $n \times n$ -Matrizen identifizieren, seine Dimension ist also n^2 . Als endlich-dimensionaler normierter Raum ist er vollständig 7.31. ◀

Operatoren in $L(E)$ können wir *multiplizieren*, indem wir sie hintereinander ausführen. Das Ergebnis ist wieder ein beschränkter Operator, denn für Operatoren $A, B \in L(E)$ gilt

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Denn aus (3) folgt ja

$$|ABx| \leq \|A\| |Bx| \leq \|A\| \|B\| |x|, \quad x \in E.$$

$L(E)$ bildet daher eine *Banachalgebra*: in ihr können wir addieren und multiplizieren, und diese Operationen vertragen sich mit der Norm. — Ein erstes Beispiel ist die *Neumannreihe*.

19 **Satz** Sei $A \in L(E)$. Gilt $\|A\| < 1$, so ist $I - A$ umkehrbar, und es ist

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k \geq 0} A^k,$$

genannt die *Neumannreihe* von A . \times

»»» Für $\|A\| < 1$ ist die rechts stehende Reihe normal konvergent, und

$$(I - A) \left(\sum_{k \geq 0} A^k \right) = \sum_{k \geq 0} A^k - \sum_{k \geq 1} A^k = I.$$

Dasselbe gilt, wenn die Faktoren vertauscht werden. Also definiert die Neumannreihe die Umkehrabbildung von $I - A$. »»»

Ein zweites Beispiel ist die *Exponentialreihe*, die eine zentrale Rolle in der Untersuchung und Beschreibung linearer Differenzial- und Evolutionsgleichungen spielt. Wir kommen darauf im nächsten Band »Etwas mehr Analysis« zurück.

20 **Definition und Satz** Das *Exponential* von $A \in L(E)$ ist die Reihe

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \dots$$

Diese Reihe ist normal konvergent in $L(E)$, und es gilt

$$\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|). \quad \times$$

⟨⟨⟨ Aus $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ folgt mit vollständiger Induktion

$$\|A^k\| \leq \|A\|^k, \quad k \geq 1.$$

Daher gilt wegen der absoluten Konvergenz der *reellen* Exponentialreihe

$$\sum_{k=0}^n \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=0}^n \frac{\|A\|^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = \exp(\|A\|) < \infty$$

für alle $n \geq 1$. Somit konvergiert die Reihe $\exp(A)$ normal in $L(E)$. Die behauptete Ungleichung folgt dann aus

$$\left\| \sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^n \frac{\|A^k\|}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = \exp(\|A\|)$$

und Grenzübergang $n \rightarrow \infty$. ⟩⟩⟩

Aufgaben

- 1 Welche der folgenden Aussagen ist wahr? Eine Reihe ist konvergent genau dann, wenn
 - a. die Folge ihrer Partialsummen beschränkt ist.
 - b. die Folge ihrer Partialsummen konvergent ist.
 - c. ihre Glieder eine Nullfolge bilden.
 - d. ihre Glieder eine streng monotone Nullfolge bilden.
 - e. ihre Glieder eine alternierende Nullfolge bilden.
- 2 Sei $q_n = |a_{n+1}/a_n|$. Welche der folgenden Aussagen über $\sum_n a_n$ sind korrekt?
 - a. Hat (q_n) keinen Grenzwert, so ist die Reihe divergent.
 - b. Ist $q_n < 1$ für fast alle n , so ist die Reihe konvergent.
 - c. Ist $q_n < 2/3$ für fast alle n , so ist die Reihe konvergent.
 - d. Ist $q_n = 1$ für unendlich viele n , so ist die Reihe divergent.
 - e. Ist $q_n = 1$ für fast alle n , so ist die Reihe divergent.
- 3 Für $n \geq 0$ gilt $\sum_{1 \leq k \leq 2^n} \frac{1}{k} \geq 1 + \frac{n}{2}$.
- 4 Bestimmen sie die Werte der Reihen
 - a. $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^n}$
 - b. $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{4n^2 - 1}$.
- 5 Untersuchen sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.
 - a. $\sum \frac{n+4}{n^2 - 3n + 1}$
 - b. $\sum \frac{n!}{n^n}$
 - c. $\sum \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$
 - d. $\sum (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$
 - e. $\sum \frac{(-1)^n}{n\pi - (-1)^n n}$
 - f. $\sum \frac{n!}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}$
 - g. $\sum \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$
- 6 Für die Partialsummen der Reihe $e = \sum_{k \geq 0} 1/k!$ gilt die Fehlerabschätzung

$$|e - s_n| < \frac{1}{n!n}, \quad n \geq 1.$$
- 7 Zeigen sie die Divergenz der Reihe $\sum a_n$ mit $a_n = \begin{cases} 1/n, & n \text{ gerade,} \\ -1/n^2, & n \text{ ungerade.} \end{cases}$
- 8 Untersuchen sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, wobei $0 < q < 1$ und $\alpha > 1$.
 - a. $\sum_{n \geq 1} q^{\sqrt{n}}$
 - b. $\sum_{n \geq 1} q^{\log n}$
 - c. $\sum_{n \geq 1} q^{\log^\alpha n}$
 - d. $\sum_{n \geq 2} q^{\log \log n}$
- 9 Sei (a_n) monoton fallend und $\sum_{n \geq 1} a_n = s$ endlich. Dann gilt $0 \leq a_n \leq s/n$ für $n \geq 1$ und $na_n \rightarrow 0$.
- 10 *Verallgemeinertes Wurzel- und Quotientenkriterium* Gilt A-5.43

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \quad \text{oder} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1,$$

so ist $\sum_n a_n$ absolut konvergent.

- 11 *Abelsche partielle Summation* Sei $\sum_k a_k b_k$ eine Zahlenreihe. Mit $B_n = \sum_{1 \leq k \leq n} b_k$ gilt dann

$$\sum_{n < k \leq m} a_k b_k = a_m B_m - a_{n+1} B_n + \sum_{n < k < m} (a_k - a_{k+1}) B_k, \quad n < m.$$

Hinweis: Schreiben sie $b_k = B_k - B_{k-1}$.

- 12 *Abelsches Konvergenzkriterium* Ist (a_n) monoton und beschränkt und konvergiert die Reihe $\sum b_n$, so konvergiert auch $\sum a_n b_n$. *Hinweis:* Aufgabe 11.
- 13 *Dirichletsches Konvergenzkriterium* Konvergiert (a_n) monoton gegen Null und sind die Partialsummen von $\sum b_n$ beschränkt, so konvergiert $\sum a_n b_n$. *Hinweis:* Aufgabe 11.
- 14 Die Reihe $\sum_n a_n$ sei konvergent. Zeigen Sie die Konvergenz der folgenden Reihen.
- a. $\sum_{n \geq 1} a_n \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ b. $\sum_{n \geq 1} a_n \frac{1 + 2n^2}{1 + n^2}$ c. $\sum_{n \geq 1} a_n \sqrt[n]{n}$
- 15 Die Reihe $\sum_n a_n$ habe positive Glieder und sei divergent. Was kann man über die folgenden Reihen aussagen?
- a. $\sum_n \frac{a_n}{1 + a_n}$ b. $\sum_n \frac{a_n}{1 + n^2 a_n}$ c. $\sum_n \frac{a_n}{1 + a_n^2}$
- 16 *Cauchyscher Produktsatz* Sind die Zahlenreihen $\sum_{k \geq 0} a_k$ und $\sum_{l \geq 0} b_l$ absolut konvergent, so ist

$$\sum_{k \geq 0} a_k \sum_{l \geq 0} b_l = \sum_{n \geq 0} c_n, \quad c_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a_i b_{n-i}$$

wobei auch die rechte Seite absolut konvergiert. Dafür schreibt man auch kürzer

$$\sum_{k \geq 0} a_k \sum_{l \geq 0} b_l = \sum_{k, l \geq 0} a_k b_l = \sum_{n \geq 0} \sum_{k+l=n} a_k b_l.$$

Dazu zeige man:

- a. Für $c_m = \sum_{k+l=m} a_k b_l$ gilt

$$\left| \sum_{0 \leq k \leq n} a_k \sum_{0 \leq l \leq n} b_l - \sum_{0 \leq m \leq 2n} c_m \right| \leq \sum_{k > n} |a_k| \sum_{l < n} |b_l| + \sum_{k < n} |a_k| \sum_{l > n} |b_l|.$$

- b. Ferner gilt

$$\left| \sum_{m \geq 0} c_m - \sum_{0 \leq m \leq 2n} c_m \right| \leq \sum_{k > n} |a_k| \sum_{l \geq 0} |b_l| + \sum_{k \geq 0} |a_k| \sum_{l > n} |b_l|.$$

- c. Man schätze

$$\left| \sum_{k \geq 0} a_k \sum_{l \geq 0} b_l - \sum_{m \geq 0} c_m \right|$$

durch die vorangehenden Ausdrücke ab.

- 17 Bestimmen sie den Konvergenzradius der Reihen

a. $\sum \frac{(7z)^{7n}}{n^7}$ b. $\sum q^{n^2} z^n, \quad 0 < q < 1.$ c. $\sum \frac{n!}{n^n} z^n$

- 18 Man beweise die Formel von Hadamard ¹⁸ zunächst unter der Annahme, dass $\lim \sqrt[n]{|a_n|}$ existiert, und danach für den allgemeinen Fall _{A-5.43}.

- 19 Sei $\Lambda \in L(V)$ invertierbar. Gilt $\|\Lambda\| < \|\Lambda^{-1}\|^{-1}$, so ist auch $\Lambda - A$ invertierbar, und es gilt

$$\|(\Lambda - A)^{-1}\| \leq \frac{\|\Lambda^{-1}\|}{1 - \|\Lambda^{-1}\| \|\Lambda\|}.$$

- 20 Eine punktförmige Schnecke kriecht auf einem 1 m langen Gummiband mit der konstanten Geschwindigkeit von 5 cm/min vorwärts. Am Ende der ersten und jeder weiteren Minute wird das Band homogen um jeweils einen Meter gedehnt. Wird die Schnecke in endlicher Zeit das rechte Ende erreichen, wenn sie zu Beginn der ersten Stunde am linken Ende startet?

7

Stetigkeit

Mit dem Begriff der Stetigkeit verbindet sich die Vorstellung einer Bewegung ohne abrupte Sprünge, oder einer Kurve, die man »in einem Zug und ohne abzusetzen« zeichnen kann.

Natürlich ist dies keine mathematische Definition. So gibt es stetige Kurven, die ein Quadrat vollständig ausfüllen und sich damit jedem Zeichenversuch entziehen. Oder es gibt Funktionen, die in irrationalen Punkten stetig, in rationalen Punkten dagegen unstetig sind.

Präziser ist schon folgende Vorstellung. Wenn man sich mit dem Argument einer Funktion einem festen Punkt nähert, so sollten sich auch die zugehörigen Funktionswerte einem festen Wert nähern, und nicht wild herumspringen. Beschreiben wir den Abstand zum festen Punkt durch δ und den Abstand zum festen Wert durch ε , so erhalten wir bereits den Begriff der Stetigkeit in einem Punkt in der heute üblichen ε - δ -Charakterisierung.

Anders als in der naiven Vorstellung ist diese Stetigkeit aber lediglich eine *lokale* Eigenschaft. Sie kommt einem einzelnen Punkt im Definitionsbereich zu und hängt ausschließlich vom Verhalten der Funktion in einer kleinen Umgebung dieses Punktes ab.

Erst die Stetigkeit in *allen* Punkten des Definitionsbereichs kommt der naiven Vorstellung näher. Sie bildet die Grundlage für so fundamentale Sätze wie den Zwischenwertsatz, den Satz über Umkehrfunktionen oder den Satz über Minimum & Maximum.

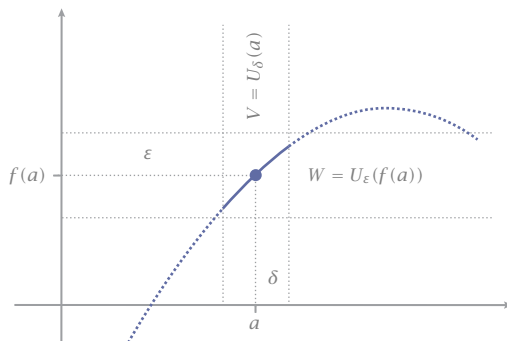
7.1

Stetige Funktionen und Abbildungen

Wir betrachten zuerst reelle Funktionen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, wobei D eine beliebige Teilmenge der reellen Zahlen bezeichnet. Dafür schreiben wir auch kurz

Abb 1

Im Punkt a stetige
Funktion



$$f: \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}.$$

Typischerweise ist D ein Intervall, aber dies spielt für die folgenden Betrachtungen keine Rolle.

- 1 **Definition** Eine Funktion $f: \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *stetig im Punkt $a \in D$* , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$t \in D \wedge |t - a| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(a)| < \varepsilon. \quad \times \quad (1)$$

Drücken wir dies mit Umgebungen aus, so ist eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig im Punkt $a \in D$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass f jeden Punkt in $U_\delta(a) \cap D$ auf einen Punkt in $U_\varepsilon(f(a))$ abbildet. Es gilt also

$$t \in U_\delta(a) \cap D \Rightarrow f(t) \in U_\varepsilon(f(a)), \quad (2)$$

oder noch kürzer

$$f(U_\delta(a) \cap D) \subset U_\varepsilon(f(a)). \quad (3)$$

Für den Graphen von f bedeutet dies, dass es zu jedem horizontalen ε -Streifen W um den Bildpunkt $f(a)$ einen vertikalen δ -Streifen V um den Urbildpunkt a gibt, so dass der Graph von f über $V \cap D$ ganz in W enthalten ist Abb 1.

Man beachte, dass nur solche $t \in U_\delta(a)$ betrachtet werden, die auch zum Definitionsbereich D von f gehören. Es wird nicht vorausgesetzt, dass f auf der gesamten δ -Umgebung von a definiert ist.

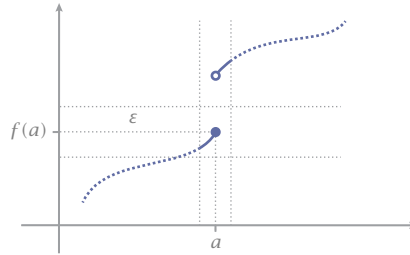
► **Beispiele** A. Eine konstante Funktion $t \mapsto c$ ist in jedem Punkt stetig.

B. Eine lineare Funktion $t \mapsto mt + b$ ist in jedem Punkt stetig. Denn zu $\varepsilon > 0$ wähle

$$\delta = \frac{\varepsilon}{1 + |m|}.$$

Abb 2

Im Punkt a unstetige
Funktion



Für $|t - a| < \delta$ gilt dann

$$|(mt + b) - (ma + b)| \leq |m| |t - a| < |m| \delta < \varepsilon.$$

Dieses δ können wir unabhängig vom Punkt t wählen.

c. Für die Parabel $t \mapsto t^2$ gilt aufgrund der zweiten binomischen Formel

$$|t^2 - a^2| = |t - a| |t + a|.$$

In einer kleinen Umgebung von a ist $|t + a| < 1 + |a|$. Wählen wir also

$$|t - a| < \delta = \frac{\varepsilon}{1 + |a|}$$

für alle $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so wird

$$|t^2 - a^2| < \delta |t + a| < \varepsilon.$$

In diesem Fall hängt δ sowohl von ε als auch von a ab. ◀

Definition Eine Funktion $f: \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *unstetig im Punkt $a \in D$* , wenn sie dort nicht stetig ist. ✕

Somit ist f im Punkt a *unstetig*, wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass in jeder δ -Umgebung von a *wenigstens ein* Punkt $t \in D$ existiert, so dass

$$f(t) \notin U_\varepsilon(f(a)).$$

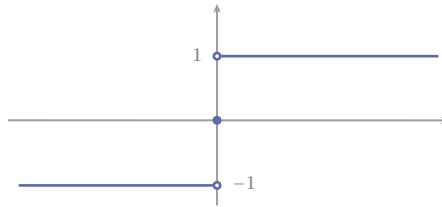
Stetigkeit in einem Punkt ist eine *lokale Eigenschaft*. Das heißt, sie hängt nur vom Verhalten der Funktion in einer hinreichend kleinen Umgebung dieses Punktes ab. Mehr noch, man kann von der Stetigkeit in einem Punkt a *nicht* auf die Stetigkeit in einem anderen Punkt b schließen, auch wenn er noch so nahe bei a liegt. Ein Beispiel hierfür ist die Thomaefunktion A-12.

Nun noch die *globale* Stetigkeit.

Definition Eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *stetig auf D* , oder kurz *stetig*, wenn sie in jedem Punkt von D stetig ist. ✕

Abb 3

Signumfunktion



Umgekehrt ist f auf D *unstetig*, wenn sie in wenigstens *einem* Punkt von D unstetig ist. Ein unstetiger Punkt genügt also, um die Stetigkeit auf ganz D zu ruinieren.

- 2 ▶ A. Die Betragsfunktion $t \mapsto |t|$ ist auf \mathbb{R} stetig.
 B. Die *Vorzeichen-* oder *Signumfunktion*

$$\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

ist in 0 unstetig und in allen anderen Punkten stetig.

C. Die Gaußklammer $t \mapsto [t]$ ist in jedem Punkt $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ stetig und in jedem Punkt $a \in \mathbb{Z}$ unstetig.

D. Die *Dirichletfunktion*

$$\delta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \delta(t) = \begin{cases} 1, & t \in \mathbb{Q} \\ 0, & t \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ist in keinem Punkt stetig.

E. Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist auch die Einschränkung von f auf eine beliebige Teilmenge von D stetig. Für die Stetigkeit ist es daher unerheblich, ob die Definitionsmenge D eine ›schöne‹ Menge ist. ◀

■ Stetige Abbildungen

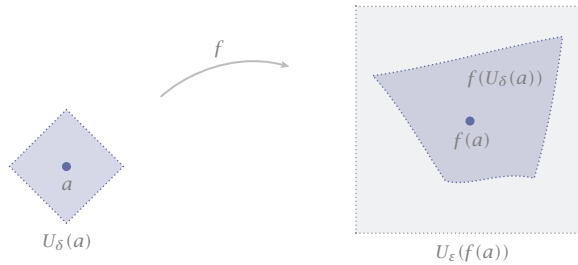
Der Begriff der Stetigkeit ist nicht nur für reellwertige Funktionen auf der reellen Geraden erklärt. Er ist auch sinnvoll für Abbildungen zwischen Räumen, in denen in irgendeiner Weise ein Abstand definiert ist. Als erste Verallgemeinerung in diese Richtung definieren wir nun Stetigkeit für Abbildungen zwischen *normierten Vektorräumen*. Für den Anfang kann man sich darunter den \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m mit der euklidischen Norm vorstellen.

Seien $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ normierte Vektorräume und

$$f : E \supset D \rightarrow F$$

Abb 4

Im Punkt a stetige
Abbildung



eine Abbildung, wobei D eine beliebige Teilmenge von E sein darf. Die Stetigkeitsdefinition $_1$ überträgt sich auf diese Situation, wenn wir den reellen Betrag durch die entsprechenden Normen ersetzen.

Definition Eine Abbildung $f: E \supset D \rightarrow F$ heißt *stetig im Punkt $a \in D$* , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$x \in D \wedge \|x - a\|_E < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon. \quad \times$$

Um dies wie in (2) und (3) durch Umgebungen auszudrücken, sei

$$U_\delta(a) := \{x \in E : \|x - a\|_E < \delta\},$$

$$U_\varepsilon(b) := \{y \in F : \|y - b\|_F < \varepsilon\}.$$

Dann erhalten wir folgende

Äquivalente Definition Eine Abbildung $f: E \supset D \rightarrow F$ heißt *stetig in $a \in D$* , wenn zu jeder ε -Umgebung um $f(a)$ eine δ -Umgebung um a existiert, so dass

$$f(U_\delta(a) \cap D) \subset U_\varepsilon(f(a)). \quad \times$$

Für $D \subset \mathbb{R}$ und $F = \mathbb{R}$ erhalten wir wieder unsere Definition für reelle Funktionen $_1$. — Globale Stetigkeit ist wie zuvor erklärt:

Definition Eine Abbildung $f: E \supset D \rightarrow F$ heißt *stetig auf D* , oder kurz *stetig*, wenn sie in jedem Punkt von D stetig ist. \times

■ Das Folgenkriterium

Der nächste Satz charakterisiert Stetigkeit mithilfe von Folgen. Dies erlaubt uns, Stetigkeitssätze aus entsprechenden Sätzen über Folgen zu erhalten.

- 3 **Folgenkriterium** Eine Abbildung $f: E \supset D \rightarrow F$ ist *stetig im Punkt $a \in D$* genau dann, wenn für jede Folge (x_n) in D gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a). \quad \times$$

Wichtig: Dies muss für *jede* Folge in D mit Grenzwert a gelten, nicht nur für eine, die einem gerade gut passt.

⟨⟨⟨ ⇒ Sei f stetig in a und (x_n) eine beliebige gegen a konvergierende Folge in D . Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert dazu ein $\delta > 0$, so dass

$$\|f(x) - f(a)\|_F < \varepsilon, \quad x \in U_\delta(a) \cap D.$$

Wegen $x_n \rightarrow a$ existiert zu diesem $\delta > 0$ ein $N \geq 1$, so dass

$$\|x_n - a\|_E < \delta, \quad n \geq N.$$

Da alle x_n in D liegen, gilt auch $x_n \in U_\delta(a) \cap D$ für $n \geq N$, und wir erhalten

$$\|f(x_n) - f(a)\|_F < \varepsilon, \quad n \geq N.$$

Da für jedes $\varepsilon > 0$ ein solches $N \geq 1$ existiert, gilt $f(x_n) \rightarrow f(a)$.

⇐ Wir zeigen die Kontraposition. Angenommen, f ist *nicht* stetig in a . Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ und zu jedem $n \geq 1$ einen Punkt $x_n \in U_{1/n}(a) \cap D$ mit

$$\|f(x_n) - f(a)\|_F \geq \varepsilon.$$

Wir erhalten eine Folge (x_n) in D mit $x_n \rightarrow a$, aber $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$. ⟩⟩⟩

Die Negation des Folgenkriteriums \mathfrak{z} ergibt ein handliches

Unstetigkeitskriterium *Gibt es wenigstens eine Folge (x_n) in D mit $x_n \rightarrow a$, aber $f(x_n) \not\rightarrow f(a)$, so ist f im Punkt a unstetig.* ✕

▶ *Beispiele* A. Die Gaußklammer ist unstetig in jedem Punkt $m \in \mathbb{Z}$, denn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [m - 1/n] = m - 1 \neq [m] = m.$$

B. Die Signumfunktion ist unstetig im Punkt 0, denn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sgn}(-1/n) = -1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sgn}(1/n) = 1,$$

aber $\operatorname{sgn}(0) = 0$. ◀

Nun noch die globale Version des Folgenkriteriums. Der Beweis sei als Übung überlassen $\mathfrak{A-5}$.

4 **Satz** *Eine Abbildung $f: E \supset D \rightarrow F$ ist stetig auf ganz D , wenn sie jede konvergente Folge in D in eine konvergente Folge in F abbildet.* ✕

Ist also f auf D stetig und konvergiert die Folge (x_n) in D , so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right).$$

Bei stetigen Funktionen darf man also \lim_{\leftarrow} und f_{\leftarrow} vertauschen.

■ Stetigkeitssätze

Wie bei der Konvergenz von Folgen fragen wir nun, wie sich Stetigkeit mit Körper- und Vektorraumoperationen verträgt. Zuerst betrachten wir reellwertige Funktionen auf einer beliebigen Teilmenge D eines normierten Vektorraums E und die Körperoperationen in \mathbb{R} .

- 5 **Satz** Sind die Funktionen $f, g: E \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig im Punkt $a \in D$, so sind es auch die Funktionen $f + g$, fg sowie f/g , falls $g(a) \neq 0$. ✕

⟨⟨⟨⟨ Betrachte zum Beispiel f/g . Ist (x_n) eine beliebige Folge in D mit Grenzwert a , so gilt aufgrund der Stetigkeit von f und g

$$f(x_n) \rightarrow f(a), \quad g(x_n) \rightarrow g(a).$$

Wegen $g(a) \neq 0$ gilt dann auch $_{5,7} f(x_n)/g(x_n) \rightarrow f(a)/g(a)$. Das ist gleichbedeutend mit

$$(f/g)(x_n) \rightarrow (f/g)(a).$$

Da dies für jede solche Folge gilt, ist f/g in a stetig $_3$. Alles Übrige beweist man genauso. ⟩⟩⟩⟩

Korollar Sind die Funktionen $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf D , so sind es auch die Funktionen $f + g$, fg sowie f/g , falls $g \neq 0$ auf ganz D . ✕

Bemerkung Aufgrund dieses Satzes bildet der Raum

$$C(D) := \{f : D \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist stetig auf } D\}$$

einen reellen linearen Vektorraum. Da auch das Produkt zweier Elemente in ihm erklärt ist, ist er sogar eine Algebra. \rightarrow

▶ *Beispiel* Aus der Stetigkeit der konstanten Funktionen und der Identitätsfunktion folgt $_5$ die Stetigkeit aller *Polynome*, also Funktionen $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Gestalt

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$$

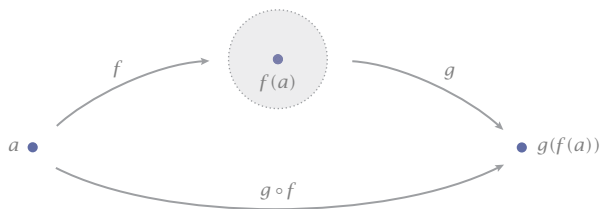
mit reellen Koeffizienten a_0, \dots, a_n . ◀

Für Abbildungen in einen beliebigen normierten Vektorraum F sind lediglich Linearkombinationen erklärt. Der entsprechende Satz lautet hier $_{5,34}$:

Satz Sind die Abbildungen $f, g: E \supset D \rightarrow F$ stetig im Punkt $a \in D$, so ist es auch jede Linearkombination $\lambda f + \mu g: D \rightarrow F$. Entsprechendes gilt für die Stetigkeit auf ganz D . ✕

Abb 5

Komposition von
 f und g



Wir betrachten nun die Komposition zweier stetiger Abbildungen. Vorausgesetzt wird dabei natürlich, dass diese Komposition wohldefiniert ist.

Satz Die Komposition $g \circ f$ sei auf D wohldefiniert. Ist f stetig im Punkt $a \in D$ und g stetig im Punkt $f(a)$, so ist auch $g \circ f$ stetig im Punkt a . ✕

⟨⟨⟨ Sei (x_n) eine konvergente Folge in D mit $x_n \rightarrow a$. Aufgrund der Stetigkeit von f gilt dann $f(x_n) \rightarrow f(a)$. Dann gilt auch $g(f(x_n)) \rightarrow g(f(a))$ wegen der Stetigkeit von g im Punkt $f(a)$. Somit gilt auch

$$(g \circ f)(x_n) \rightarrow (g \circ f)(a).$$

Da dies für jede Folge (x_n) in D mit $x_n \rightarrow a$ gilt, ist $g \circ f$ im Punkt a stetig. ⟩⟩⟩

Korollar Ist f stetig auf D und g stetig auf einer Obermenge von $f(D)$, so ist auch $g \circ f$ stetig auf D . ✕

► Die Funktion

$$t \mapsto \sqrt{1+t^2}$$

ist auf \mathbb{R} stetig. Denn das Polynom $1+t^2$ ist auf \mathbb{R} stetig und nichtnegativ, und die Wurzel ist auf $[0, \infty)$ ebenfalls stetig, wie wir in Abschnitt 2 sehen werden. ◀

■ Lipschitzstetige Abbildungen

Eine wichtige und sehr handliche Klasse stetiger Abbildungen bilden die *lipschitzstetigen* Abbildungen.

Definition Eine Abbildung $f: E \supset D \rightarrow F$ heißt *lipschitzstetig* auf D , wenn es eine Konstante $L \geq 0$ gibt, genannt *Lipschitzkonstante*, so dass

$$\|f(u) - f(v)\|_F \leq L \|u - v\|_E, \quad u, v \in D.$$

Eine solche Funktion mit Lipschitzkonstante L heißt auch *L-lipschitz*. ✕

Bemerkungen a. Mit L ist auch jede reelle Zahl $L' \geq L$ eine Lipschitzkonstante.

b. Ist f Lipschitz auf D , so ist

$$L_* = \sup_{\substack{u \neq v \\ u, v \in D}} \frac{\|f(u) - f(v)\|_F}{\|u - v\|_E} < \infty,$$

und dies ist auch die kleinstmögliche Lipschitzkonstante auf D A-17.

c. Lipschitzstetige Funktionen heißen auch *dehnungsbeschränkt*, was diese Eigenschaft recht anschaulich beschreibt. \rightarrow

Die Berechtigung der Bezeichnung ergibt sich aus dem nächsten Lemma.

6 **Lemma** *Jede Lipschitzstetige Funktion ist stetig.* \times

⟨⟨⟨ Sei f L -Lipschitz. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ wähle man $\delta = \varepsilon / (L + 1) > 0$. Für alle u, v im Definitionsbereich von f mit $\|u - v\|_E < \delta$ gilt dann

$$\|f(u) - f(v)\|_F \leq L \|u - v\|_E < L\delta = \frac{L}{L+1} \varepsilon < \varepsilon.$$

Da δ unabhängig vom betrachteten Punkt ist, folgt daraus die Stetigkeit von f auf dem gesamten Definitionsbereich. $\rangle\rangle\rangle$

▶ A. Auf jedem normierten Raum sind konstante Funktionen 0-Lipschitz, und die Identität ist 1-Lipschitz.

B. Auf jedem normierten Raum ist die Norm $\|\cdot\|$ 1-Lipschitz, denn dies ist gerade die umgekehrte Dreiecksungleichung,

$$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|.$$

Insbesondere ist die Betragsfunktion $|\cdot|$ 1-Lipschitz auf \mathbb{R} .

C. Auf \mathbb{C} sind die Abbildungen

$$z \mapsto \Re z, \quad z \mapsto \Im z, \quad z \mapsto \bar{z}$$

sämtlich 1-Lipschitz. Zum Beispiel ist

$$|\Im z - \Im w| = \left| \frac{z - \bar{z}}{2i} - \frac{w - \bar{w}}{2i} \right| \leq \frac{|z - w| + |\bar{z} - \bar{w}|}{2} = |z - w|.$$

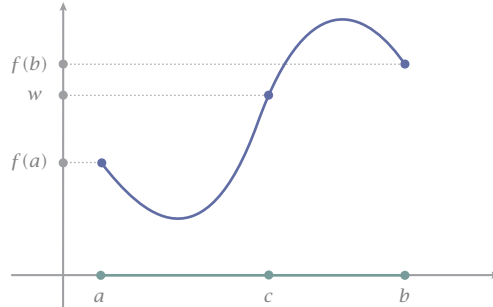
D. Die Parabel $t \mapsto t^2$ ist auf \mathbb{R} *nicht* Lipschitz, denn für $u > v = 0$ ist

$$\frac{|u^2 - v^2|}{|u - v|} = \frac{|u^2|}{|u|} = |u|$$

nicht beschränkt. Sie ist aber Lipschitz auf jedem beschränkten Intervall A-15. \leftarrow

Abb 6

Zwischenwertsatz
von Bolzano



7.2

Stetige Funktionen auf Intervallen

Wir betrachten nun einige fundamentale Eigenschaften stetiger reellwertiger Funktionen auf einem *Intervall*, also Funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dazu zählen der Zwischenwertsatz ⁹, der Satz über Umkehrfunktionen ¹³, und der Satz vom Minimum & Maximum ¹¹. — Zuerst die Zwischenwertsätze.

7 Zwischenwertsatz von Bolzano Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f(a) \neq f(b)$.

Dann existiert zu jeder reellen Zahl w zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens ein Punkt $c \in (a, b)$ mit $f(c) = w$. ✕

Bemerkung Der Zwischenwertsatz gilt offensichtlich *nicht*, wenn f nicht stetig oder der Definitionsbereich kein Intervall ist – siehe Abbildung 7. \rightarrow

◀◀◀◀ Wir können annehmen, dass $f(a) < w < f(b)$. Andernfalls gehen wir zur Funktion $-f$ und dem Zwischenwert $-w$ über und wenden den folgenden Beweis darauf an.

Betrachte die Menge

$$A := \{t \in [a, b] : f(t) < w\} \subset [a, b].$$

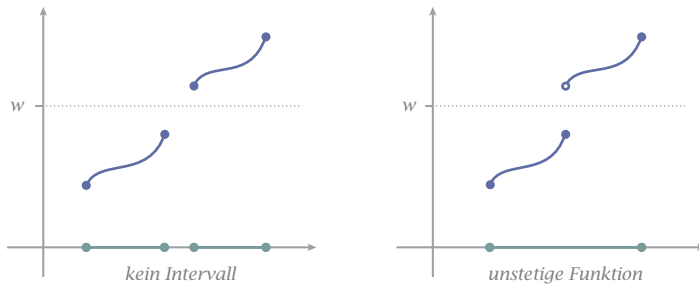
Diese Menge ist nicht leer, denn $a \in A$. Außerdem ist sie beschränkt. Somit existiert $c = \sup A$, und offensichtlich ist $c \in [a, b]$. Wir zeigen, dass $f(c) = w$.

Aufgrund des Approximationsatzes ^{5,27} existiert eine Folge (t_n) in A mit $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = c$. Mit der Stetigkeit von f und $f(t_n) < w$ für alle n folgt ^{5,9}

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = f(c) \leq w.$$

Wegen $w < f(b)$ ist $c \neq b$ und somit $c < b$. Wäre nun $f(c) < w$, so wäre f aus Stetigkeitsgründen auch in einer kleinen, ganz in $[a, b]$ enthaltenen Umgebung von c kleiner als w . Es gäbe also ein $d \in [a, b]$ mit

Abb 7 Zwischenwertsatz von Bolzano nicht anwendbar



$$c < d < b, \quad f(d) < w.$$

Dann aber wäre $d \in A$, im Widerspruch zur Definition von c als dem Supremum von A . Also gilt nicht $f(c) < w$, sondern $f(c) = w$. »»»»

Ein wichtiger Spezialfall des Zwischenwertsatzes liefert die Existenz einer **Nullstelle** einer Funktion, also eines Punktes x mit $f(x) = 0$.

- 8 **Nullstellensatz** Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $f(a)f(b) < 0$, so besitzt f in (a, b) mindestens eine Nullstelle. ✕

«««« Entweder ist $f(a) < 0 < f(b)$ oder $f(a) > 0 > f(b)$. In beiden Fällen können wir den Satz von Bolzano 7 mit $w = 0$ anwenden. »»»»

► **Beispiel** Jedes reelle Polynom p ungeraden Grades,

$$p(t) = t^{2n+1} + a_{2n}t^{2n} + \dots + a_1t + a_0,$$

besitzt mindestens eine reelle Nullstelle. Denn ein solches Polynom definiert eine stetige Funktion auf \mathbb{R} , die für hinreichend große t positiv und hinreichend kleine t negativ wird. Die Existenz einer Nullstelle folgt damit aus dem Nullstellensatz 8.

Dies gilt natürlich nicht für Polynome geraden Grades. Das Polynom $t^2 + 1$ beispielsweise besitzt keine reelle Nullstelle. ◀

Der Zwischenwertsatz von Bolzano lässt sich noch verallgemeinern formulieren. Sei dazu

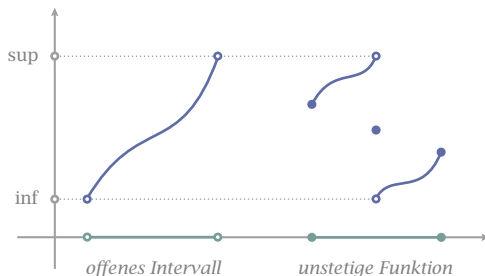
$$\sup_I f := \sup f(I) = \sup \{f(t) : t \in I\},$$

und analog $\inf_I f$. Diese dürfen auch den Wert ∞ respektive $-\infty$ annehmen.

- 9 **Allgemeiner Zwischenwertsatz** Sei I ein beliebiges Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f jeden Wert zwischen $\inf_I f$ und $\sup_I f$ mindestens einmal an. ✕

Abb 8

Kein Minimum oder Maximum



»»» Sei $\inf_I f < w < \sup_I f$. Dann gibt es aufgrund des Approximationsatzes 2.9 Punkte $a \in I$ und $b \in I$ mit $f(a) < w < f(b)$. Wenden wir den Satz von Bolzano 7 auf die Einschränkung von f auf das abgeschlossene Intervall mit den Endpunkten a und b an, so erhalten wir die Behauptung. »»»

Bemerkung Alle drei Zwischenwertsätze sind tatsächlich *äquivalent*: aus jedem lassen sich die beiden anderen ableiten A-9. \rightarrow

Geometrisch betrachtet ist der allgemeine Zwischenwertsatz äquivalent zu folgender Formulierung.

- 10 **Intervallabbildungssatz** *Stetige Bilder von Intervallen sind wieder Intervalle. Das heißt, ist I ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist $f(I)$ ebenfalls ein Intervall. \times*

»»» Besteht $f(I)$ nur aus einem Punkt, so sind wir fertig. Gehören zwei Punkte $u < v$ zu $f(I)$, so nimmt f also die Werte u und v an. Dann nimmt f aufgrund des Zwischenwertsatzes 9 auf I auch jeden dazwischen liegenden Wert an. Es gilt also auch $[u, v] \subset f(I)$. Somit enthält $f(I)$ mit je zwei Punkten auch alle dazwischen liegenden Punkte. *Per definitionem* ist $f(I)$ damit ein Intervall. »»»

■ Minimum & Maximum

Für eine beliebige Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ existiert immer $\sup_I f$ auf der erweiterten Zahlengeraden. Dies kann auch den Wert ∞ annehmen. Es muss auch keinen Punkt in I geben, an dem f diesen Wert annimmt, auch wenn f beschränkt ist. Einfache Beispiele sind in Abbildung 8 skizziert.

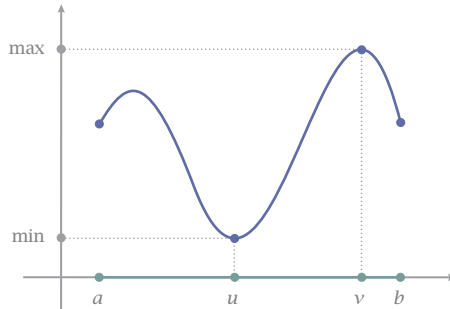
Gibt es dagegen einen Punkt $c \in I$ mit $f(c) = \sup_I f$, so spricht man von einem *Maximum* und sagt, f nimmt sein Supremum im Punkt c an¹. Man schreibt

$$\sup_I f = \max_I f = f(c)$$

¹ Gebräuchlicher ist die nicht ganz korrekte Formulierung, f nehme sein Maximum an.

Abb 9

Satz vom Minimum & Maximum



und nennt c selbst eine *Maximalstelle* von f . Ein Maximum ist in jedem Fall endlich. Entsprechend sind das *Minimum* $\min_I f$ und eine *Minimalstelle* erklärt.

- 11 **Satz vom Minimum & Maximum** Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so existieren Punkte $u, v \in [a, b]$ mit

$$f(u) \leq f(t) \leq f(v), \quad t \in [a, b].$$

Insbesondere gilt also

$$f(u) = \inf_{[a, b]} f = \min_{[a, b]} f, \quad f(v) = \sup_{[a, b]} f = \max_{[a, b]} f. \quad \times$$

Eine *stetige* Funktion auf einem *abgeschlossenen* Intervall nimmt also immer ihre Extrema an. Dies gilt im Allgemeinen *nicht*, wenn das Intervall nicht abgeschlossen oder die Funktion nicht stetig ist Abb 8.

««« Sei $m := \inf_{[a, b]} f$, wobei im Moment auch $-\infty$ zugelassen ist. Aufgrund des erweiterten Approximationssatzes 5.27 existiert eine Folge (t_n) in $[a, b]$ mit $f(t_n) \rightarrow m$. Da diese Folge beschränkt ist, besitzt sie nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß 5.17 eine konvergente Teilfolge (t_{n_k}) mit Grenzwert u . Da $a \leq t_n \leq b$ für alle n , ist auch $a \leq u \leq b$. Es gilt also

$$\lim_{k \rightarrow \infty} t_{n_k} = u \in [a, b].$$

Aufgrund der Stetigkeit von f ist

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(t_{n_k}) = f(u).$$

Da aber $f(t_{n_k})$ Teilfolge der konvergenten Folge $f(t_n)$ ist, erhalten wir insgesamt

$$f(u) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(t_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = m = \inf_{[a, b]} f.$$

Insbesondere ist m endlich. – Entsprechend für das Supremum. »»»

Damit erhalten wir auch eine Verbesserung des Intervallabbildungssatzes ₁₀ für abgeschlossene Intervalle.

- 12 **Korollar** *Eine stetige reelle Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall ist beschränkt und bildet dieses auf ein abgeschlossenes Intervall ab.* ✕

Für die anderen Intervalltypen gilt dieses Korollar nicht. Eine stetige Funktion kann auf einem offenen Intervall unbeschränkt sein, oder das Bild kann ein abgeschlossenes Intervall sein.

■ Umkehrfunktionen

Wir betrachten nun eine stetige Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, die außerdem *injektiv* ist. Aufgrund des Intervallabbildungssatzes ₁₀ ist $J = f(I)$ ebenfalls ein Intervall, und aufgrund der Injektivität existiert die Umkehrfunktion f^{-1} auf J . Diese Funktion ist ebenfalls stetig:

- 13 **Satz über stetige Umkehrfunktionen** *Sei I ein Intervall. Ist $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv, so ist auch $f^{-1}: J \rightarrow I$ mit $J = f(I)$ stetig.* ✕

⟨⟨⟨ Da Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist, können wir $I = [a, b]$ annehmen. In diesem Fall ist auch J ein abgeschlossenes Intervall ₁₂. Sei nun (s_n) eine konvergente Folge mit Grenzwert s in J , und (t_n) die Folge ihrer Bilder unter f^{-1} in $I = [a, b]$. Aufgrund des Satzes von Bolzano-Weierstrass besitzt diese Folge eine konvergente Teilfolge (t'_n) . Für deren Grenzwert t gilt dann, aufgrund der Stetigkeit von f ,

$$f(t) = \lim f(t'_n) = \lim s'_n = s,$$

denn jede Teilfolge von (s_n) hat ja denselben Grenzwert s . Also ist

$$t = f^{-1}(s).$$

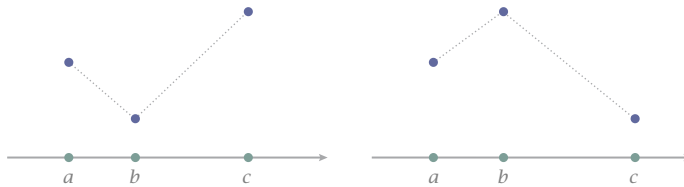
Das aber bedeutet, dass *jede* konvergente Teilfolge von (t_n) denselben Grenzwert t hat. Da die Folge selbst beschränkt ist, ist sie damit auch konvergent _{A-5.20}, und wir erhalten

$$\lim f^{-1}(s_n) = f^{-1}(s).$$

Also ist f^{-1} stetig im Punkt s . Da s beliebig war, ist f^{-1} stetig auf J . ⟩⟩⟩

Für stetige Funktionen auf einem beliebigen Definitionsbereich kann es recht schwierig sein, ihre Injektivität festzustellen. Auf Intervallen reduziert sich das Problem allerdings auf die einfache Frage, ob f streng monoton ist.

Abb 10 Zum Beweis des Lemmas



14 **Definition** Eine Funktion $f: \mathbb{R} \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *monoton steigend*, falls

$$u < v \Rightarrow f(u) \leq f(v)$$

für alle $u, v \in D$. Sie heißt *streng monoton steigend*, falls sogar

$$u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$$

für alle $u, v \in D$. Analog sind *monoton fallend* und *streng monoton fallend* definiert. Schließlich heißt eine Funktion (*streng*) *monoton*, wenn sie (*streng*) *monoton steigt oder fällt*. ✕

► A. Jede konstante Funktionen $t \mapsto c$ ist auf \mathbb{R} *monoton steigend* und *monoton fallend*, aber natürlich nicht *streng monoton*.

B. Die Identitätsfunktion $t \mapsto t$ ist auf \mathbb{R} *streng monoton steigend*.

C. Die Parabel $t \mapsto t^2$ ist auf $(-\infty, 0]$ *streng monoton fallend* und auf $[0, \infty)$ *streng monoton steigend*.

D. Die Cosinusfunktion \cos ist auf den abgeschlossenen Intervallen

$$I_n^- = [(2n - 1)\pi, 2n\pi], \quad I_n^+ = [2n\pi, (2n + 1)\pi], \quad n \in \mathbb{Z},$$

streng monoton steigend respektive *streng monoton fallend*. ◀

Lemma Sei I ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f *injektiv genau dann*, wenn f *streng monoton* ist. ✕

◀◀◀◀ \Leftarrow Das ist klar.

\Rightarrow Angenommen, f ist nicht *streng monoton*. Dann muss es in I je ein Segment geben, auf dem f *steigt* respektive *fällt*. Dann gibt es aber auch drei Punkte $a < b < c$ in I , so dass

$$f(a) > f(b) < f(c) \quad \text{oder} \quad f(a) < f(b) > f(c).$$

In jedem Fall folgt aus dem Zwischenwertsatz die Existenz von mindestens zwei Punkten in I , an denen f denselben Wert annimmt, also nicht *injektiv* ist. ▶▶▶▶

Als erste Anwendung erhalten wir – endlich – die Existenz der n -ten Wurzel als stetige Funktion auf der Halbgereaden $[0, \infty)$.

- 15 **Wurzelsatz** Für jedes $n \geq 2$ besitzt die Funktion $t \mapsto t^n$ auf $[0, \infty)$ eine streng monoton steigende, stetige Umkehrfunktion

$$[0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad t \mapsto \sqrt[n]{t},$$

genannt die n -te Wurzelfunktion. \times

7.3 Funktionsgrenzwerte

Ist eine Funktion f in einem Punkt a ihres Definitionsbereichs stetig, so ist

$$f(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

für jede Folge (x_n) im Definitionsbereich von f , die gegen a konvergiert. Ein solcher Grenzwert kann aber auch dann existieren, wenn f im Punkt a gar nicht definiert oder dort unstetig ist.

► **Beispiel** Es ist $3_{.10}$

$$\frac{t^3 - 1}{t - 1} = t^2 + t + 1.$$

Die links stehende Funktion ist bei $t = 1$ nicht definiert, die rechts stehende dagegen auf ganz \mathbb{R} stetig. Man kann daher erwarten, dass

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3 - 1}{t - 1} = 3. \quad \blacktriangleleft$$

Wir wollen solche Grenzwerte unabhängig von einem eventuell vorliegenden Funktionswert definieren, und das auch in solchen Punkten, wo die Funktion nur in einer Umgebung, aber nicht im Punkt selbst definiert ist. Dazu benötigen wir den Begriff des *Häufungspunktes* einer Menge.

Definition Sei E ein normierter Vektorraum und $D \subset E$. Ein Punkt $a \in E$ heißt *Häufungspunkt* von D , wenn in jeder Umgebung von a unendlich viele Punkte von D liegen. \times

- A. Eine endliche Menge besitzt *keine* Häufungspunkte.
 B. Die Menge $\{1/n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ besitzt 0 als einzigen Häufungspunkt.
 C. Die Menge $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ besitzt jede reelle Zahl als Häufungspunkt.

D. Ist die Zahlenfolge $(a_n)_{n \geq 1}$ konvergent mit Grenzwert a und sind unendlich viele Folgenglieder verschieden, so ist a der einzige Häufungspunkt der Menge $A = \{a_n : n \geq 1\}$. Gibt es dagegen nur endlich viele verschiedene Folgenglieder, so ist A endlich und hat keinen Häufungspunkt. \blacktriangleleft

Definition Sei $f: E \supset D \rightarrow F$ eine Abbildung und a ein Häufungspunkt von D . Dann heißt $w \in F$ der **Grenzwert** von f im Punkt a , geschrieben

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = w,$$

wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass

$$f(\dot{U}_\delta(a) \cap D) \subset U_\varepsilon(w), \quad (4)$$

wobei

$$\dot{U}_\delta(a) := U_\delta(a) \setminus \{a\} = \{x \in E : 0 < \|x - a\|_E < \delta\}$$

die **punktierte δ -Umgebung** des Punktes $a \in E$ bezeichnet. \blacktriangleright

Die Bedingung (4) ähnelt der Stetigkeitsbedingung in (3), nur wird hier die Funktion f an der Stelle a nicht ausgewertet. Sie muss daher auch nicht in a definiert sein. Andererseits ist für einen Häufungspunkt a die Menge $\dot{U}_\delta(a) \cap D$ für alle $\delta > 0$ nicht leer. Andernfalls wäre Bedingung (4) automatisch erfüllt.

16 Folgenkriterium für Funktionsgrenzwerte Sei $f: E \supset D \rightarrow F$ und a ein Häufungspunkt von D . Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = w$$

genau dann, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = w$$

für jede gegen a konvergierende Folge (x_n) in $D \setminus \{a\}$. \blacktriangleright

⟨⟨⟨ Der Beweis ist praktisch identisch mit dem Beweis des Folgenkriteriums für Stetigkeit in einem Punkt z . Wir wiederholen ihn hier der Einfachheit halber.

\Rightarrow Gilt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = w$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass (4) gilt. Ist (x_n) eine Folge in $D \setminus \{a\}$ mit Grenzwert a , so existiert zu diesem δ wiederum ein $N \geq 1$, so dass $x_n \in U_\delta(a)$ für alle $n \geq N$. Es gilt sogar

$$x_n \in \dot{U}_\delta(a) \cap D, \quad n \geq N.$$

da die Folgenglieder ja in $D \setminus \{a\}$ liegen. Also gilt

$$f(x_n) \in U_\varepsilon(w), \quad n \geq N.$$

Da für jedes $\varepsilon > 0$ solch ein N existiert, gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = w$.

\Leftarrow Angenommen, es gilt *nicht* $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = w$. Da *jede* punktierte Umgebung von a Punkte aus D enthält, gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass in jeder punktierten $1/n$ -Umgebung von a ein $x_n \in D$ existiert mit

$$f(x_n) \notin U_\varepsilon(w).$$

Diese x_n bilden eine konvergente Folge in $D \setminus \{a\}$ mit Grenzwert a , für die $f(x_n)$ sicher *nicht* gegen w konvergiert. Wir erhalten damit einen Widerspruch. \gggg

Aus diesem Kriterium ergibt sich die folgende Charakterisierung der Stetigkeit, die oft auch als deren Definition dient.

- 17 **Korollar** Sei $D \subset E$ und $a \in D$ Häufungspunkt von D . Dann ist $f: D \rightarrow F$ stetig in a genau dann, wenn $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. \times

Bemerkung Jeder Punkt einer Menge D ist entweder ein Häufungspunkt oder ein *isolierter Punkt* von D . In letzterem Fall existiert also eine Umgebung von a , die keine weiteren Punkte von D enthält. In einem isolierten Punkt ist *jede* Funktion stetig A-4. \rightarrow

Mit dem Folgenkriterium 16 erhalten wir Grenzwertsätze für Funktionen aus den Grenzwertsätzen für Folgen 5.7. Der Beweis der folgenden Ergebnisse ist als Übung überlassen.

- 18 **Grenzwertsätze** Sei a ein Häufungspunkt von D . Besitzen die Funktionen $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt a die Grenzwerte

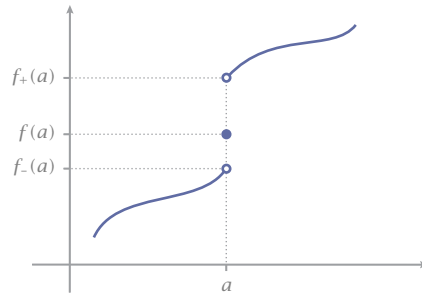
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = u, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = v,$$

so gilt auch

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} (\lambda f + \mu g)(x) = \lambda u + \mu v$,
 (ii) $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = uv$,
 (iii) $\lim_{x \rightarrow a} (f/g)(x) = u/v$, falls $v \neq 0$. \times
- 19 \blacktriangleright A. Da die Sinusfunktion beschränkt ist, gilt $\lim_{t \rightarrow 0} t \sin t^{-1} = 0$.
 B. Die Funktion $t \mapsto \sin t^{-1}$ dagegen hat in 0 keinen Grenzwert.
 C. Die Dirichletfunktion 2 δ besitzt in keinem einzigen Punkt der reellen Gerade einen Grenzwert.
 D. Identität (i) gilt übrigens auch für Abbildungen in einen beliebigen Banachraum F . \blacktriangleleft

Abb 11

Einseitige Grenzwerte
einer monotonen
Funktion



■ Einseitige Grenzwerte

Auf der reellen Geraden kann man noch unterscheiden, ob man sich einem Punkt von links oder von rechts nähert. Für eine Funktion $f: I \rightarrow F$ mit $I \subset \mathbb{R}$ erklärt man deshalb noch den *linksseitigen Grenzwert*

$$f_-(a) := \lim_{x \nearrow a} f(x) := \lim_{x \nearrow a} (f|_{I_a^-})(x), \quad I_a^- := I \cap (-\infty, a),$$

und den *rechtsseitigen Grenzwert*

$$f_+(a) := \lim_{x \searrow a} f(x) := \lim_{x \searrow a} (f|_{I_a^+})(x), \quad I_a^+ := I \cap (a, \infty),$$

vorausgesetzt, a ist ein Häufungswert von I_a^- respektive I_a^+ . Man betrachtet also nur Argumente links oder rechts des Punktes a . Andere für diese Grenzwerte übliche Bezeichnungen sind $f(a-)$ und $f(a+)$.

► A. Für die Wurzelfunktion gilt $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = \lim_{x \searrow 0} \sqrt{x} = 0$.

B. Für die Gaußklammer oder Ganzzahlfunktion $_{3.14} [\cdot]: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt in jedem Punkt $m \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \searrow m} [x] = m = [m], \quad \lim_{x \nearrow m} [x] = m - 1.$$

Man sagt dazu auch, $[\cdot]$ ist in m *rechtsseitig stetig*.

C. Die Funktion $t \mapsto \sin t^{-1}$ besitzt in 0 weder einen links- noch einen rechtsseitigen Grenzwert. ◀◀

Einseitige Grenzwerte existieren insbesondere immer für *monotone* Funktionen, ohne jede Stetigkeitsannahme. Das macht sie besonders nützlich.

Satz Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *monoton*, so existieren in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ die *links- und rechtsseitigen Grenzwerte* von f . Genauer gilt

$$\sup_{(-\infty, a)} f = f_-(a) \leq f(a) \leq f_+(a) = \inf_{(a, \infty)} f$$

im Fall einer monoton steigenden Funktion, und

$$\inf_{(-\infty, a)} f = f_-(a) \geq f(a) \geq f_+(a) = \sup_{(a, \infty)} f$$

im Fall einer monoton fallenden Funktion. \times

⟨⟨⟨ Sei zum Beispiel f monoton steigend und $a \in \mathbb{R}$. Dann ist f auf $(-\infty, a)$ nach oben durch $f(a)$ beschränkt, und es gilt

$$\lambda := \sup_{(-\infty, a)} f \leq f(a).$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert aufgrund des Approximationssatzes 2.9 ein $t_\varepsilon < a$ mit

$$\lambda - \varepsilon < f(t_\varepsilon) \leq \lambda.$$

Aufgrund der Monotonie von f gilt dann aber auch

$$\lambda - \varepsilon < f(t) \leq \lambda, \quad t_\varepsilon < t < a.$$

Das aber bedeutet, dass

$$f_-(a) = \lim_{t \nearrow a} f(t) = \lambda = \sup_{(-\infty, a)} f.$$

Entsprechend argumentiert man für den rechtsseitigen Grenzwert. $\rangle\rangle\rangle$

Bemerkung Eine monotone Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig in a genau dann, wenn $f_-(a) = f_+(a)$. Andernfalls nennt man $|f_+(a) - f_-(a)|$ die *Sprunghöhe* von f in a . \rightarrow

■ Uneigentliche Grenzwerte

Für Funktionen auf der reellen Geraden sind auch *uneigentliche Grenzwerte* bei ∞ und $-\infty$ erklärt. Wir müssen dazu nur die entsprechende Umgebungen wie zuvor 5.6 betrachten, also

$$U_\delta(\infty) = (\delta^{-1}, \infty), \quad U_\delta(-\infty) = (-\infty, -\delta^{-1}), \quad \delta > 0.$$

In diesem Fall sind dies bereits punktierte Umgebungen.

So ist zum Beispiel ∞ ein Häufungspunkt von $I \subset \mathbb{R}$, wenn I nach oben unbeschränkt ist. Es gilt dann

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = w,$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|f(t) - w| < \varepsilon, \quad t \in U_\delta(\infty) \cap I.$$

Und dies gilt genau dann, wenn für jede Folge (t_n) in I mit $t_n \rightarrow \infty$ auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = w.$$

Entsprechend sind uneigentliche Grenzwerte für die Werte von Funktionen erklärt, indem in (4) die Umgebungen von w entsprechend gewählt werden.

► A. $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} = 0.$

B. $\lim_{t \searrow 0} \frac{1}{t} = \infty, \quad \lim_{t \nearrow 0} \frac{1}{t} = -\infty.$

C. Für jedes Polynom p mit $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} p(t) = (-1)^n \cdot \infty.$$

D. Eine reelle Folge (a_n) können wir als Funktion $\alpha: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\alpha(n) = a_n$ betrachten. Ist die Folge konvergent, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t). \quad \blacktriangleleft$$

7.4

Topologische Grundbegriffe

Der Begriff der Stetigkeit ist eng mit dem Begriff der Umgebung verbunden. Dieser Begriff, und die damit verbundenen Begriffe wie *offene* und *abgeschlossene Menge*, spielen eine fundamentale Rolle für die Analysis. Wir führen diese Begriffe hier nur für normierte Räume ein, da dies für unsere Zwecke völlig ausreicht und noch hinreichend anschaulich ist.

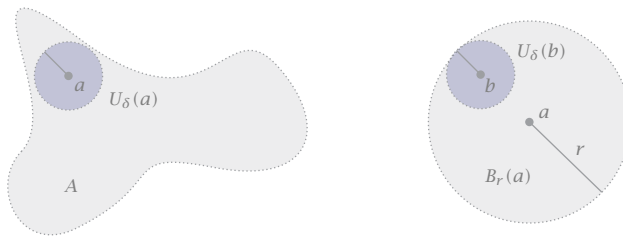
■ Offene Mengen

Sei E ein beliebiger normierter Raum. Mit Hilfe der δ -Umgebungen eines Punktes a in E ,

$$U_\delta(a) := \{x \in E : \|x - a\| < \delta\},$$

definieren wir den grundlegenden topologischen Begriff der *offenen Menge*.

- 20 **Definition** Eine Teilmenge A eines normierten Raumes E heißt *offen*, wenn sie mit jedem Punkt auch eine δ -Umgebung dieses Punktes enthält. Zu jedem $a \in A$ existiert also ein $\delta > 0$, so dass $U_\delta(a) \subset A$. \times

Abb 12 Offene Menge A und offene Kugel $B_r(a)$ 

► **Beispiele** A. In \mathbb{R} mit der Betragsnorm $|\cdot|$ ist jedes offene Intervall

$$(a, b) \subset \mathbb{R}, \quad -\infty \leq a < b \leq \infty,$$

topologisch offen. Denn für jedes $c \in (a, b)$ ist $\delta = \min\{1, c - a, b - c\} > 0$, und für dieses δ gilt

$$U_\delta(c) = (c - \delta, c + \delta) \subset (a, b).$$

Dies gilt auch für $a = -\infty$ und $b = \infty$. Die Bezeichnung ›offenes Intervall‹ ist somit konsistent mit der obigen Definition von ›offen‹.

B. Die Intervalle \emptyset und \mathbb{R} sind ebenfalls offen in \mathbb{R} .

C. In einem normierten Raum E ist jede *offene Kugel*

$$B_r(a) := \{x \in E : \|x - a\| < r\}, \quad r > 0,$$

topologisch offen. Denn für $b \in B_r(a)$ ist $\rho = \|b - a\| < r$ und $\delta = r - \rho > 0$. Damit gilt $U_\delta(b) \subset B_r(a)$, denn für jedes $x \in U_\delta(b)$ ist

$$\|x - a\| \leq \|x - b\| + \|b - a\| < \delta + \rho = r.$$

Da jeder Punkt in $B_r(a)$ eine solche Umgebung besitzt, ist $B_r(a)$ offen. Die Bezeichnung ›offene Kugel‹ ist somit konsistent mit der obigen Definition.

D. Ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ ist *nicht* offen in \mathbb{R} , denn jede Umgebung von a oder b enthält auch Punkte, die nicht zu $[a, b]$ gehören.

E. Ein-Punkt-Mengen eines normierten Raumes sind nicht offen.

F. Die reelle Gerade \mathbb{R} ist offen in \mathbb{R} , aber aufgefasst als Teilmenge des \mathbb{R}^2 ist \mathbb{R} nicht offen. Daher ist es gelegentlich wichtig anzugeben, auf welchen Raum man sich bezieht, wenn man von einer offenen Menge spricht. ◀

Der folgende Satz beschreibt die grundlegenden topologischen Eigenschaften offener Mengen.

21 **Satz** In einem normierten Raum E gilt:

- (i) \emptyset und E sind offen.
- (ii) Die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen ist offen.
- (iii) Der Durchschnitt endlich vieler offener Mengen ist offen. \times

Bemerkung In der allgemeinen Theorie topologischer Räume spielen diese Eigenschaften die Rolle von *Axiomen* für Familien offener Mengen. Eine beliebige Familie von Teilmengen einer Menge X heißt eine *Topologie auf X* , wenn sie diese drei Eigenschaften besitzt. \rightarrow

⟨⟨⟨ (i) Die leere Menge ist offen, da es gar keine Punkte gibt, für die eine Umgebung gebraucht wird. E ist offen, da E jede Umgebung enthält.

(ii) Sei $(A_\lambda)_{\lambda \in I}$ eine beliebige Familie offener Teilmengen von E und

$$a \in \bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda.$$

Dann ist $a \in A_\mu$ für wenigstens ein $\mu \in I$. Da A_μ offen ist, enthält A_μ auch eine δ -Umgebung von a . Somit gilt auch

$$U_\delta(a) \subset A_\mu \subset \bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda.$$

Also ist die Vereinigung ebenfalls offen.

(iii) Sei $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ eine *endliche* Familie offener Teilmengen von E und

$$a \in \bigcap_{1 \leq k \leq n} A_k.$$

Zu jedem k existiert ein $U_{\delta_k}(a) \subset A_k$. Dann ist $\delta = \min \{\delta_1, \dots, \delta_n\} > 0$, und für dieses δ gilt dann

$$U_\delta(a) \subset U_{\delta_k}(a) \subset A_k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Also gilt auch

$$U_\delta(a) \subset \bigcap_{1 \leq k \leq n} A_k.$$

Somit ist auch dieser Durchschnitt offen. $\rangle\rangle\rangle$

Bemerkungen a. Die Indexmenge I in (ii) ist völlig beliebig. Sie kann auch überabzählbar sein.

b. Wesentlich für (iii) ist offensichtlich, dass das Minimum *endlich* vieler positiver Zahlen wieder positiv ist. Dies gilt *nicht* für unendlich viele positive Zahlen, und (iii) ist im Allgemeinen auch falsch für unendlich viele Durchschnitte. So ist beispielsweise

$$\bigcap_{n \geq 1} (-2^{-n}, 2^{-n}) = \{0\}$$

nicht offen. \rightarrow

■ Abgeschlossene Mengen

Abgeschlossene Mengen werden als Komplemente offener Mengen erklärt.

Definition Eine Teilmenge A eines normierten Raumes E heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement $A^c = E \setminus A$ offen ist. \times

\rightarrow **Beispiele** A. Die Intervalle \emptyset und \mathbb{R} sind abgeschlossen, denn $\emptyset^c = \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^c = \emptyset$ sind offen.

B. Jedes abgeschlossene Intervall $[a, b]$ ist abgeschlossen, denn

$$[a, b]^c = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$$

ist offen. Ebenso sind $[a, \infty)$ und $(-\infty, b]$ abgeschlossen.

C. Die *abgeschlossenen Kugeln*

$$\bar{B}_r(a) := \{x \in E : \|x - a\| \leq r\}, \quad r \geq 0,$$

sind abgeschlossen. Denn für $b \notin \bar{B}_r(a)$ ist

$$U_\delta(b) \cap \bar{B}_r(a) = \emptyset, \quad \delta = \|b - a\| - r > 0.$$

Also ist das Komplement von $\bar{B}_r(a)$ offen, und $\bar{B}_r(a)$ selbst ist abgeschlossen.

D. Ein-Punkt-Mengen in normierten Räumen sind abgeschlossen, denn $\{a\} = \bar{B}_0(a)$.

E. Halboffene Intervalle $[a, b)$ und $(a, b]$ mit $-\infty < a < b < \infty$ sind weder offen noch abgeschlossen. \leftarrow

Nun die grundlegenden topologischen Eigenschaften abgeschlossener Mengen.

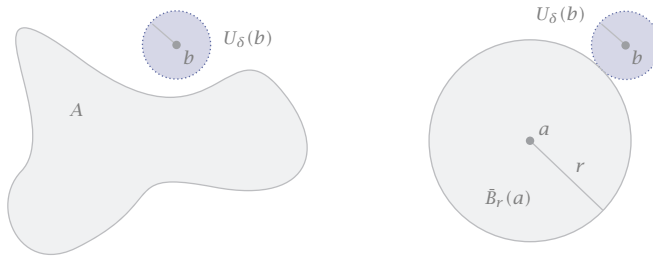
22 **Satz** In einem normierten Raum E gilt:

- (i) \emptyset und E sind abgeschlossen.
- (ii) Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.
- (iii) Die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen. \times

⟨⟨⟨ Für beliebige Familien von Teilmengen eines Raumes gelten die *Regeln von de Morgan* A-1.15,

$$\left(\bigcup_{\lambda} A_{\lambda}\right)^c = \bigcap_{\lambda} A_{\lambda}^c, \quad \left(\bigcap_{\lambda} A_{\lambda}\right)^c = \bigcup_{\lambda} A_{\lambda}^c.$$

Damit folgen alle Aussagen über abgeschlossene Mengen aus den entsprechenden Aussagen über offene Mengen, indem man die Komplemente betrachtet A-44. $\rangle\rangle\rangle$

Abb 13 Abgeschlossene Menge A und abgeschlossene Kugel $\bar{B}_r(a)$ 

► A. Jede endliche Punktmenge ist abgeschlossen, denn diese ist die endliche Vereinigung von Ein-Punkt-Mengen, welche abgeschlossen sind.

B. Die Vereinigung unendlich vieler abgeschlossener Mengen ist im Allgemeinen nicht mehr abgeschlossen. Beispielsweise ist

$$\bigcup_{n \geq 1} [-1 + 2^{-n}, 1 - 2^{-n}] = (-1, 1)$$

eine offene Menge. ◀◀

Bemerkung Man beachte, dass ›abgeschlossen‹ nicht die logische Negation von ›offen‹ darstellt. Denn der Gesamtraum und die leere Menge sind gleichzeitig offen *und* abgeschlossen. Ebenso gibt es Mengen, die weder offen noch abgeschlossen sind. →

■ Rand, Inneres und Abschluss

Das Konzept der offenen und abgeschlossenen Mengen wird klarer, wenn wir auch noch den *Rand* einer Menge betrachten.

- 23 **Definition** Sei $A \subset E$ eine beliebige Menge. Ein Punkt $a \in E$ heißt **Randpunkt** von A , wenn jede Umgebung von a Punkte sowohl aus A wie auch aus A^c enthält. Der **Rand** einer Menge A ist die Menge aller ihrer Randpunkte und wird mit ∂A bezeichnet. ✕

Man beachte, dass ein Randpunkt von A nicht Element von A sein muss, denn ein Randpunkt von A ist immer auch Randpunkt von A^c :

$$\partial A = \partial(A^c).$$

Ein Punkt a ist *kein Randpunkt* von A genau dann, wenn er eine Umgebung besitzt, die entweder ganz in A oder ganz in A^c enthalten ist.

- ▶ A. $\partial\emptyset = \emptyset$ und $\partial E = \emptyset$.
- B. $\partial[a, b] = \partial(a, b) = \{a, b\}$.
- C. $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.
- D. $\partial B_r(a) = \{x \in E : \|x - a\| = r\}$ für $r > 0$.
- E. $\partial A = A$ für $A = [a, b] \times \{c\} \subset \mathbb{R}^2$. ◀

24 Satz Für jede Menge $A \subset E$ gilt:

- (i) ∂A ist abgeschlossen.
- (ii) A ist offen genau dann, wenn $\partial A \cap A = \emptyset$.
- (iii) A ist abgeschlossen genau dann, wenn $\partial A \subset A$. ✕

◀◀◀ (i) Ist $a \notin \partial A$, so gibt es eine Umgebung $U(a)$, die ganz in A oder ganz in A^c enthalten ist. Damit ist jeder Punkt in $U(a)$ kein Randpunkt von A , und es gilt $U(a) \subset (\partial A)^c$. Also ist das Komplement von ∂A offen, und ∂A selbst ist abgeschlossen.

(ii) Ist A offen, so gibt es zu jedem Punkt $a \in A$ eine Umgebung $U(a)$, die ganz in A enthalten ist. Also ist kein Punkt in A ein Randpunkt von A . Enthält umgekehrt A keine Randpunkte, so muss es zu jedem $a \in A$ eine Umgebung $U(a)$ geben, die ganz in A enthalten ist, denn keine Umgebung von a kann ganz in A^c enthalten sein.

(iii) A ist abgeschlossen genau dann, wenn A^c offen ist, also mit (ii) genau dann, wenn $\partial A \cap A^c = \emptyset$. Dies ist aber genau dann der Fall, wenn $\partial A \subset A$. ▶▶▶

Somit ist eine Menge offen genau dann, wenn sie keinen ihrer Randpunkte, und abgeschlossen genau dann, wenn sie alle ihre Randpunkte enthält. Auf diese Weise kann man jeder Menge auch ihr *Inneres* und ihren *Abschluss* zuordnen.

Definition Sei $A \subset E$ eine beliebige Menge. Dann heißen

$$A^\circ := A \setminus \partial A, \quad A^- := A \cup \partial A$$

das *Innere* oder der *offene Kern* respektive der *Abschluss* von A . ✕

Aus dieser Definition folgt unmittelbar, dass

$$A^\circ \subset A \subset A^-, \quad \partial A = A^- \setminus A^\circ.$$

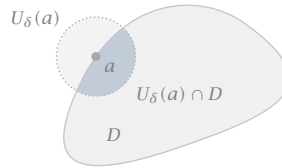
Außerdem hat der vorangehende Satz folgendes

Korollar Für jede Teilmenge $A \subset E$ gilt:

- (i) A° ist offen, und A ist offen genau dann, wenn $A = A^\circ$.
- (ii) A^- ist abgeschlossen, und A ist abgeschlossen genau dann, wenn $A = A^-$. ✕

- ▶ A. Es gilt $\emptyset^\circ = \emptyset^- = \emptyset$ und ebenso $E^\circ = E^- = E$.
- B. Für $I = [a, b]$ ist $I^\circ = (a, b)$ und $I^- = [a, b]$.

Abb 14

 D -relative δ -Umgebung

- C. Für die rationalen Zahlen gilt $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$ und $\mathbb{Q}^- = \mathbb{R}$.
 D. Für $r \geq 0$ gilt $\tilde{B}_r(a)^\circ = B_r(a)$.
 E. Für $r > 0$ gilt $B_r(a)^- = \tilde{B}_r(a)$, aber nicht für $r = 0$.
 F. Für $A = [a, b] \times \{c\} \subset \mathbb{R}^2$ ist $A^\circ = \emptyset$ und $A^- = [a, b] \times \{c\}$. ◀

■ Stetigkeit

Wir charakterisieren nun Stetigkeit mit Hilfe von offenen Mengen. Da wir als Definitionsbereiche nicht nur offene, sondern beliebige Teilmengen eines normierten Raumes zulassen wollen, benötigen wir dazu noch eine Verallgemeinerung des Begriffs der Umgebung. Ist $D \subset E$ eine beliebige Menge und $a \in D$, so definieren wir die Mengen

$$U_\delta(a) \cap D, \quad \delta > 0,$$

als die *D-relativen Umgebungen* von a . Ist die Bezugsmenge D aus dem Kontext klar, so sprechen wir auch einfacher von *relativen Umgebungen*.

- ▶ A. Ist D offen und $a \in D$, so ist für alle $\delta > 0$ hinreichend klein

$$U_\delta(a) \cap D = U_\delta(a).$$

In diesem Fall handelt es sich also um ›normale‹ Umgebungen.

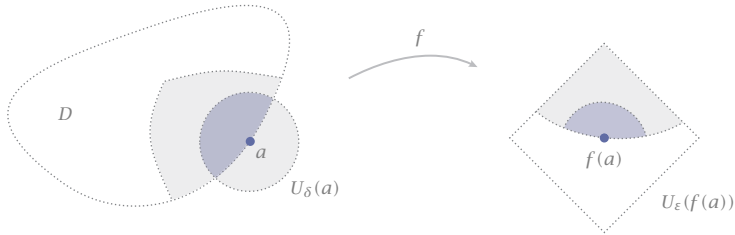
- B. Für ein abgeschlossenes Intervall $[a, b]$ gilt

$$U_\delta(a) \cap [a, b] = [a, a + \delta), \quad 0 < \delta \leq b - a.$$

Also ist jedes halboffene Intervall $[a, a + \delta)$ mit $0 < \delta \leq b - a$ eine $[a, b]$ -relativ offene Umgebung von a . ◀

Bemerkung Beim ersten Lesen genügt es, jeden Definitionsbereich D einer Abbildung als offen anzunehmen. *D-relativ offen* ist dann nichts anderes als *offen* im Sinne der ersten Definition 20. ∞

Es besteht nun folgender Zusammenhang zwischen stetigen Abbildungen und offenen Mengen. Zuerst die lokale Situation.

Abb 15 Stetiges Urbild einer ε -Umgebung mit relativer δ -Umgebung

Satz Eine Abbildung $f: E \supset D \rightarrow F$ ist stetig im Punkt $a \in D$ genau dann, wenn das Urbild jeder ε -Umgebung von $f(a)$ eine D -relative δ -Umgebung von a enthält. \times

⟷⟷⟷ ⇒ Sei f stetig in a und $U_\varepsilon(f(a))$ eine ε -Umgebung von $f(a)$. Dann existiert zu diesem ε ein positives δ , so dass

$$f(U_\delta(a) \cap D) \subset U_\varepsilon(f(a)). \quad (5)$$

Also gilt auch

$$U_\delta(a) \cap D \subset f^{-1}(U_\varepsilon(f(a))). \quad (6)$$

Somit enthält das Urbild dieser ε -Umgebung von $f(a)$ – die Menge rechts – wie gefordert eine D -relative δ -Umgebung von a .

⇐ Sei $\varepsilon > 0$. Dann enthält das Urbild der ε -Umgebung von $f(a)$ eine D -relative δ -Umgebung von a . Es gilt also (6) mit einem geeigneten $\delta > 0$. Dann gilt aber auch (5). Also ist f in a stetig gemäß unserer ε - δ -Definition. ⟷⟷⟷

Um den globalen Sachverhalt zu beschreiben, nennen wir eine Menge $A \subset E$ **D -relativ offen**, wenn sie mit jedem Punkt auch eine D -relativ offene Umgebung dieses Punktes enthält – also zu jedem $a \in A$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass $U_\delta(a) \cap D \subset A$. Dies ist gleichbedeutend mit der Existenz einer in E offenen Menge U , so dass $A = U \cap D$. A-46.

25 Satz Eine Abbildung $f: E \supset D \rightarrow F$ ist stetig auf D genau dann, wenn das Urbild jeder offenen Menge in F D -relativ offen in E ist. \times

⟷⟷⟷ ⇒ Sei $W \subset F$ offen und $V = f^{-1}(W)$. Ist V leer, so ist V offen, und wir sind fertig. Ist dagegen $a \in V$, so ist $f(a) \in W$, und da W offen ist, enthält W auch eine ε -Umgebung von $f(a)$. Aufgrund des vorangehenden Satzes enthält V eine D -relative δ -Umgebung von a . Da dies für jedes $a \in V$ gilt, ist V D -relativ offen.

⇐ Mit dem vorangehenden Satz folgt, dass f in jedem Punkt von D stetig ist. Also ist f auf ganz D stetig. »»»

Dieser Satz ist in zweierlei Hinsicht interessant. Einerseits charakterisiert er Stetigkeit durch rein topologische Begriffe, indem er nur Bezug auf offene und relativ-offene Teilmengen nimmt. Dies ermöglicht es, Stetigkeit in allgemeinen topologischen Räumen zu definieren, ohne Bezug auf eine Norm, Metrik oder Ähnliches. Dies werden wir allerdings im Rahmen dieser Analysis nicht weiter betrachten.

Andererseits können wir damit Mengen als offen erkennen, die als Urbilder offener Mengen unter stetigen Abbildungen dargestellt werden können. Dasselbe gilt dann auch für abgeschlossene Mengen als Komplemente offener Mengen:

- 26 **Satz** Ist $f: E \rightarrow F$ stetig, so ist das Urbild jeder abgeschlossenen Menge in F eine abgeschlossene Menge in E . ✕

««« Ist A abgeschlossen in F , so ist A^c offen in F . Wegen der Stetigkeit von f ist dann auch $f^{-1}(A^c)$ offen in E . Wegen $A_{1.32}$

$$f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$$

ist damit $f^{-1}(A)$ selbst abgeschlossen in E . »»»

- A. Ist $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist die *Nullstellenmenge* von f ,

$$N(f) := f^{-1}(0) := \{x \in E : f(x) = 0\},$$

abgeschlossen, denn dieser ist das Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$.

- B. Dasselbe gilt für jede *Niveaumenge* $M^c = f^{-1}(c)$.

- C. In einem normierten Raum ist jeder *Annulus* $A_{s,r}$ Abb 16

$$A_{s,r} = \{x \in E : s \leq \|x\| \leq r\}, \quad 0 \leq s \leq r < \infty,$$

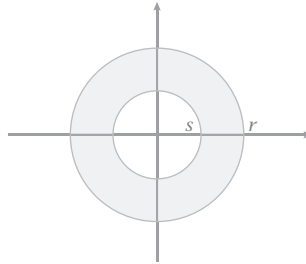
abgeschlossen, denn dies ist das Urbild des abgeschlossenen Intervalls $[r,s]$ unter der stetigen Funktion $\|\cdot\|_E$.

- D. Insbesondere gilt dies für die *Einheitskugel* $\mathbb{B} = A_{0,1}$ und die *Einheits-sphäre* $\mathbb{S} = A_{1,1}$. ◀

7.5 Kompaktheit

Der Beweis des Satzes vom Minimum & Maximum $_{11}$ basiert auf dem Argument, dass jede beliebige Folge innerhalb eines *abgeschlossenen Intervalls* eine

Abb 16

Der Annulus $A_{s,r}$ 

konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert ebenfalls zu diesem Intervall gehört. Es stellt sich heraus, dass dies eine eminent wichtige und nützliche Eigenschaft von Mengen in beliebigen Räumen ist. Sie hat daher auch einen eigenen Namen.

Definition Eine Teilmenge K eines normierten Raumes E heißt **kompakt**, wenn jede Folge in K eine konvergente Teilfolge besitzt, deren Grenzwert ebenfalls zu K gehört. ✕

Wesentlich ist, dass die Teilfolge nicht nur konvergent ist, sondern dass ihr Grenzwert ebenfalls in der Menge K liegt. — Zunächst zwei einfache Beobachtungen, wie aus kompakten Mengen neue kompakte Mengen entstehen.

Satz Die Vereinigung endlich vieler kompakter Mengen ist kompakt, und jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt. ✕

⟨⟨⟨ Seien K_1, \dots, K_n kompakt, $K = K_1 \cup \dots \cup K_n$, und (a_n) eine Folge in K . Dann muss wenigstens eine Menge K_ν unendlich viele Folgenglieder enthalten. Die aus diesen Gliedern gebildete Teilfolge ist ganz in K_ν enthalten. Da K_ν kompakt ist, enthält sie ihrerseits eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K_ν . Diese zweite Teilfolge ist dann auch in der Obermenge K konvergent. Somit ist K kompakt.

Sei nun A eine abgeschlossene Teilmenge der kompakten Menge K . Ist (a_n) eine Folge in A , so auch in K . Sie besitzt somit eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K . Da A abgeschlossen ist, gehört dieser Grenzwert ebenfalls zu A . Also ist auch A kompakt. ⟩⟩⟩

- ▶ A. Die leere Menge \emptyset und jede Ein-Punkt-Menge ist kompakt.
- B. Jede endliche Teilmenge eines normierten Raumes E ist kompakt.
- C. Ein abgeschlossenes Intervall ist kompakt ²⁷.
- D. Offene, nichtleere Mengen sind niemals kompakt. ◀

Wir notieren jetzt zwei *notwendige* Eigenschaften kompakter Mengen.

Satz Eine kompakte Teilmenge eines normierten Raumes ist abgeschlossen und beschränkt. \times

⟨⟨⟨ Abgeschlossen: Sei K kompakt. Ist a ein Randpunkt von K , so ist a auch Grenzwert einer Folge in K . Folglich gehört auch a zu K , da K kompakt ist. Somit enthält K alle seine Randpunkte und ist abgeschlossen ²⁴.

Beschränkt: Angenommen, K ist nicht beschränkt. Dann existiert zu jedem $n \geq 1$ ein $a_n \in K$ mit $\|a_n\| \geq n$. Die so gewonnene Folge in K besitzt keine konvergente Teilfolge, denn eine solche müsste ja beschränkt sein. $\rangle\rangle\rangle$

Die Umkehrung dieses Satzes gilt im Allgemeinen nicht. So ist in einem unendlich dimensionalen Vektorraum eine abgeschlossene und beschränkte Menge im Allgemeinen nicht kompakt _{A-49}. Anders ist dies in endlichen Dimensionen:

27 **Satz** Eine Teilmenge des \mathbb{R}^n ist kompakt genau dann, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. \times

⟨⟨⟨ \Rightarrow Dies ist der vorangehende Satz.

\Leftarrow Sei K abgeschlossen und beschränkt und (a_n) eine Folge in K . Da K beschränkt ist, existiert nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß _{5.17} eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}) . Da K abgeschlossen ist, gehört deren Grenzwert ebenfalls zu K . Also besitzt (a_n) eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K . $\rangle\rangle\rangle$

▶ A. Unter allen Intervallen sind genau die abgeschlossenen Intervalle $[a, b]$ kompakt.

B. Die abgeschlossene Einheitskugel \mathbb{B} und die Einheitskugel \mathbb{S} im \mathbb{R}^n sind kompakt.

C. Die Nullstellenmenge einer stetigen Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist kompakt genau dann, wenn sie beschränkt ist. \blacktriangleleft

■ Stetige Abbildungen auf kompakten Mengen

Wir haben bereits gesehen, dass das stetige Bild eines abgeschlossenen Intervalls wieder ein abgeschlossenes Intervall ist. Dies ist tatsächlich ein Spezialfall des folgenden Satzes über stetige Bilder kompakter Mengen.

28 **Satz** Ist K kompakt und $f: K \rightarrow F$ stetig, so ist auch $f(K)$ kompakt. \times

⟨⟨⟨ Sei (w_n) eine beliebige Folge in $f(K)$. Zu jedem n existiert mindestens ein $a_n \in K$ mit $w_n = f(a_n)$. Die Folge (a_n) besitzt in der kompakten Menge K eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}) mit Grenzwert $a \in K$. Aufgrund der Stetigkeit von f gilt dann auch

$$w_{n_k} = f(a_{n_k}) \rightarrow w = f(a) \in f(K).$$

Somit besitzt (w_n) eine in $f(K)$ konvergente Teilfolge. Da dies für jede beliebige Folge in $f(K)$ gilt, ist diese Menge kompakt. \gggg

Jetzt betrachten wir speziell *reellwertige* Funktionen auf kompakten Mengen.

- 29 **Satz vom Minimum & Maximum** *Ist K kompakt und $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so existieren Punkte u und v in K mit*

$$f(u) \leq f(x) \leq f(v), \quad x \in K.$$

Insbesondere gilt

$$f(u) = \inf_K f = \min_K f, \quad f(v) = \sup_K f = \max_K f.$$

Die Funktion f nimmt also auf K ihr Infimum und Supremum an und ist beschränkt. \times

\llll Nach dem vorangehenden Satz ist $f(K)$ kompakt in \mathbb{R} und damit beschränkt. Also ist zum Beispiel $m = \inf_K f > -\infty$. Dazu existiert eine Folge (u_n) in K mit $f(u_n) \rightarrow m$. Da K kompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge (u_{n_k}) mit Grenzwert $u \in K$. Aufgrund der Stetigkeit von f gilt dann

$$f(u) = \lim f(u_{n_k}) = \lim f(u_n) = m.$$

Das Infimum wird also bei u angenommen. Entsprechend für das Supremum. \gggg

Als Anwendung des Satzes über Minimum und Maximum 29 zeigen wir, dass alle Normen auf dem \mathbb{R}^n äquivalent sind im folgenden Sinn.

- 30 **Definition** *Zwei Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ auf einem Vektorraum E heißen *äquivalent*, wenn es eine Konstante $c \geq 1$ gibt, so dass*

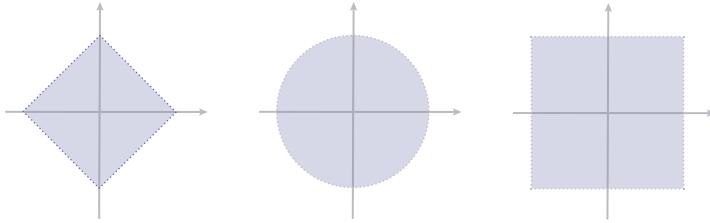
$$c^{-1} \|x\|_a \leq \|x\|_b \leq c \|x\|_a, \quad x \in E. \quad \times$$

Geometrisch betrachtet bedeutet dies, dass jede ε -Umgebung in der einen Norm eine δ -Umgebung bezüglich der anderen Norm enthält. Beide Normen definieren in diesem Fall dieselben offenen und abgeschlossenen Mengen. Damit ist auch der Stetigkeitsbegriff derselbe: Eine Abbildung, die bezüglich einer Norm stetig ist, ist es auch bezüglich jeder äquivalenten Norm. — Offensichtlich stellt die Äquivalenz von Normen eine *Äquivalenzrelation* dar.

- 31 **Satz** *Alle Normen auf dem \mathbb{R}^n sind äquivalent. \times*

\llll Seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_*$ zwei beliebige Normen auf dem \mathbb{R}^n . Die Einheits-sphäre $\mathbb{S} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ bezüglich der ersten Norm ist abgeschlossen und beschränkt, also kompakt 27 bezüglich der euklidischen Norm. Da die zweite Norm stetig bezüglich der euklidischen Norm ist, nimmt sie auf \mathbb{S} ihr Minimum

Abb 17 Kugeln in äquivalenten Normen



und Maximum an. Das Minimum kann nicht Null sein, denn $\|\cdot\|_*$ nimmt diesen Wert nur im Nullpunkt an, der nicht zu S gehört. Somit existieren Konstanten $0 < m \leq M$, so dass

$$m \leq \|x\|_* \leq M, \quad \|x\| = 1.$$

Aus Homogenitätsgründen gilt dann auch $m \|x\| \leq \|x\|_* \leq M \|x\|$ für alle x . \gggg

■ Gleichmäßige Stetigkeit

Bei der ε - δ -Charakterisierung der Stetigkeit hängt die Wahl von δ im Allgemeinen vom betrachteten Punkt ab. »Funktioniert« dagegen ein δ für alle Punkte, so spricht man von *gleichmäßiger* Stetigkeit.

Definition Eine Abbildung $f: E \supset D \rightarrow F$ heißt *gleichmäßig stetig* auf D , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$\|u - v\|_E < \delta \Rightarrow \|f(u) - f(v)\|_F < \varepsilon$$

für alle $u, v \in D$ gilt. \times

- ▶ A. Jede Lipschitzstetige Abbildung ist gleichmäßig stetig.
- B. Die Wurzelfunktion ist gleichmäßig stetig auf $[0, \infty)$.
- C. Die Parabel $t \mapsto t^2$ ist *nicht* gleichmäßig stetig auf \mathbb{R} .
- D. Ebenso ist $t \mapsto t^{-1}$ nicht gleichmäßig stetig auf $ioc0, 1$. \blacktriangleleft

32 **Satz** Ist K kompakt und $f: K \rightarrow F$ stetig, so ist f sogar gleichmäßig stetig. \times

\lllll Angenommen, f ist auf K nicht gleichmäßig stetig. Dann existieren ein $\varepsilon > 0$ und zu jedem $n \geq 1$ zwei Punkte $u_n \neq v_n$ in K mit

$$\|u_n - v_n\|_E < \frac{1}{n}, \quad \|f(u_n) - f(v_n)\|_F \geq \varepsilon.$$

Da K kompakt ist, besitzt die Folge (u_n) eine konvergente Teilfolge (u_{n_k}) mit Grenzwert a in K . Wegen $\|u_n - v_n\|_E < 1/n$ konvergiert auch (v_{n_k}) gegen

denselben Grenzwert a . Dann aber ist aufgrund der Stetigkeit von f

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(u_{n_k}) - f(v_{n_k})\|_F = \|f(a) - f(a)\|_F = 0,$$

ein Widerspruch zu $\|f(u_n) - f(v_n)\|_F \geq \varepsilon$ für alle n . \gggg

Wir werden diesen Satz erst in der mehrdimensionalen Analysis benötigen, zum Beispiel bei der Vertauschbarkeit von Differenziation und Integration.

7.6

Funktionenfolgen und Funktionenräume

Sei D eine beliebige Teilmenge eines normierten Raumes E , und $F(D)$ der Vektorraum aller reellwertigen Funktionen $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Wir wollen Folgen in $F(D)$ und deren Konvergenz betrachten. Für solche Folgen gibt es vielfältige Möglichkeiten, die Konvergenz gegen eine Funktion f in $F(D)$ zu definieren. Die einfachste ist die *punktweise* Konvergenz.

Definition Eine Folge (f_n) in $F(D)$ konvergiert *punktweise* gegen eine Funktion $f \in F(D)$, falls $f_n(x) \rightarrow f(x)$ für jedes $x \in D$. \times

Bei der punktweisen Konvergenz betrachtet man die Folge der Funktionswerte $(f_n(x))$ einzeln in jedem Punkt x , *unabhängig* von allen anderen Punkten im Definitionsbereich D . Daher werden Eigenschaften der Funktionen in der Folge – wie zum Beispiel Stetigkeit – im Limes im Allgemeinen verlorengehen.

► A. Für $0 \leq t \leq 1$ gilt

$$p_n(t) := t^n \rightarrow \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1, \\ 1, & t = 1. \end{cases}$$

Abb 18

Die Parabeln $t \mapsto t^n$ auf $[0, 1]$ und ihre Grenzfunktion

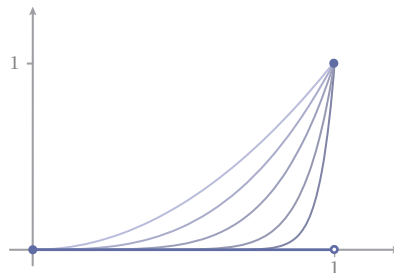
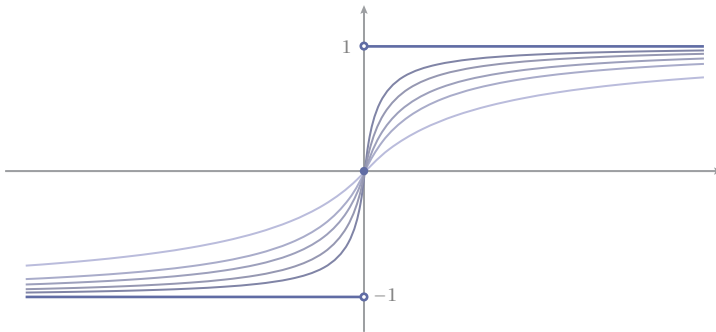


Abb 19 Die Funktionen g_n und ihre Grenzfunktion sgn 

Im Raum $F([0,1])$ konvergieren also die stetigen Funktionen p_n punktweise gegen eine im Punkt 1 unstetige Funktion Abb 18.

B. Für $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$g_n(t) := \frac{nt}{1 + |nt|} \rightarrow \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

Im Raum $F(\mathbb{R})$ konvergieren also die stetigen Funktionen g_n punktweise gegen die unstetige Signumfunktion Abb 19. ◀

Ein stärkerer Konvergenzbegriff erhält die Stetigkeit beim Grenzübergang.

Definition Eine Folge (f_n) in $F(D)$ konvergiert *gleichmäßig* gegen eine Funktion $f \in F(D)$, geschrieben

$$f_n \Rightarrow f,$$

falls für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \geq 1$ existiert, so dass

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

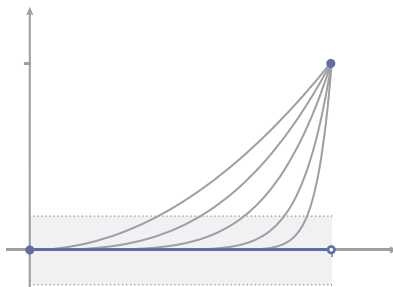
für alle $x \in D$ und $n \geq N$. ✕

Anders als bei der punktweisen Konvergenz müssen also die Folgen $(f_n(x))$ für *alle* $x \in D$ den ε - N -Test *gleichzeitig* bestehen. Anschaulich bedeutet dies, dass in jedem ε -Schlauch um den Graphen der Grenzfunktion f die Graphen fast aller Funktionen f_n liegen müssen Abb 21.

Umgekehrt konvergiert eine Folge (f_n) *nicht gleichmäßig* gegen f , wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass

Abb 20

Nicht-gleichmäßige
Konvergenz



$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$$

für unendlich viele n gilt Abb 20.

Unter gleichmäßiger Konvergenz bleibt Stetigkeit nun erhalten.

- 33 **Satz** Konvergiert die Folge (f_n) in $F(D)$ gleichmäßig gegen f und sind alle f_n stetig, so ist auch f stetig. Mit anderen Worten, der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen ist ebenfalls stetig. \times

⟨⟨⟨⟨ Sei $a \in D$ und $\varepsilon > 0$. Da die Folge (f_n) gleichmäßig konvergiert, gibt es ein $m \geq 1$, so dass

$$|f(x) - f_m(x)| < \varepsilon/3, \quad x \in D.$$

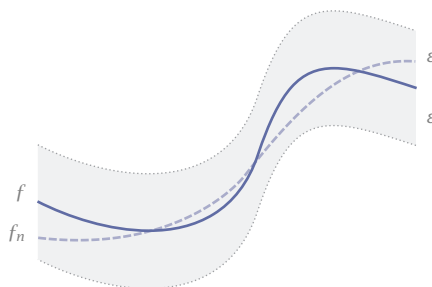
Da f_m stetig ist, existiert ferner zum Punkt a ein $\delta > 0$, so dass

$$|f_m(x) - f_m(a)| < \varepsilon/3, \quad x \in U_\delta(a) \cap D.$$

Daraus folgt für f und alle $x \in U_\delta(a) \cap D$ die Abschätzung

Abb 21

ε -Schlauch um f



$$\begin{aligned}
 & |f(x) - f(a)| \\
 & \leq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f_m(a)| + |f_m(a) - f(a)| \\
 & < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \\
 & = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Da für jedes $a \in D$ und $\varepsilon > 0$ ein solches $\delta > 0$ existiert, ist f stetig. \gggg

■ Supremumsnorm

Interessant ist, dass sich die gleichmäßige Konvergenz in $F(D)$ mithilfe einer Norm ausdrücken lässt. — Dazu definieren wir die *Supremumsnorm* über der Menge D ,

$$\|f\|_D := \sup_{x \in D} |f(x)|.$$

Für eine unbeschränkte Funktion ist allerdings $\|f\|_D = \infty$, was für eine Norm nicht zulässig ist. Erst auf Räumen *beschränkter* Funktionen wird dies tatsächlich eine *Norm*. Daher führen wir folgende Räume ein.

34 Definition und Notiz Die Räume

$$\begin{aligned}
 B(D) & := \{f \in F(D) : \|f\|_D < \infty\}, \\
 CB(D) & := \{f \in B(D) : f \text{ ist stetig}\}
 \end{aligned}$$

mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_D$ sind normierte Vektorräume. \times

\llll Linearkombinationen beschränkter Funktionen sind wieder beschränkt. Dasselbe gilt für stetige Funktionen. Somit sind beide Räume Vektorräume, und die Funktion $\|\cdot\|_D$ ist dort *per definitionem* endlich. Von den Normeigenschaften benötigt nur die Dreiecksungleichung etwas Aufmerksamkeit. Es ist aber aufgrund der Dreiecksungleichung des reellen Betrages

$$\begin{aligned}
 \|f + g\|_D & = \sup_{x \in D} |f(x) + g(x)| \\
 & \leq \sup_{x \in D} (|f(x)| + |g(x)|) \\
 & \leq \sup_{x \in D} |f(x)| + \sup_{x \in D} |g(x)| = \|f\|_D + \|g\|_D. \quad \gggg
 \end{aligned}$$

Konvergenz bezüglich der Supremumsnorm ist nun nichts anderes als gleichmäßige Konvergenz, denn

$$\|f_n - f\|_D \leq \varepsilon$$

ist gleichbedeutend mit

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad x \in D.$$

Zusammen mit dem Satz über den gleichmäßigen Limes stetiger Funktionen können wir daher die letzte Notiz ₃₄ verbessern.

- 35 **Satz** Die Räume $B(D)$ und $CB(D)$ mit der Supremumsnorm sind vollständige normierte Vektorräume, also Banachräume. \times

««« Wir betrachten zuerst $B(D)$. Sei (f_n) eine Cauchyfolge in $B(D)$ bezüglich der Supremumsnorm. Dann ist $(f_n(x))$ für jedes $x \in D$ eine Cauchyfolge in \mathbb{R} und damit wegen der Vollständigkeit von \mathbb{R} konvergent. Wir können daher eine Funktion $f: D \rightarrow F$ in jedem Punkt von D definieren durch

$$f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad x \in D.$$

Diese Funktion ist offensichtlich der punktweise Limes der Folge (f_n) . Zu zeigen ist, dass dies auch der *gleichmäßige Limes in $B(D)$* ist – das also auch $f \in B(D)$ und $\|f_n - f\|_D \rightarrow 0$ gilt.

Nun, aus der Cauchy-Eigenschaft der Folge (f_n) ,

$$\|f_n - f_m\|_D = \sup_{x \in D} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2, \quad n, m \geq N(\varepsilon),$$

folgt durch punktwisen Grenzübergang $m \rightarrow \infty$ auch _{5.9}

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2, \quad n \geq N(\varepsilon), \quad x \in D.$$

Also gilt auch

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| = \|f_n - f\|_D \leq \varepsilon/2, \quad n \geq N(\varepsilon),$$

und damit

$$\|f_n - f\|_D < \varepsilon, \quad n \geq N(\varepsilon).$$

Also konvergiert (f_n) in der Norm $\|\cdot\|_D$ gegen f .

Mit $\varepsilon = 1$ und einem geeigneten f_m folgt außerdem

$$\|f\|_D \leq \|f_m\|_D + 1 < \infty.$$

Also ist f beschränkt und damit $f \in B(D)$. Damit ist gezeigt, dass jede Cauchyfolge in $B(D)$ einen Grenzwert in *diesem Raum* hat. Also ist $B(D)$ vollständig.

Nun betrachten wir noch den Unterraum $CB(D)$ von $B(D)$. Sind alle f_n stetig, so ist auch f als deren gleichmäßiger Limes stetig ₃₃. Also hat eine Cauchyfolge in $CB(D)$ einen Grenzwert, der ebenfalls wieder zu $CB(D)$ gehört. Also ist auch dieser Raum vollständig. »»»

Der vorangehende Satz macht keine weiteren Annahmen über den Definitionsbereich. Dieser kann also eine beliebige Menge sein. Besonders elegant ist

der Sachverhalt allerdings für kompakte Definitionsbereiche, da wir hier die Beschränktheit für stetige Funktionen nicht explizit fordern müssen.

Sei dazu

$$C(D) := \{f \in F(D) : f \text{ ist stetig}\}.$$

Es gilt dann $CB(D) = C(D) \cap B(D)$.

Korollar *Ist K kompakt, so ist der Raum $C(K)$ aller stetigen reellwertigen Funktionen mit der Supremumsnorm vollständig, also ein Banachraum. \times*

⟨⟨⟨ Nach dem zweiten Satz vom Minimum & Maximum ₂₉ ist jede stetige Funktion auf einer kompakten Menge beschränkt. Also ist $C(K) \subset B(K)$ und deshalb auch

$$C(K) = CB(K).$$

Die Behauptung folgt dann aus dem letzten Satz ₃₅. ⟩⟩⟩

Wir werden dieses Korollar vor allem auf die Räume $C([a, b])$ stetiger reeller Funktionen auf kompakten Intervallen anwenden.

Bemerkung Alles Vorhergehende gilt auch für Abbildungen in einen beliebigen Banachraum F . So bildet

$$C(D, F) := \{f : D \rightarrow F \text{ stetig}\}$$

einen Vektorraum, und der Unterraum

$$CB(D, F) := \{f \in C(D, F) : \|f\|_{D, F} < \infty\}$$

bildet einen Banachraum, wobei $\|f\|_{D, F} := \sup_{x \in D} \|f(x)\|_F$. Dasselbe gilt für $C(K, F)$, wenn K kompakt ist. Die Beweise sind praktisch dieselben. \sim

Aufgaben

- 1 Gegeben sind zwei Funktionen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Welche Aussagen sind wahr?
 - a. Ist f beschränkt, so nimmt f sein Maximum an.
 - b. Ist f beschränkt, so ist f Lipschitz.
 - c. Ist $f \circ g$ stetig, so ist f stetig.
 - d. Ist f stetig, so existiert $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
 - e. Sind f und g unstetig, so auch $f \circ g$.
- 2 Welche Aussagen über eine Funktion $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sind wahr?
 - a. Ist f monoton, so ist f beschränkt.
 - b. Ist f unbeschränkt, so ist f nicht stetig.
 - c. Wechselt f das Vorzeichen, so hat f eine Nullstelle.
 - d. Nimmt f ihr Minimum und Maximum an, so ist f stetig.
 - e. Ist f injektiv und stetig, so ist f streng monoton.
- 3 Zeigen Sie die Stetigkeit der Funktion $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ für
 - a. $f(t) = \sqrt{t}$ b. $f(t) = 1/t$.
- 4 Jede Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ist in einem isolierten Punkt von D stetig. Dabei heißt ein Punkt $a \in D$ *isolierter Punkt* von D , wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so dass $U_\delta(a) \cap D = \{a\}$.
- 5 Beweisen Sie das Folgenkriterium ₄ für die Stetigkeit von $f: E \supset D \rightarrow F$ auf D .
- 6 Sind die Funktionen $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so auch

$$f \wedge g: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f \wedge g)(x) := \max \{f(x), g(x)\},$$

$$f \vee g: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f \vee g)(x) := \min \{f(x), g(x)\}.$$
- 7 *Grenzwertungleichung* Sei a ein Häufungspunkt von D . Besitzen die Funktionen $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt a Grenzwerte und gilt $f \leq g$ in einer punktierten Umgebung von a , so gilt auch $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$.
- 8 Zeigen Sie, dass die Funktion

$$h: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1), \quad t \mapsto \frac{t}{1 + |t|}$$

bijektiv ist, und dass h und h^{-1} stetig sind.

- 9 Zeigen Sie, dass alle drei Zwischenwertsätze _{7, 8, 9} äquivalent sind.
- 10 Ist die Funktion

$$f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & x < \sqrt{2}, \\ 1, & x > \sqrt{2} \end{cases}$$

stetig? Gilt der Zwischenwertsatz?

- 11 Zu einer stetigen Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiere man $f^*: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f^*(t) = \max_{[a, t]} f.$$

Dann ist die Funktion f^*

- a. monoton steigend mit $f^* \geq f$, b. stetig, c. die kleinste solche Funktion. Hat also eine Funktion $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dieselben Eigenschaften wie f^* , so gilt $f^* \leq \phi$.

12 Die *Thomae*-Funktion

$$\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tau(x) := \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \\ 1/q, & x = p/q \text{ mit teilerfremden } p, q \text{ und } q > 0. \end{cases}$$

ist in jedem rationalen Punkt unstetig und sonst stetig.

13 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton, und $J_\varepsilon = \{t \in [a, b] : |f_+(t) - f_-(t)| > \varepsilon\}$ die Menge aller Sprungstellen von f größer als ε . Zeigen sie:

- Für jedes $\varepsilon > 0$ ist J_ε endlich.
- Die Menge J aller Sprungstellen von f ist abzählbar.

14 Sei I ein offenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $a \in I$ stetig. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$|f(x)| \geq (1 - \varepsilon) |f(a)|, \quad x \in U_\delta(a).$$

Gilt entsprechend auch $|f(x)| \leq (1 + \varepsilon) |f(a)|$?

15 Sei $b > 0$ beliebig.

- Die Parabel $t \mapsto t^2$ ist lipschitz auf $[0, b]$, nicht aber auf $[b, \infty)$.
- Umgekehrt ist die Wurzel $t \mapsto \sqrt{t}$ lipschitz auf $[b, \infty)$, nicht aber auf $[0, b]$.

16 Jede lineare Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist lipschitzstetig.17 Ist $f : D \rightarrow F$ lipschitzstetig, so ist deren kleinstmögliche Lipschitzkonstante auf D

$$[f]_D := \sup_{\substack{u \neq v \\ u, v \in D}} \frac{\|f(u) - f(v)\|_F}{\|u - v\|_E}.$$

18 Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $M \subset E$ nichtleer. Dann ist die *Abstandsfunktion*

$$d_M : E \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_M(x) := \inf_{m \in M} \|x - m\|$$

1-lipschitz.

19 Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum E . Für jedes $l \in E$ ist dann die Linearform $E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \langle l, x \rangle$ lipschitzstetig.20 Geben sie ein Beispiel einer lipschitzstetigen, umkehrbaren Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, deren Umkehrfunktion nicht lipschitzstetig ist.21 Es gibt keine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die jeden Wert ihres Wertebereiches $f(\mathbb{R})$ genau zweimal annimmt.22 Gibt es eine stetige surjektive Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die jeden Wert genau dreimal annimmt?23 Sei I ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ streng monoton. Dann ist f bijektiv auf die Bildmenge $f(I)$.

24 Die Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \quad f(t) = \begin{cases} t, & t \text{ rational} \\ 1 - t, & t \text{ irrational} \end{cases}$$

ist a. bijektiv, b. auf keinem nichtentarteten Teilintervall monoton, c. nur im Punkt $1/2$ stetig.

- 25 Ist eine Funktion $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv, so ist sie streng monoton.
- 26 Sei $\sum_{n \geq 1} a_n$ konvergent mit positiven Gliedern. Zu einer beliebigen Abzählung q von \mathbb{Q} definiere man dann

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \sum_{n: q_n \leq t} a_n.$$

- Dann ist f *a.* streng monoton, *b.* in jedem irrationalen Punkt stetig, *c.* in jeder rationalen Zahl $r = q_n$ unstetig mit Sprunghöhe a_n .
- 27 Sei $I = [a, b]$ und $f: I \rightarrow I$ stetig. Dann besitzt f mindestens einen Fixpunkt, also einen Punkt $p \in I$ mit $f(p) = p$.
- 28 Ist $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ stetig mit $f(0) = f(1) = 0$, so existiert zu jedem $n \geq 1$ ein Punkt $x \in [0, 1]$ mit $f(x) = f(x + 1/n)$ für $x \in I_n = [0, 1 - 1/n]$.
- 29 Sei $D \subset E$ und $a \in E$. Liegt in jeder punktierten Umgebung von a wenigstens ein Punkt von D , so ist a ein Häufungspunkt von D .
- 30 Existiert $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, so ist f in einer Umgebung von a beschränkt.
- 31 Für jedes $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = nx^{n-1}.$$

- 32 Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *periodisch*. Das heißt, es gilt $f(t + T) = f(t)$ für ein $T > 0$ und alle $t \in \mathbb{R}$. Gilt dann $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$, so ist $f(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
- 33 Man bestimme die Grenzwerte

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3 + t^2 - t - 1}{t + 1} & \text{b. } \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3 + t^2 - t - 1}{t - 1} & \text{c. } \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^3 + t^2 - t - 1}{t^2 - 1} \\ \text{d. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x^2} & \text{e. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{|x|}. \end{array}$$

- 34 Man bestimme die uneigentlichen Grenzwerte

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^3 + 2x^2 + 1}{2x^3 + 7x} & \text{b. } \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) & \text{c. } \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + 2x - 1} - 2x) \\ \text{d. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{[x]}}{x} \end{array}$$

- 35 *Cauchy Kriterium für Funktionsgrenzwerte* Sei a ein Häufungspunkt des Definitionsbereiches von $f: D \rightarrow F$. Existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$u, v \in \dot{U}_\delta(a) \cap D \Rightarrow \|f(u) - f(v)\|_F < \varepsilon,$$

so existiert $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

- 36 Die beiden Funktionen $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig. Sind sie auf $[a, b] \cap \mathbb{Q}$ gleich, so sind sie auf ganz $[a, b]$ gleich.
- 37 Für eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gelte die Funktionalgleichung

$$f(u + v) = f(u) + f(v), \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Man zeige sukzessive:

- a. $f(0) = 0$.
- b. $f(-x) = -f(x)$.
- c. $f(x/n) = f(x)/n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- d. $f(rx) = rf(x)$ für alle $r \in \mathbb{Q}$.
- e. Ist f stetig in 0, so auch auf ganz \mathbb{R} , und mit $a = f(1)$ gilt $f(x) = ax$.

- 38 Eine Funktion $f: D \rightarrow F$ ist an einem Punkt $a \in D$ stetig genau dann, wenn a ein isolierter Punkt von D ist oder $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ gilt.
- 39 Sei $|f|$ stetig in einem Punkt a . Ist dann auch f stetig im Punkt a ?
- 40 Kann das Produkt fg oder die Komposition $f \circ g$ zweier Funktionen in einem Punkt stetig sein, auch wenn beide Funktionen in den entsprechenden Punkten unstetig sind?
- 41 Nimmt $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ jeden ihrer Werte genau zweimal an, so kann h nicht stetig sein.
- 42 Zu jeder Tageszeit gibt es antipodale Punkte auf dem Äquator mit derselben Temperatur.
- 43 Für $a > 0$ und $n/m \in \mathbb{Q}$ definiere man

$$a^{n/m} := (a^n)^{1/m}.$$

Dann gelten die Potenzgesetze

$$a^{r+s} = a^r a^s, \quad a^{rs} = (a^r)^s, \quad (ab)^r = a^r b^r$$

für alle $r, s \in \mathbb{Q}$ und $a, b > 0$ sowie $a^{n/m} = (a^{1/m})^n$.

- 44 Man beweise Satz 22 über abgeschlossene Mengen.
- 45 Für jede Teilmenge A eines normierten Raumes gilt $\partial(\partial A) = \partial A$.
- 46 Eine Menge $A \subset E$ ist D -relativ offen genau dann, wenn es eine offene Menge $U \subset E$ gibt, so dass $A = U \cap D$.
- 47 Was kann man über den Abschluss des Inneren und den Kern des Abschlusses sagen – also $(A^\circ)^-$ und $(A^-)^\circ$ einer beliebigen Menge $A \subset E$?
- 48 Für nichtleere Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$ sei

$$A + B = \{x + y : x \in A \wedge y \in B\}.$$

- a. Sind A und B offen, so ist auch $A + B$ offen.
 - b. Sind A und B kompakt, so ist auch $A + B$ kompakt.
 - c. Ist A abgeschlossen und B kompakt, so ist $A + B$ abgeschlossen.
 - d. Es gibt abgeschlossene Mengen A und B , wo $A + B$ nicht abgeschlossen ist.
- 49 Man zeige, dass im Folgenraum $c_{5,8}$ die Einheitskugel nicht kompakt ist.
- 50 Sei E ein normierter Raum und $M \subset E$ nichtleer. Dann ist die *Abstandsfunktion*

$$d_M: E \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_M(x) := \text{dist}(x, M) := \inf_{m \in M} \|x - m\|$$

1-lipschitz.

- 51 Sei O eine nichtleere offene Teilmenge eines normierten Raumes und (ε_n) eine monoton fallende Nullfolge. Dann bilden die Mengen

$$K_n := \{x \in O : \text{dist}(x, \partial O) \geq \varepsilon_n \wedge \|x\| \leq 1/\varepsilon_n\}, \quad n \geq 1,$$

eine *kompakte Ausschöpfung* von O . Das heißt, es gilt

- (i) Jedes K_n ist kompakt.
- (ii) Die K_n sind monoton steigend: $K_1 \subset K_2 \subset \dots$
- (iii) Die K_n schöpfen O aus: $\bigcup_{n \geq 1} K_n = O$.

- 52 Zu jeder nichtleeren abgeschlossen Menge F eines normierten Raumes existiert eine fallende Folge offener Mengen (O_n) derart, dass $\bigcap_n O_n = F$.

8

Ableitung

Die Ableitung einer Funktion $f: t \mapsto f(t)$ in einem Punkt a beschreibt ihr punktuell *Veränderungsverhalten* in der Nähe eines Punktes a . Dazu betrachtet man die Änderung der abhängigen Größe, $f(t) - f(a)$, *im Verhältnis* zur Änderung der unabhängigen Größe, $t - a$, wenn t sich a nähert.

Im einfachsten Fall ist dieses Verhältnis *konstant*, nämlich dann, wenn es sich bei f um eine *lineare* oder *affine* Funktion der Gestalt $\alpha: t \mapsto mt + b$ handelt. Andernfalls kann man versuchen, eine solche affine Funktion zu finden, die die gegebene Funktion in der Umgebung von a am besten *approximiert*. Existiert eine solche bestapproximierende Gerade, so ist sie eindeutig – es handelt sich um die *Tangente* an den Graphen von f im Punkt a . Ihre Steigung m ist dann die Ableitung von f im Punkt a .

Diese Interpretation der Ableitung als Steigung einer bestapproximierenden Geraden werden wir später auf höhere Dimensionen verallgemeinern. Diese Steigung erscheint dort als lineare Abbildung zwischen Vektorräumen.

Doch zunächst beginnen wir mit der klassischen Definition der Ableitung als Grenzwert von Differenzenquotienten.

Abb 1
Tangente an einen
Graphen

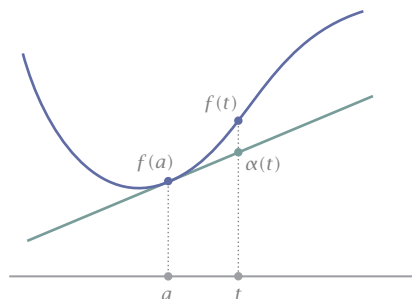
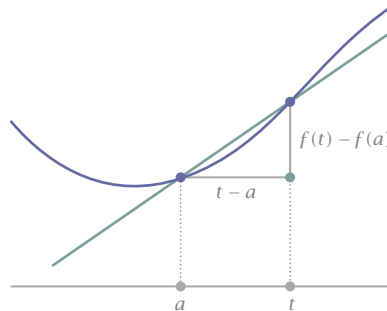


Abb 2

Sekante an einen
Graphen



8.1

Definitionen und Rechenregeln

Im Folgenden sei I immer ein *nichtentartetes Intervall*, also ein Intervall mit mehr als einem Punkt. Ferner sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion auf I . Die folgende Definition der Differenzierbarkeit in einem Punkt ist wahrscheinlich aus der Schule vertraut.

Definition Eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar im Punkt* $a \in I$, wenn der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = m$$

existiert. In diesem Fall heißt m die *erste Ableitung* von f im Punkt a und wird mit $f'(a)$ bezeichnet. ✕

Da t nur in der Nähe von a zu betrachten ist, schreibt man oft $t = a + h$ und nimmt h als hinreichend klein an. Damit wird

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Dieser Definition liegt folgende geometrische Anschauung zugrunde. Der Differenzenquotient

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

beschreibt die Steigung der Sekante durch die Punkte des Graphen von f über a und t . Konvergieren diese Steigungen für $t \rightarrow a$ gegen einen Grenzwert m , so kann man diesen als *infinitesimale Steigung* von f im Punkt a auffassen. Die Grenzlage der Sekanten bildet dann eine *Tangente* an den Graphen von f mit der Steigung m .

Unbefriedigend an dieser Definition ist allerdings, dass sie sich in dieser Form nicht auf höhere Dimensionen verallgemeinern lässt, da eine Division durch

Vektoren nicht sinnvoll erklärt werden kann. Um dieses Problem zu umgehen, charakterisieren wir Differenzierbarkeit noch auf andere, äquivalente Weisen.

1 Differenzierbarkeitssatz Für eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ und einen Punkt $a \in I$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) f ist differenzierbar in a mit $f'(a) = m$.
- (ii) Es gibt eine reelle Zahl m , so dass

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{|f(t) - f(a) - m(t - a)|}{|t - a|} = 0. \quad (1)$$

- (iii) Es gibt eine reelle Zahl m und eine im Punkt a stetige Funktion $\varepsilon: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varepsilon(a) = 0$, so dass

$$f(t) = f(a) + m(t - a) + \varepsilon(t)(t - a). \quad (2)$$

- (iv) Es gibt eine im Punkt a stetige Funktion $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi(a) = m$, so dass

$$f(t) = f(a) + \varphi(t)(t - a), \quad t \in I. \quad \times \quad (3)$$

⟷ (i) ⇔ (ii) Die Definition von m als Ableitung ist äquivalent mit

$$0 = \lim_{t \rightarrow a} \left(\frac{f(t) - f(a)}{t - a} - m \right) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a) - m(t - a)}{t - a},$$

und dies ist äquivalent mit (1).

(ii) ⇔ (iii) Gleichung (2) ist für $t \neq a$ äquivalent mit

$$\varepsilon(t) = \frac{f(t) - f(a) - m(t - a)}{t - a}.$$

Somit ist (1) äquivalent dazu, dass die Funktion ε durch 0 stetig nach a fortgesetzt werden kann.

(iii) ⇔ (iv) Dies ergibt sich mit $\varphi(t) = m + \varepsilon(t)$. ⟷

Wir haben nicht verlangt, dass eine im Punkt a differenzierbare Funktion dort auch stetig ist. Da in Gleichung (3) aber φ im Punkt a stetig ist, ist es auch die gesamte rechte Seite dieser Gleichung. Ist also f im Punkt a differenzierbar, so ist f dort auch stetig.

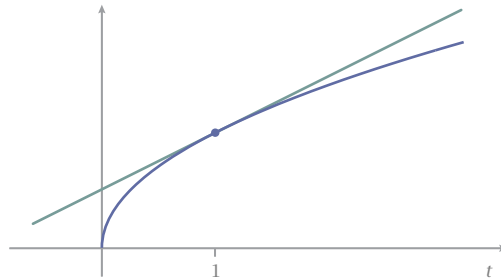
Gleichungen (1) und (2) erlauben folgende geometrische Interpretation. Die affine Funktion

$$\lambda: t \mapsto \lambda(t) = f(a) + m(t - a)$$

beschreibt eine Gerade durch den Punkt des Graphen von f über a mit der Steigung m , und für diese gilt

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{|f(t) - \lambda(t)|}{|t - a|} = 0.$$

Abb 3
Wurzelfunktion mit
Tangente



Der *Approximationsfehler* $|f(t) - \lambda(t)|$ zwischen Funktion und Gerade verschwindet also schneller als $|t - a|$ für $t \rightarrow a$. Diese Eigenschaft bestimmt diese Gerade in der Tat *eindeutig* A_{33} . Mit anderen Worten, die Tangente ist die *bestapproximierende Gerade* an den Graphen von f in diesem Punkt.

Definition Ist $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $a \in I$ differenzierbar, so heißt die Gerade

$$\lambda: t \mapsto \lambda(t) = f(a) + f'(a)(t - a)$$

die *Linearisierung* und ihr Graph die *Tangente* von f im Punkt a . \times

- 2 \Rightarrow **Beispiele** A. Jede affine Funktion $\alpha: t \mapsto mt + b$ ist in jedem Punkt differenzierbar, denn für alle t und h gilt

$$\frac{\alpha(t+h) - \alpha(t)}{h} = m.$$

Also ist $\alpha'(t) = m$ für alle t . Ihre Linearisierung im Punkt a ist

$$\lambda(t) = \alpha(a) + m(t - a) = ma + b + m(t - a) = \alpha(t).$$

Jede Gerade ist daher in jedem Punkt ihre eigene Tangente.

- B. Die Wurzelfunktion $t \mapsto \sqrt{t}$ ist in jedem Punkt $t > 0$ differenzierbar, denn

$$\frac{\sqrt{t+h} - \sqrt{t}}{h} = \frac{1}{h} \frac{h}{\sqrt{t+h} + \sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{t+h} + \sqrt{t}}$$

und damit

$$(\sqrt{t})' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{t+h} - \sqrt{t}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{t}}, \quad t > 0.$$

Im Punkt $a = 1$ beispielsweise ist die Linearisierung $t \mapsto 1 + (t - 1)/2$ $Abb\ 3$.

Bei $t = 0$ dagegen divergiert der Differenzenquotient, und die Wurzelfunktion ist in 0 *nicht* differenzierbar.

- C. Die Betragsfunktion $|\cdot|$ ist im Punkt 0 *nicht* differenzierbar, da es dort keine eindeutige bestapproximierende Tangente gibt. \leftarrow

- 3 **Rechenregeln für die Ableitung** Sind $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $a \in I$ differenzierbar, so sind es auch $f + g$, fg , und f/g , falls $g(a) \neq 0$, und es gilt die **Summen-, Produkt- und Quotientenregeln**

$$(f + g)'(a) = (f' + g')(a) \quad (\text{Summenregel})$$

$$(fg)'(a) = (f'g + fg')(a) \quad (\text{Produktregel})$$

$$(f/g)'(a) = ((f'g - fg')/g^2)(a) \quad (\text{Quotientenregel}).$$

««« Im Folgenden verwenden wir Kriterium (iv) von Satz 1. Wir schreiben

$$f(t) = f(a) + \varphi(t)(t - a), \quad g(t) = g(a) + \psi(t)(t - a),$$

mit in a stetigen Funktionen φ und ψ , wobei $\varphi(a) = f'(a)$ und $\psi(a) = g'(a)$. Für das Produkt beispielsweise folgt daraus

$$\begin{aligned} (fg)(t) &= f(t)g(t) \\ &= f(a)g(a) + [\varphi(t)g(a) + f(a)\psi(t)](t - a) \\ &\quad + \varphi(t)\psi(t)(t - a)^2 \\ &= (fg)(a) + [\varphi(t)g(a) + f(a)\psi(t) + \varphi(t)\psi(t)(t - a)](t - a). \end{aligned}$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern ist stetig im Punkt a und hat dort den Wert

$$\varphi(a)g(a) + f(a)\psi(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Also ist fg in a differenzierbar mit der behaupteten Ableitung. Die übrigen Aussagen werden analog bewiesen. »»»

- 4 **Satz** Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$(t^n)' = nt^{n-1},$$

wobei $t \neq 0$ für $n \leq 0$. \times

««« Für $n = 0$ ist dies die Ableitung der konstanten Funktion, $(1)' = 0$. Für $n = 1$ ist es die Ableitung der Identität, $(t)' = 1$. Mit Induktion über n und der Produktregel folgt für $n \geq 1$

$$(t^{n+1})' = (t^n t)' = (t^n)'t + t^n(t)' = nt^{n-1}t + t^n = (n+1)t^n.$$

Für $n < 0$ erhält man hieraus mit der Quotientenregel

$$(t^n)' = \left(\frac{1}{t^{-n}}\right)' = \frac{-(t^{-n})'}{(t^{-n})^2} = \frac{nt^{-n-1}}{t^{-2n}} = \frac{n}{t^{-n+1}} = nt^{n-1}.$$

► **Beispiel** Ein reelles Polynom ist überall differenzierbar, und es gilt

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k t^k\right)' = \sum_{k=0}^n k a_k t^{k-1} = \sum_{k=1}^n k a_k t^{k-1}. \quad \blacktriangleleft$$

■ Kettenregel und Umkehrregel

Wie bei der Stetigkeit untersuchen wir nun die Frage, unter welchen Bedingungen die Differenzierbarkeit bei Verkettung und Umkehrung von Funktionen erhalten bleibt. — Zuerst die Verkettung zweier Funktionen.

- 5 **Kettenregel** Es seien $f: I \rightarrow J$ im Punkt $a \in I$ und $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $f(a) \in J$ differenzierbar. Dann ist auch $g \circ f$ im Punkt a differenzierbar, und es gilt

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a). \quad \times$$

⟨⟨⟨ Nach Voraussetzung ist

$$f(t) = f(a) + \varphi(t)(t - a), \quad g(s) = g(b) + \psi(s)(s - b),$$

mit in a respektive $b = f(a)$ stetigen Funktionen φ und ψ , wobei $\varphi(a) = f'(a)$ und $\psi(b) = g'(b)$. Somit wird

$$\begin{aligned} (g \circ f)(t) &= g(f(t)) \\ &= g(b) + \psi(f(t))(f(t) - b) \\ &= (g \circ f)(a) + [\psi(f(t))\varphi(t)](t - a). \end{aligned}$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern ist stetig im Punkt a mit Wert

$$\psi(f(a))\varphi(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Also ist $g \circ f$ in a differenzierbar mit der behaupteten Ableitung. ⟩⟩⟩

Man beachte, dass nur die Differenzierbarkeit von f und g in den Punkten a respektive $b = f(a)$ gefordert wird. Differenzierbarkeit in anderen Punkten wird nicht benötigt. Dasselbe gilt für die gleich folgende Umkehrregel 6.

► **Beispiel** Die Funktion

$$f: t \mapsto \sqrt{1+t^2}$$

kann als Komposition der Wurzel $g: x \mapsto \sqrt{x}$ mit dem Polynom $h: t \mapsto 1+t^2$ aufgefasst werden. Sie ist auf ganz \mathbb{R} definiert und differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(t) = g'(x) \Big|_{x=h(t)} h'(t) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Big|_{x=h(t)} 2t = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}. \quad \blacktriangleleft$$

- 6 **Umkehrregel** Sei $f: I \rightarrow J$ stetig und bijektiv. Ist f im Punkt $a \in I$ differenzierbar und $f'(a) \neq 0$, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1}: J \rightarrow I$ im Punkt

$b = f(a)$ differenzierbar, und es gilt

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}. \quad \times \quad (4)$$

«»« Nach Voraussetzung ist wieder

$$f(t) = f(a) + \varphi(t)(t - a)$$

mit einer im Punkt a stetigen Funktion φ , wobei $\varphi(a) = f'(a) \neq 0$. Es existiert dann ein $\delta > 0$, so dass $\varphi(t) \neq 0$ für alle $t \in U_\delta(a) \cap I$. Für diese t können wir die erste Gleichung umformen zu

$$t = a + \frac{f(t) - f(a)}{\varphi(t)}.$$

Setzen wir $s = f(t)$ und $b = f(a)$, so ist $t = g(s)$ und $a = g(b)$ mit $g = f^{-1}$. Die letzte Gleichung geht dann über in

$$g(s) = g(b) + \frac{s - b}{\varphi(g(s))}.$$

Da der Nenner im Punkt b stetig ist und nicht verschwindet, ist g im Punkt b differenzierbar, und die Ableitung ist wie behauptet.

$$g'(b) = \frac{1}{\varphi(g(b))} = \frac{1}{f'(g(b))}. \quad \gggg$$

Man kann Gleichung (4) leicht *rekonstruieren*. Aus $f^{-1}(f(t)) = t$ folgt mit der Kettenregel ₅

$$(f^{-1})'(f(t))f'(t) = 1,$$

also

$$(f^{-1})'(f(t)) = \frac{1}{f'(t)}.$$

Dies ist allerdings *kein Ersatz* für den vorangehenden Beweis. Wir müssen ja zuerst *wissen*, dass f^{-1} im Punkt b differenzierbar ist, bevor wir die Kettenregel anwenden dürfen.

► **Beispiel** Die Parabel $f: t \mapsto t^2$ ist für $t \geq 0$ strikt wachsend, bijektiv und differenzierbar mit Ableitung

$$f'(t) = 2t.$$

Diese ist nicht Null für $t > 0$. Die Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ ist deshalb in jedem Punkt $x = t^2 > 0$ differenzierbar mit Ableitung

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{2g(x)}.$$

Für die Wurzelfunktion erhalten wir also wieder das Ergebnis von Beispiel 2,

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Andererseits ist $f'(0) = 0$, und in $0 = f(0)$ ist die Wurzelfunktion auch tatsächlich nicht differenzierbar. Die Annahme, dass f' im betrachteten Punkt nicht verschwinden darf, ist also notwendig. ◀

■ Differenzierbare Funktionen

Wir definieren nun noch die Differenzierbarkeit auf einem Intervall. Dies geschieht genauso wie im Fall der Stetigkeit.

Definition Eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar auf I* , oder einfach *differenzierbar*, wenn sie in jedem Punkt von I differenzierbar ist. In diesem Fall heißt die Funktion

$$f': I \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto f'(t)$$

die *Ableitung* von f . Ist f' stetig, so heißt f *stetig differenzierbar auf I* . ✕

Der Raum aller auf I stetig differenzierbaren reellen Funktionen wird mit $C^1(I)$ bezeichnet. Offensichtlich gilt

$$C^1(I) \subsetneq C^0(I) := C(I),$$

denn stetige Funktionen müssen nicht differenzierbar sein. Es gibt sogar stetige Funktionen auf \mathbb{R} , die in *keinem einzigen Punkt* differenzierbar sind_{12.2}. Daneben gibt es natürlich auch Funktionen, die differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar sind_{A-9}.

Satz Sind f und g in $C^1(I)$, so sind auch $f + g$ und fg in $C^1(I)$, und es gilt

$$(f + g)' = f' + g', \quad (fg)' = f'g + fg'.$$

Verschwand g nirgends auf I , so ist auch f/g in $C^1(I)$, und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}. \quad \times$$

Aufgrund dieses Satzes ist $C^1(I)$ nicht nur ein Vektorraum, sondern eine kommutative *Algebra* – das heißt, es ist neben der Addition eine Multiplikation erklärt, für die die Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetze gelten. — Nun noch die globale Kettenregel.

- 7 **Kettenregel** Sind f und g beide C^1 und ist $g \circ f$ auf dem Definitionsbereich von f erklärt, so ist auch $g \circ f$ eine C^1 -Funktion, und es gilt

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) f'. \quad \times$$

Die globale Umkehrregel formulieren wir im nächsten Abschnitt 15, da wir hierfür den Monotoniesatz 12 benötigen.

8.2

Lokale Extrema und Mittelwertsatz

Es liegt nahe, dass die Ableitung einer Funktion Aufschluss gibt über ihr lokales Verhalten. Man sollte zum Beispiel an ihr erkennen, ob sie monoton ist oder eine Extremstelle ausbildet. Dies wollen wir jetzt untersuchen.

Definition Eine Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt im Punkt $c \in I$ ein *lokales Minimum*, wenn es eine Umgebung $U_\delta(c)$ gibt, so dass

$$f(c) \leq f(t), \quad t \in U_\delta(c) \cap I.$$

Sie besitzt in c ein *striktes lokales Minimum*, wenn außerdem für $t \neq c$ die strikte Ungleichung gilt, also

$$f(c) < f(t), \quad t \in \dot{U}_\delta(c) \cap I.$$

Entsprechend ist ein (*striktes*) *lokales Maximum* definiert. \times

Abb 4

Verschiedene Minimalstellen

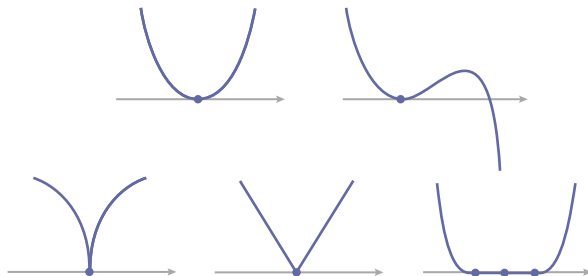
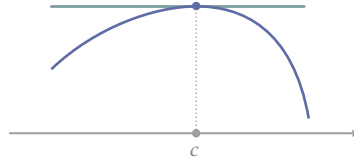


Abb 5

Satz von Fermat für
eine Maximalstelle



Lokale Minima und Maxima werden gemeinsam als *Extrema* bezeichnet. Punkte, an denen ein lokales Extremum vorliegt, werden *Extremstellen* genannt, unterschieden in *Minimal-* und *Maximalstellen*.

Der folgende Satz ist von fundamentaler Bedeutung für das Auffinden von Extremalstellen. Hierbei heißt $c \in I$ *innerer Punkt* des Intervalls I , wenn er kein Randpunkt ist.

- 8 **Satz von Fermat** *Besitzt $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ in einem inneren Punkt c von I ein lokales Extremum und ist f in diesem Punkt differenzierbar, so gilt $f'(c) = 0$. \times*

⟨⟨⟨ Sei zum Beispiel c eine Minimalstelle von f im Innern von I . Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass $U_\delta(c) \subset I$ und

$$f(c+h) \geq f(c), \quad |h| < \delta.$$

Also gilt

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0, \quad 0 < h < \delta,$$

und

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0, \quad 0 > h > -\delta.$$

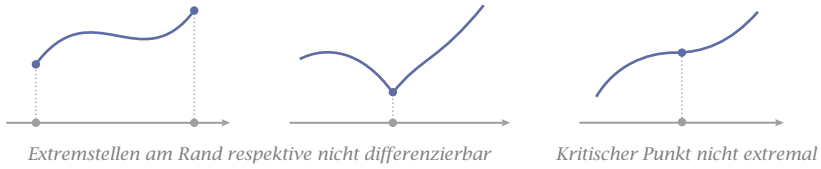
Da wegen der Differenzierbarkeit von f im Punkt c der Grenzwert für $h \rightarrow 0$ existiert, folgt aus diesen Ungleichungen sowohl $f'(c) \geq 0$ als auch $f'(c) \leq 0$. Also ist $f'(c) = 0$. $\rangle\rangle\rangle$

Beide Voraussetzungen des Satzes – Lage der Extremstelle c im Innern und Differenzierbarkeit im Punkt c – sind *notwendig*. In einer Extremstelle am Rand muss die Ableitung nicht verschwinden, und an einer Extremstelle im Innern muss eine Funktion nicht differenzierbar sein.

Das Kriterium von Fermat ist allerdings nur *notwendig*, aber *nicht hinreichend*. Ein kritischer Punkt ist nicht notwendigerweise eine Extremstelle – siehe Abbildung 6.

Punkte, in denen die Ableitung einer Funktion verschwindet, haben eine besondere Bedeutung und deshalb auch einen besonderen Namen.

Abb 6 Zum Satz von Fermat



Definition Ist $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt c differenzierbar und $f'(c) = 0$, so heißt c ein *stationärer* oder *kritischer Punkt* von f . \times

Der Satz von Fermat besagt also, dass eine Extremstelle im Innern notwendig ein kritischer Punkt ist, wenn die Funktion dort differenzierbar ist. Geometrisch bedeutet dies, dass der Graph von f an einer solchen Extremstelle eine *horizontale Tangente* aufweist.

■ Mittelwertsätze

Als erste Anwendung des Satzes von Fermat erhalten wir sogenannte Mittelwertsätze. Zuerst betrachten wir einen Spezialfall.

- 9 **Satz von Rolle** Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Gilt $f(a) = f(b)$, so existiert ein Punkt $c \in (a, b)$ mit

$$f'(c) = 0.$$

Somit besitzt f einen kritischen Punkt im Innern von $[a, b]$. \times

⟨⟨⟨ Ist f konstant, so verschwindet f' überall, und *jeder* Punkt in $[a, b]$ ist ein kritischer Punkt. Sei also f nicht konstant. Die stetige Funktion f nimmt auf $[a, b]$ ihr Minimum und Maximum an, und beide können nicht gleichzeitig am Rand liegen, da f sonst konstant wäre. Also besitzt f wenigstens eine Extremalstelle c im Innern von $[a, b]$. Da f dort auch differenzierbar ist, ist nach dem Satz von Fermat $f'(c) = 0$. ⟩⟩⟩

Der Satz von Rolle gilt natürlich erst recht, wenn f auf ganz $[a, b]$ differenzierbar ist. Es ist aber sinnvoll, hier und im Folgenden nur die Differenzierbarkeit

Abb 7
Satz von Rolle

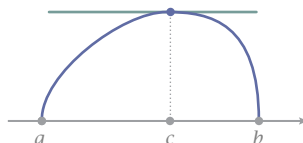
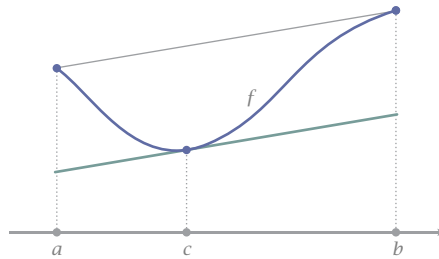


Abb 8

Zum Mittelwertsatz



auf (a, b) zu verlangen, um auch Funktionen zu erfassen, die in den Endpunkten des Intervalls stetig, aber *nicht* differenzierbar sind, wie zum Beispiel in Abbildung 7. Und überhaupt vermeidet ein Mathematiker gerne Bedingungen, die er nicht benötigt.

Übrigens war Rolle ein französischer Mathematiker, sein Name wird daher ohne >e< gesprochen. — Nun der allgemeine Fall.

- 10 **Mittelwertsatz (Mws)** Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein Punkt $c \in (a, b)$, so dass

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad \times$$

⟨⟨⟨ Betrachte die Hilfsfunktion φ mit

$$\varphi(t) = f(t) - m(t - a), \quad m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Mit anderen Worten, wir subtrahieren von der Funktion f die Sekante durch die Eckpunkte ihres Graphen. Für diese Funktion gilt $\varphi(a) = \varphi(b)$. Auch ist φ auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Nach dem Satz von Rolle 9 existiert also ein $c \in (a, b)$ mit

$$\varphi'(c) = f'(c) - m = 0.$$

Dies ist äquivalent zur Behauptung. ⟩⟩⟩

Der Quotient m im Beweis des Mittelwertsatzes stellt die *mittlere Steigung* der Funktion f im Intervall $[a, b]$ dar. Der Mittelwertsatz sagt also aus, dass an wenigstens einer Stelle im Innern des Intervalls die Tangentensteigung gleich der mittleren Steigung ist. Der Satz von Rolle ist hiervon ein Spezialfall, denn für $f(b) = f(a)$ ist die mittlere Steigung 0. Andererseits haben wir den Mittelwertsatz gerade mit dem Satz von Rolle bewiesen. Beide Sätze sind somit *äquivalent*.

Oft wird der Mittelwertsatz in folgender Form angewandt. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert zu $t, t + h \in [a, b]$ immer ein

$\theta \in (0, 1)$, so dass

$$f(t+h) - f(t) = f'(t + \theta h)h.$$

In dieser Formulierung ist das Vorzeichen von h und damit die Anordnung von t und $t+h$ unerheblich.

■ Folgerungen

- 11 **Schrankensatz** Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gilt für alle $u < v$ in $[a, b]$ die Ungleichung

$$|f(v) - f(u)| \leq (v - u) \sup_{u < t < v} |f'(t)|.$$

Ist also

$$L = \sup_{a < t < b} |f'(t)| < \infty,$$

so ist f L -lipschitz auf $[a, b]$. ✕

⟨⟨⟨ Wir können den Mittelwertsatz₁₀ auf $u < v$ anwenden und erhalten ein $c \in (u, v)$ mit

$$f(v) - f(u) = f'(c)(v - u).$$

Also gilt erst recht

$$|f(v) - f(u)| \leq (v - u) |f'(c)| \leq (v - u) \sup_{u < t < v} |f'(t)|. \quad \rangle\rangle\rangle$$

- 12 **Monotoniesatz** Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gilt

- (i) $f' = 0$ auf (a, b) gdw f konstant auf $[a, b]$,
- (ii) $f' \geq 0$ auf (a, b) gdw f monoton steigend auf $[a, b]$,
- (iii) $f' \leq 0$ auf (a, b) gdw f monoton fallend auf $[a, b]$,
- (iv) $f' > 0$ auf (a, b) impliziert f ist streng monoton steigend auf $[a, b]$. ✕

⟨⟨⟨ Wir beweisen zuerst die Richtung \Rightarrow .

(i) Für $t \in (a, b]$ wenden wir den Mittelwertsatz auf das Intervall $[a, t]$ an und erhalten ein $c \in (a, t)$ mit

$$f(t) - f(a) = f'(c)(t - a) = 0.$$

Also ist $f(t) = f(a)$ für alle $t \in (a, b]$, und damit f konstant.

(ii) Entsprechend wenden wir den Mittelwertsatz auf zwei Punkte $u < v$ in $[a, b]$ an und erhalten ein $c \in (u, v)$ mit

$$f(v) - f(u) = f'(c)(v - u) \geq 0.$$

Somit ist f monoton steigend auf $[a, b]$.

(iii), (iv) gehen genau so.

Die Richtung \Leftarrow folgt aus der Betrachtung der Differenzenquotienten. \gggg

Man beachte, dass in (iv) *nicht* die Umkehrung gilt. So ist die kubische Parabel $t \mapsto t^3$ streng monoton steigend, aber ihre Ableitung verschwindet bei $t = 0$.

Wir benötigen noch folgende Verallgemeinerung des Mws. Er beinhaltet den »normalen« Mittelwertsatz mit $g = id$.

- 13 **Allgemeiner Mittelwertsatz** Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, auf (a, b) differenzierbar, und $g' \neq 0$ auf (a, b) . Dann gibt es ein $c \in (a, b)$ mit

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \quad \times$$

\llll Es ist $g(a) \neq g(b)$, da andernfalls g in (a, b) aufgrund des Satzes von Rolle einen kritischen Punkt hätte. Also ist

$$\varphi(t) = f(t) - m(g(t) - g(a)), \quad m = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

auf $[a, b]$ wohldefiniert, stetig und auf (a, b) differenzierbar. Außerdem ist $\varphi(a) = \varphi(b)$. Mit Rolle φ existiert also ein Punkt $c \in (a, b)$ mit

$$0 = \varphi'(c) = f'(c) - mg'(c).$$

Dies ist äquivalent zur Behauptung. \gggg

Aus dem Korollar 12 ergibt sich ein einfaches Kriterium für das Vorliegen einer Extremalstelle.

- 14 **Satz** Die Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar und besitze im Innern von I einen kritischen Punkt c . Ist f' in einer Umgebung von c streng monoton steigend respektive fallend, so besitzt f in c ein striktes lokales Minimum respektive Maximum. \times

\llll Angenommen, f' ist in einer Umgebung $U_\delta(c) \subset I$ streng monoton steigend. Wegen $f'(c) = 0$ ist dann in dieser Umgebung $f'(t) < 0$ für $t < c$ und $f'(t) > 0$ für $t > c$. Also ist f auf $(c - \delta, c)$ streng monoton fallend und auf $(c, c + \delta)$ streng monoton steigend. Das aber bedeutet, dass

$$f(c) < f(c + h), \quad 0 < |h| < \delta.$$

Somit liegt bei c ein striktes Minimum. \gggg

\Rightarrow **Beispiel** In welchem Verhältnis müssen Höhe h und Radius r einer Konservendose gewählt werden, um bei vorgegebenen Volumen V den Blechbedarf

zu minimieren? Für Volumen und Oberfläche gilt

$$V = \pi r^2 h, \quad A = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Auflösen der Volumengleichung nach h auf und Einsetzen in die Oberflächengleichung ergibt

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Da $A(r)$ unbeschränkt ist für $r \searrow 0$ und $r \nearrow \infty$, muss aus Stetigkeitsgründen mindestens ein Minimum auf $(0, \infty)$ vorliegen. Nach dem Satz von Fermat ist dort notwendigerweise

$$0 = A'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} \Leftrightarrow r^3 = \frac{V}{2\pi}.$$

Da es nur einen einzigen kritischen Punkt gibt, muss dieser die Minimalstelle sein, auch ohne weitere Betrachtung von A' oder A'' . ◀

Schließlich erhalten wir noch einen handlichen Satz über Umkehrfunktionen.

- 15 **Satz über C^1 -Umkehrfunktionen** *Ist f in $C^1(I)$ und $f' \neq 0$ auf ganz I , so ist f umkehrbar, die Umkehrfunktion f^{-1} ist auf dem Intervall $J = f(I)$ ebenfalls C^1 , und es gilt dort*

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}. \quad \times$$

◀◀◀ Da f' auf I stetig ist und nirgends verschwindet, hat f' festes Vorzeichen. Somit ₁₂ ist f streng monoton und somit umkehrbar. Aufgrund des Umkehrsatzes ₆ ist, da f' nirgends verschwindet, die Umkehrfunktion $g = f^{-1}$ auf $f(I)$ differenzierbar mit Ableitung

$$g' = \frac{1}{f' \circ g}.$$

Diese ist offensichtlich ebenfalls stetig. Somit ist f^{-1} ebenfalls C^1 . ▶▶▶

8.3 Höhere Ableitungen

Ist $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist die Ableitung $f': I \rightarrow \mathbb{R}$ wieder eine reelle Funktion auf I . Somit kann man fragen, ob f' ebenfalls differenzierbar ist. Ist dies der Fall, so erhält man die *zweite Ableitung* von f ,

$$f'' = (f')': I \rightarrow \mathbb{R}.$$

So kann man fortfahren, so lange die nächste Ableitung ebenfalls differenzierbar ist, und induktiv die höheren Ableitungen von f erklären. Bezeichnen wir die r -te Ableitung mit $f^{(r)}$, so gilt mit $f^{(0)} := f$ also

$$f^{(r)} := (f^{(r-1)})', \quad r \geq 1.$$

Insbesondere ist $f^{(1)} = f'$ und $f^{(2)} = f''$. Andere übliche Bezeichnungen hierfür sind $D^r f$ oder auch $\partial^r f$.

Man sagt, f ist *r -mal differenzierbar*, wenn $f, f', \dots, f^{(r)}$ existieren. Ist außerdem $f^{(r)}$ stetig, so heißt f *r -mal stetig differenzierbar*. Die Klasse dieser Funktionen wird mit $C^r(I)$ bezeichnet, und man sagt, eine Funktion $f \in C^r(I)$ ist eine *C^r -Funktion* oder kurz *C^r* .

Schließlich definiert man noch den Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf I ,

$$C^\infty(I) := \bigcap_{r \geq 0} C^r(I).$$

Man erhält somit eine *Skala* von Funktionenräumen

$$C^\infty(I) \subsetneq \dots \subsetneq C^{r+1}(I) \subsetneq C^r(I) \subsetneq \dots \subsetneq C^1(I) \subsetneq C^0(I).$$

Jede Inklusion ist eine echte Inklusion, denn natürlich gibt es für jedes $r \geq 0$ C^r -Funktionen, die nicht C^{r+1} sind.

16 ▶ A. Jede Potenz $t \mapsto t^n$ mit $n \geq 0$ ist unendlich oft differenzierbar, wobei

$$(t^n)^{(r)} = n(n-1) \cdots (n-r+1) t^{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!} t^{n-r}, \quad 0 \leq r \leq n,$$

insbesondere

$$(t^n)^{(n)} \equiv n! .$$

Somit ist auch $(t^n)^{(r)} \equiv 0$ für alle $r > n$.

B. Jedes Polynom ist unendlich oft differenzierbar. Ist das Polynom p vom Grad n , so ist $p^{(n+1)} \equiv 0$.

C. Die im nächsten Kapitel definierten Funktionen \exp , \sin und \cos sind auf \mathbb{R} unendlich oft differenzierbar, und es gilt

$$\exp' = \exp, \quad \sin' = \cos, \quad \cos' = -\sin. \quad \blacktriangleleft$$

Jede Linearkombination von C^r -Funktionen ist wieder eine C^r -Funktion, wie man induktiv mit $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$ leicht zeigt. Somit ist $C^r(I)$ ein reeller Vektorraum. Es gilt aber noch mehr.

- 17 **Leibnizsche Formel** Das Produkt zweier Funktionen $f, g \in C^r(I)$ gehört ebenfalls zu $C^r(I)$, und es gilt

$$(fg)^{(r)} = \sum_{s=0}^r B_s^r f^{(r-s)} g^{(s)}$$

mit den **Binomialkoeffizienten** $B_s^r = \frac{r!}{s!(r-s)!} = \binom{r}{s}$. ✕

Den Beweis erfolgt per Induktion wie bei der binomischen Formel A_{35} . Auch bei der Komposition und der Umkehrung gibt es keine Überraschungen.

- 18 **Satz über C^r -Komposition** Ist $f \in C^r(I)$ und $g \in C^r(J)$ mit $J \supset f(I)$, so ist auch $g \circ f \in C^r(I)$. ✕

⟨⟨⟨ Für $r = 1$ ist dies die Kettenregel 7 , und es gilt

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) f'.$$

Alles Weitere folgt mit Induktion: Sind f und g von der Klasse C^{r+1} , so sind f' und g' von der Klasse C^r . Dann ist auch $g' \circ f$ C^r aufgrund der Induktionsannahme, und damit auch das Produkt mit f' . Somit ist $(g \circ f)'$ C^r und damit $g \circ f$ selbst C^{r+1} . ⟩⟩⟩

- 19 **Satz über C^r -Umkehrfunktion** Sei $f \in C^r(I)$. Verschwindet f' nirgends, so ist f umkehrbar und $f^{-1} \in C^r(J)$ mit $J = f(I)$. ✕

⟨⟨⟨ Aufgrund des Satzes über C^1 -Umkehrfunktionen 15 ist f auf jeden Fall umkehrbar, und für $\phi = f^{-1}$ gilt $\phi \in C^1(J)$ mit

$$\phi' = \frac{1}{f' \circ \phi}.$$

Alles Weitere folgt mit Induktion: Ist f C^{r+1} , so ist f' C^r ebenso wie ϕ aufgrund der Induktionsannahme. Dann steht auf der rechten Seite ebenfalls eine C^r -Funktion aufgrund des Satzes über die C^r -Komposition. Somit ist ϕ' C^r und damit ϕ selbst C^{r+1} . ⟩⟩⟩

Bemerkung Die zweite Ableitung von $\phi = f^{-1}$ ist dann

$$\phi'' = -\frac{1}{(f' \circ \phi)^2} (f'' \circ \phi) \phi' = -\frac{f'' \circ \phi}{(f' \circ \phi)^3} = -\left(\frac{f''}{f'^3}\right) \circ \phi. \quad \circ$$

8.4

Die Regel von l'Hospital

Oft sind sogenannte ›unbestimmte Ausdrücke‹ der Form $0/0$ zu bestimmen, also Grenzwerte wie

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 t}{t^2},$$

wo Zähler und Nenner gleichzeitig gegen Null konvergieren. Für diesen Fall gibt es eine nützliche Regel, die auf dem verallgemeinerten Mittelwertsatz basiert.

20 Einfache Regel von l'Hospital Seien $f, g \in C^1(I)$. Ist in einem Punkt $a \in I$

$$f(a) = g(a) = 0$$

und $g' \neq 0$ in einer punktierten Umgebung von a , so gilt

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

Insbesondere existiert der linke Grenzwert, wenn der rechte Grenzwert existiert. ✕

⟨⟨⟨⟨ Aufgrund des allgemeinen Mittelwertsatzes ₁₃ ist

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f(t) - f(a)}{g(t) - g(a)} = \frac{f'(s)}{g'(s)}$$

mit einem s zwischen a und t . Mit $t \rightarrow a$ haben wir auch $s \rightarrow a$. Existiert also der Grenzwert auf der rechten Seite für $s \rightarrow a$, so folgt

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{s \rightarrow a} \frac{f'(s)}{g'(s)}. \quad \rangle\rangle\rangle\rangle$$

▶ **Beispiele** A. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{2x + 1} = \frac{2}{3},$

B. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t}{1} = 1.$ C. $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f'(t)}{1} = f'(a).$

D. Man darf nicht vergessen zu überprüfen, ob tatsächlich alle Voraussetzungen der Regel erfüllt sind. So ist zum Beispiel

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{\cos t} = 0 \neq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2t}{-\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2}{-\cos t} = -2. \quad \blacktriangleleft$$

Ist auch $f'(a) = g'(a) = 0$, so kann man den Satz nochmals anwenden. Erfüllen die Ableitungen von f' und g' die entsprechenden Voraussetzungen, so geht man zu den zweiten Ableitungen über.

- A. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{3x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x - 2}{6x} = \frac{2}{3}$.
- B. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 t}{t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t \cos t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{1} = 1$.
- C. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a+h) - f'(a-h)}{2h} = f''(a)$. ◀

■ Der allgemeine Fall

Oft handelt es sich bei a um einen Randpunkt eines Definitionsintervalls, in dem f' und g' nicht definiert sind. Auch ist der Fall eines uneigentlichen Randpunktes bei ∞ oder $-\infty$ von Interesse, sowie unbestimmte Ausdrücke der Form ∞/∞ . Auf alle diese Fälle lässt sich die Regel von l'Hospital verallgemeinern. Der Beweis ist etwas technisch und kann beim ersten Lesen übergangen werden.

21 **Regel von l'Hospital** Es seien $f, g \in C^1(I)$. Ist a ein Randpunkt von I mit

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \lim_{t \rightarrow a} g(t) = 0 \quad \text{oder} \quad \lim_{t \rightarrow a} g(t) = \pm \infty,$$

und ist $g' \neq 0$ in einer punktierten Umgebung von a , so gilt

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f'(t)}{g'(t)}, \quad (5)$$

falls der zweite Grenzwert auf der erweiterten Zahlengerade existiert. ✕

◀◀◀ Sei

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow a} \frac{f'(t)}{g'(t)}. \quad (6)$$

Wir zeigen, dass im Fall $\lambda < \infty$ zu jedem $\lambda^+ > \lambda$ ein Intervall $I_\delta = \dot{U}_\delta(a) \cap I$ existiert, so dass

$$\frac{f(t)}{g(t)} \leq \lambda^+, \quad t \in I_\delta. \quad (7)$$

Analog zeigt man im Fall $\lambda > -\infty$, dass zu jedem $\lambda^- < \lambda$ ein ähnliches Intervall J_δ existiert, so dass

$$\frac{f(t)}{g(t)} \geq \lambda^-, \quad t \in J_\delta.$$

Beides zusammen ergibt die Behauptung (5).

Sei also $\lambda < \lambda^+ < \infty$. Da der Grenzwert in Gleichung (6) existiert, gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein Intervall $I_\delta = \dot{U}_\delta(a) \cap I$ so, dass

$$\frac{f'(t)}{g'(t)} \leq \lambda^+ - \varepsilon, \quad t \in I_\delta.$$

Mit dem verallgemeinerten Mittelwertsatz folgt hieraus

$$\frac{f(t) - f(s)}{g(t) - g(s)} = \frac{f'(u)}{g'(u)} \leq \lambda^+ - \varepsilon, \quad s, t \in I_\delta, \quad (8)$$

mit einem von s und t abhängenden $u \in I_\delta$.

Gilt jetzt

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \lim_{t \rightarrow a} g(t) = 0,$$

so folgt mit $s \rightarrow a$ hieraus (7), und wir sind fertig.

Gilt dagegen beispielsweise $\lim_{t \rightarrow a} g(t) = \infty$, so schreiben wir zuerst

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{f(t) - f(s)}{g(t) - g(s)} \frac{g(t) - g(s)}{g(t)} + \frac{f(s)}{g(t)}.$$

Für irgendein festes $s \in I_\delta$ und t hinreichend nahe bei a ist $g(t) - g(s) > 0$, so dass mit (8)

$$\frac{f(t)}{g(t)} \leq (\lambda^+ - \varepsilon) \frac{g(t) - g(s)}{g(t)} + \frac{f(s)}{g(t)}, \quad t \in I_\theta,$$

auf einem hinreichend kleinen Intervall $I_\theta \subset I_\delta$. Für $t \rightarrow a$ konvergiert die rechte Seite gegen $\lambda^+ - \varepsilon$. Wählen wir also I_θ nochmal kleiner, so gilt auch

$$\frac{f(t)}{g(t)} \leq \lambda^+, \quad t \in I_\theta,$$

und damit wieder (7). Der Fall $\lim_{t \rightarrow a} g(t) = -\infty$ geht genauso. \gggg

Bemerkung Der Beweis gilt für den Fall $t \rightarrow a$ und $t \rightarrow \pm\infty$ als auch für den Fall, dass es sich in (5) um einen uneigentlichen Grenzwert handelt. \rightarrow

$$\triangleright \text{A. } \lim_{t \rightarrow \infty} t^2 e^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2t}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2}{e^t} = 0.$$

$$\text{B. Ganz allgemein gilt } \lim_{t \rightarrow \infty} t^m e^{-t} = 0 \quad \text{für } m \geq 0.$$

$$\text{C. } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log t}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1/t}{1} = 0.$$

Andere unbestimmte Ausdrücke wie $0 \cdot \infty$ lassen sich oft in eine Form bringen, auf die man die Regel von l'Hospital anwenden kann:

$$\text{D. } \lim_{t \rightarrow 0} (t \log t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log t}{1/t} = - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1/t}{1/t^2} = - \lim_{t \rightarrow 0} t = 0.$$

$$\text{E. } \lim_{t \rightarrow \infty} t \log \left(1 + \frac{1}{t} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\log(1+s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1/(1+s)}{1} = 1.$$

$$\text{F. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(n \log \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right) = e^1 = e. \quad \blacktriangleleft$$

8.5

Taylorpolynome

Sei f eine reelle Funktion auf einem Intervall I und $a \in I$. Die *Stetigkeit* von f im Punkt a können wir auffassen als lokale Approximierbarkeit von f durch eine *konstante Funktion*, denn es gilt

$$f(a+h) = f(a) + \varepsilon(h)$$

mit einer in 0 stetigen und dort verschwindenden Funktion ε . Die *Differenzierbarkeit* von f in a ist gleichbedeutend mit der lokalen Approximierbarkeit durch eine *lineare Funktion*, denn

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \varepsilon(h)h$$

wiederum mit einer in 0 stetigen und dort verschwindenden Funktion ε_1 .

Man kann daher fragen, ob sich eine Funktion lokal auch durch *Polynome höherer Ordnung* so approximieren lässt, dass

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{k=1}^n a_k h^k + \varepsilon(h)h^n$$

mit einer im Punkt 0 stetigen und dort verschwindenden Funktion ε .

Vernachlässigen wir den ε -Term, so sind die Koeffizienten a_k eindeutig bestimmt durch die Ableitungen von f an der Stelle a , denn

$$f^{(k)}(a) = \sum_{l=1}^n a_l \partial^k h^l \Big|_{h=0} = k! a_k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Dies nehmen wir zum Anlass für folgende Definition.

Definition Für $f \in C^n(I)$ und $a \in I$ heißt

$$T_a^n f(t) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k$$

das n -te *Taylorpolynom* von f im *Entwicklungspunkt* a . \times

Insbesondere ist $T_a^0 f(t) = f(a)$ und

$$T_a^1 f(t) = f(a) + f'(a)(t-a),$$

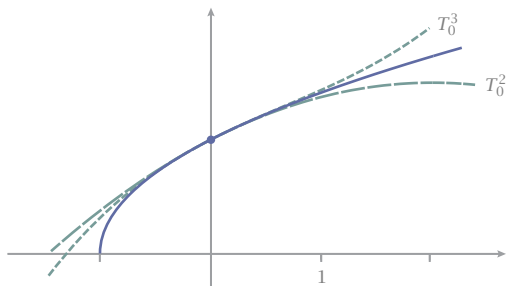
$$T_a^2 f(t) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)(t-a)^2,$$

und $T_a^1 f$ ist genau die Linearisierung von f im Punkt a .

Schreibt man $t = a + h$, so lautet das n -te Taylorpolynom

$$T_a^n f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n.$$

Abb 9
Taylorpolynome zu
 $\sqrt{1+t}$ im Punkt 0



► **Beispiele** A. Für $f: t \mapsto \sqrt{1+t}$ und $a = 0$ ist

$$T_0^2 f(t) = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4}.$$

Übrigens schreibt man $1+t$, um den Entwicklungspunkt in den Nullpunkt zu legen.

B. Für das Polynom $p: t \mapsto (1+t)^n$ gilt

$$\frac{p^{(k)}(0)}{k!} = \frac{n \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Also ist

$$T_0^n p(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k = (1+t)^n = p(t)$$

aufgrund der binomischen Formel 3.22.

C. Entwickeln wir p an einer anderen Stelle $a \neq 0$, so erhalten wir ein Polynom n -ter Ordnung mit anderen Koeffizienten. ◀

■ Restgliedformel

Das Taylorpolynom allein sagt wenig aus, solange man den Approximationsfehler, das sogenannte *Restglied*

$$R_a^n f(t) = f(t) - T_a^n f(t)$$

nicht kontrollieren kann. Eine erste Abschätzung gibt der folgende Satz.

22 **Satz von Taylor mit Restglied von Lagrange** Sei $f \in C^{n+1}(I)$ und $a \in I$.

Dann existiert zu jedem $a+h \in I$ ein $\theta \in [0,1]$, so dass

$$R_a^n f(a+h) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta h)}{(n+1)!} h^{n+1}. \quad \times$$

«««« Betrachte

$$R(h) = f(a+h) - T_a^n f(a+h), \quad S(h) = h^{n+1},$$

als Funktionen von h . Alle Ableitungen von R und S im Punkt 0 bis zur Ordnung n verschwinden:

$$R^{(k)}(0) = S^{(k)}(0) = 0, \quad 0 \leq k \leq n,$$

während

$$S^{(n+1)} = (n+1)! \neq 0.$$

Durch n -fache Anwendung des allgemeinen Mittelwertsatzes¹³ erhalten wir eine Folge von Punkten $\tau_1, \dots, \tau_{n+1}$ zwischen 0 und h mit

$$\begin{aligned} \frac{R(h)}{S(h)} &= \frac{R(h) - R(0)}{S(h) - S(0)} = \frac{R'(\tau_1)}{S'(\tau_1)} \\ &= \frac{R'(\tau_1) - R'(0)}{S'(\tau_1) - S'(0)} = \frac{R''(\tau_2)}{S''(\tau_2)} \\ &\dots \\ &= \frac{R^{(n+1)}(\tau_{n+1})}{S^{(n+1)}(\tau_{n+1})} = \frac{f^{n+1}(a + \theta h)}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

denn die $n+1$ -te Ableitung des n -ten Taylorpolynoms verschwindet. Dies ist äquivalent zur Behauptung. »»»»

Eine Funktion $f \in C^{n+1}(I)$ kann man also lokal durch sein Taylorpolynom vom Grad n so approximieren, dass

$$f(t) = T_a^n f(t) + O((t-a)^{n+1}).$$

Hierbei steht der \mathcal{O} -Ausdruck für eine Funktion ϕ mit der Eigenschaft, dass

$$|\phi(h)| \leq M |h|^{n+1}$$

für alle kleinen $|h|$ mit einer Konstanten $M \geq 0$. Man sagt, ϕ *verschwindet bei Null mit der Ordnung $n+1$* . Diese Information ist für viele Zwecke bereits völlig ausreichend.

► **Beispiel** Die Bewegungsgleichung eines Oszillators mit Masse m ist gegeben durch

$$m\ddot{x} = -F(x),$$

wobei x die Auslenkung aus der Ruhelage bei $x=0$, \ddot{x} ihre zweite Ableitung nach der Zeit, und F die dort wirkende Rückstellkraft bezeichnen. Es gilt also

$F(x) \geq 0 = F(0)$, und Entwickeln bei 0 ergibt

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + O(x^2) = \omega^2 x + O(x^2)$$

mit einer gewissen Konstanten $\omega^2 > 0$. Für kleine Auslenkungen kann man in erster Näherung den quadratischen Term vernachlässigen und erhält die Bewegungsgleichung für den harmonischen Oszillator,

$$m\ddot{x} = -\omega^2 x. \quad \blacktriangleleft$$

► **Beispiel** Die kinetische Energie eines relativistischen Teilchens mit Ruhemasse m_0 und Geschwindigkeit v ist

$$E_{\text{rel}} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} - 1 \right),$$

wobei c die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Für die Funktion ϕ mit

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t}} = (1-t)^{-1/2}, \quad |t| < 1,$$

finden wir

$$\phi(t) = 1 + \frac{1}{2}t + \frac{3}{8}t^2 + O(t^3).$$

Somit erhalten wir mit $u = v^2/c^2$ näherungsweise

$$E_{\text{rel}} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{2}u + \frac{3}{8}u^2 \right) = \frac{1}{2}m_0 v^2 + \frac{3}{8}m_0 \frac{v^4}{c^2}. \quad \blacktriangleleft$$

8.6

Taylorreihe

Ist f beliebig oft differenzierbar, so können wir Taylorpolynome jeder Ordnung bilden. Dies führt zum Begriff der *Taylorreihe*.

Definition Für $f \in C^\infty(I)$ und $a \in I$ heißt

$$T_a f(t) := T_a^\infty f(t) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k$$

die *Taylorreihe von f am Entwicklungspunkt a* . ✕

Die Taylorreihe $T_a f$ konvergiert immer im Entwicklungspunkt a selbst und hat dort den Wert $f(a)$. Das ist trivial. Eine ganz andere Frage ist, ob sie auch in anderen Punkten konvergiert, und ob ihr Wert dort mit der Funktion selbst übereinstimmt.

Definition Konvergiert die Taylorreihe von f in einer Umgebung von a gegen f , so heißt f *um a entwickelbar in seine Taylorreihe*. ✕

In diesem Fall gilt also

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (f(t) - T_a^n f(t)) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_a^n f(t).$$

Somit erhalten wir sofort folgendes

Entwicklungskriterium Es gilt $f(t) = T_a f(t)$ genau dann, wenn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_a^n f(t) = 0. \quad \times$$

Dies muss man nun für die jeweilige Funktion nachprüfen, so wie man auch die Konvergenz einer Reihe in jedem Fall einzeln prüfen muss. Ein Allzweckkriterium gibt es nicht. Am einfachsten ist noch folgende Situation, welche wir auch im nächsten Kapitel antreffen werden. — Zur Erinnerung: Es ist $\|\phi\|_I = \sup_{t \in I} |\phi(t)|$ die Supremumsnorm von ϕ über I .

Satz Sei $f \in C^\infty(I)$. Gilt

$$\sup_{n \geq 0} \sqrt[n]{\|f^{(n)}\|_I} < \infty,$$

so wird f durch seine Taylorreihe in jedem Punkt von I dargestellt. ✕

⟨⟨⟨ Sei $a \in I$ und $r > 0$. Aufgrund der Annahme existiert ein $M \geq 0$, so dass $\|f^{(n)}\|_I < M^n$ für alle $n \geq 1$. Auf dem Intervall $I_r = U_r(a) \cap I$ gilt für das Restglied von Lagrange ²² dann

$$\|R_a^{n-1} f\|_{I_r} \leq \|f^{(n)}\|_I \frac{r^n}{n!} \leq \frac{M^n r^n}{n!}, \quad n \geq 1.$$

Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert dies gegen Null _{5.12.} ⟩⟩⟩

■ Binomische Reihe

Als Beispiel betrachten wir die binomische Formel für beliebige reelle Exponenten. Wir greifen dabei der Definition von t^α für $t > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}_{>0,2}$ und der verallgemeinerten Ableitungsregel $(t^\alpha)' = \alpha t^{\alpha-1}$ vor.

23 Binomische Reihe für reelle Exponenten Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$(1+t)^\alpha = 1 + \sum_{k \geq 1} B_k^\alpha t^k, \quad |t| < 1,$$

mit den *allgemeinen Binomialkoeffizienten*

$$B_k^\alpha := \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - k + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}, \quad k \geq 1. \quad \times$$

Man beachte, dass die Identität nur für $|t| < 1$ gilt, während die Funktion selbst für alle $t > -1$ erklärt ist.

⟨⟨⟨ Die Funktion $f: t \mapsto (1+t)^\alpha$ ist auf $(-1, \infty)$ unendlich oft differenzierbar mit

$$f^{(k)}(t) = \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1) (1+t)^{\alpha-k}.$$

Also ist

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k} = B_k^\alpha.$$

Für das Restglied erhalten wir die Abschätzung

$$|R_0^{n-1} f(t)| = |B_n^\alpha| \frac{|t|^n}{|1+s_n|^{n-\alpha}}$$

mit s_n zwischen t und 0 . Dies konvergiert gegen Null für $-1/2 < t < 1$. Für $-1 < t \leq -1/2$ benötigen wir allerdings eine bessere Restgliedabschätzung durch ein Integral_{10.17}. ⟩⟩⟩

▶ A. Für $\alpha = 0$ verschwinden alle Binomialkoeffizienten, und die Gleichung reduziert sich auf $(1+t)^0 = 1$, was ja stimmt.

B. Für natürliche Exponenten $\alpha = n \geq 1$ gilt $B_k^n = 0$ für $k > n$, und wir erhalten die klassische binomische Formel_{3.22}.

C. Für $\alpha = -1$ ist $B_k^\alpha = (-1)^k$ und somit

$$\frac{1}{1+t} = 1 + \sum_{k \geq 1} (-1)^k t^k = 1 - t + t^2 - t^3 \pm \dots, \quad |t| < 1.$$

Also gilt auch

$$\frac{1}{1-t} = 1 + \sum_{k \geq 1} t^k = 1 + t + t^2 + \dots, \quad |t| < 1,$$

wie es sich für die geometrische Reihe auch gehört.

D. Für $\alpha = 1/2$ erhalten wir

$$\sqrt{1+t} = 1 + \sum_{k \geq 1} b_k t^k = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}t^3 - \frac{5}{128}t^4 \pm \dots$$

mit

$$b_k = \frac{(-1)^k}{2^k} \frac{(-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2k-3)}{1 \cdot 2 \cdots k}. \quad \blacktriangleleft$$

Funktionen in $C^\infty(I)$, die sich in jedem Punkt in ihre Taylorreihe entwickeln lassen, heißen *reell analytisch*. Ihre Klasse wird mit $C^\omega(I)$ bezeichnet. Diese Funktionen können also lokal immer durch eine Potenzreihe dargestellt werden.

Dies gilt aber nicht für jede Funktion in $C^\infty(I)$! Selbst wenn die Taylorreihe einer Funktion in einer Umgebung des Entwicklungspunktes konvergiert, so bedeutet dies keineswegs, dass sie auch die Funktion darstellt ^{12.3}.

■ Noch einmal Potenzreihen

Offen ist noch die Frage, ob die Summenfunktion einer Potenzreihe innerhalb ihres Konvergenzbereichs eine analytische Funktion darstellt. Dies ist tatsächlich der Fall. Die Grundlage dafür bildet der folgende Satz.

24 Satz Jede Potenzreihe

$$\phi(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$$

definiert im Innern ihres Konvergenzintervalls eine differenzierbare Funktion, deren Ableitung man durch gliedweises Differenzieren erhält:

$$\phi'(t) = \sum_{n \geq 1} n a_n t^{n-1}.$$

Diese Reihe hat denselben Konvergenzradius wie ϕ . ✕

⋄⋄⋄ Wie im Fall der Potenzreihe selbst ^{6.16} zeigt man, dass die ϕ' -Reihe für $|t| < |t_0|$ konvergiert, wenn die ϕ -Reihe im Punkt t_0 konvergiert, und umgekehrt. Daher haben beide Reihen denselben Konvergenzradius ^{A-34}.

Für den Differenzenquotienten erhalten wir mit dem Mittelwertsatz ¹⁰

$$\frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(t+h)^n - t^n}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n s_n^{n-1}$$

mit Punkten $(s_n)_{n \geq 1}$ zwischen t und $t+h$. Mit

$$\psi(t) = \sum_{n \geq 1} n a_n t^{n-1}$$

erhalten wir also

$$\begin{aligned} \left| \frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h} - \psi(t) \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (s_n^{n-1} - t^{n-1}) \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n| |s_n^{n-1} - t^{n-1}| \\ &= \left\{ \sum_{1 \leq n \leq N} + \sum_{n > N} \right\} n |a_n| |s_n^{n-1} - t^{n-1}|. \end{aligned}$$

Für t und $t+h$ in einem abgeschlossenen Konvergenzintervall wird die zweite Summe kleiner als ein vorgegebenes $\varepsilon > 0$, indem man N hinreichend groß

wählt. Anschließend wird die erste Summe kleiner als ε , indem man $|h| < \delta$ hinreichend klein wählt. Daher gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(t+h) - \phi(t)}{h} = \psi(t).$$

Also ist ϕ im Punkt t differenzierbar, und es ist $\phi'(t) = \psi(t)$. \gggg

Da der Konvergenzradius einer Reihe unter Differenziation derselbe bleibt, können wir diesen Vorgang beliebig oft wiederholen. Das Ergebnis ist der

25 Potenzreihensatz *Eine Potenzreihe*

$$\phi(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$$

mit positivem Konvergenzradius definiert im Innern ihres Konvergenzintervalles I eine analytische Funktion ϕ , deren Taylorreihe im Punkt 0 die Potenzreihe selbst ist:

$$T_0 \phi = \phi. \quad \times$$

\llll Aus dem vorangehenden Satz folgt durch Induktion, dass eine Potenzreihe im Innern ihres Konvergenzintervalls beliebig oft differenzierbar ist, mit

$$\phi^{(k)}(t) = \sum_{n \geq k} \frac{n!}{(n-k)!} a_n t^{n-k}, \quad k \geq 0.$$

Also ist $\phi^{(k)}(0) = k! a_k$ für alle $k \geq 0$ und damit

$$T_0 \phi(t) = \sum_{k \geq 0} a_k t^k = \phi(t). \quad \gggg$$

Im nächsten Kapitel werden wir mithilfe von Potenzreihen einige der wichtigsten Funktionen der Analysis definieren.

Aufgaben

- 1 Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Welche Aussagen sind wahr?
- Ist f monoton steigend, so ist $f' \geq 0$ auf (a, b) .
 - Ist f umkehrbar, so besitzt f keinen kritischen Punkt.
 - Ist f nicht monoton, so besitzt f einen kritischen Punkt.
 - Besitzt f im Punkt a eine Minimalstelle, so ist $f'(a) = 0$.
 - Ist $f(a) \geq f(b)$, so ist $f'(c) \leq 0$ für wenigstens ein $c \in (a, b)$.
 - Ist f umkehrbar, so ist auch f^{-1} differenzierbar.

- 2 Sei $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $a \in I$ stetig. Gibt es eine affine Funktion $\alpha: t \mapsto m(t - a) + b$ mit

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{|f(t) - \alpha(t)|}{|t - a|} = 0,$$

so ist diese eindeutig bestimmt, und es ist $b = f(a)$ und $m = f'(a)$.

- 3 Die Funktionen f, g seien in einer Umgebung des Punktes $c \in \mathbb{R}$ erklärt, im Punkt c seien f differenzierbar, g stetig, und $f(c) = 0$. Dann ist auch fg in c differenzierbar.
- 4 *a.* Die Funktionen $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seien differenzierbar. Dann sind $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ differenzierbar in allen Punkten $c \in [a, b]$ mit $f(c) \neq g(c)$, und in den übrigen Punkten genau dann, wenn $f'(c) = g'(c)$.
- b.* Wie lautet der entsprechende Satz für $|f|$? Mit Beweis natürlich.
- 5 Bestimmen sie die Linearisierungen in $a = 0$ der Funktionen f mit Funktionsterm
- a.* $\sqrt{1+t}$ *b.* $(1-t)^{-1}$ *c.* $(1+t)^n$ *d.* $\sqrt[n]{1+t}$.
- 6 Für $t \geq 0$ und $n \geq 1$ ist $\sqrt[n]{t} = t^{1/n}$ definiert als die Umkehrfunktion von t^n . Bestimmen sie die Ableitung von $t^{1/n}$ mit Hilfe des Umkehrsatzes.
- 7 Die Funktion f sei auf $[0, b]$ stetig, auf $(0, b)$ differenzierbar, und es sei $f(0) = 0$. Ist f' (streng) monoton wachsend, so ist auch f/t (streng) monoton wachsend.
- 8 Ist f auf $[a, b]$ differenzierbar und f' monoton, so ist f sogar stetig differenzierbar.
- 9 Die Funktion

$$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(t) = \begin{cases} t^2 \cos t^{-1}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

ist im Punkt $t = 0$ differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar.

- 10 **Verbesserter Schrankensatz** Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann ist f lipschitzstetig auf $[a, b]$ genau dann, wenn f' auf (a, b) beschränkt ist. Die bestmögliche Lipschitzkonstante ist in diesem Fall

$$L = \sup_{a < t < b} |f'(t)|.$$

- 11 Gilt für eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$|f(u) - f(v)| \leq |u - v|^2, \quad u, v \in \mathbb{R},$$

so ist f konstant.

- 12 Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, auf (a, b) stetig differenzierbar, und f' sei auf $[a, b]$ stetig fortsetzbar. Dann ist f in a und b ebenfalls differenzierbar.
- 13 *Zwischenwertsatz für die erste Ableitung* Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann nimmt f' jeden Wert zwischen $\inf_{(a,b)} f'$ und $\sup_{(a,b)} f'$ an. *Hinweis:* Es ist nicht erforderlich, dass f' stetig ist.
- 14 Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *gerade*, falls $f(-t) = f(t)$, *ungerade*, falls $f(-t) = -f(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt: Ist f differenzierbar und gerade respektive ungerade, so ist f' ungerade respektive gerade.
- 15 Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f(a) < f(b)$ und $f'(a) < 0$. Dann besitzt f in (a, b) einen kritischen Punkt.
- 16 Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $f(a) = 0$. Existiert ein $M \geq 0$, so dass

$$|f'(t)| \leq M |f(t)|, \quad t \in [a, b],$$

so ist $f \equiv 0$.

- 17 Für $a \geq 1$ und $t \geq 1$ gilt $\frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+at} \leq \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}$.
- 18 Sei $f \in C^2(I)$ und c ein innerer Punkt von I . Zeigen sie:
- Ist $f'(c) = 0$ und $f''(c) > 0$, so ist c eine Minimalstelle von f .
 - Ist c eine Minimalstelle von f , so ist $f'(c) = 0$ und $f''(c) \geq 0$.
 - Dies ist falsch, wenn nur $f'(c) = 0$ und $f''(c) \geq 0$ vorausgesetzt wird.
- 19 Unter allen Dreiecken gleichen Flächeninhalts besitzt das gleichseitige Dreieck den kleinsten Umfang.
- 20 a. Ist f an der Stelle a einmal respektive zweimal differenzierbar, so ist

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h},$$

$$f''(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}.$$

b. Folgt umgekehrt aus der Existenz der ersten Grenzwerts die Differenzierbarkeit von f in a ?

- 21 Die Funktion $f: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ sei im Punkt 0 differenzierbar, und $(u_n), (v_n)$ seien zwei gegen 0 konvergierende Folgen in $(-1, 1)$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(u_n) - f(v_n)}{u_n - v_n} = f'(0),$$

wenn eine der drei folgenden Bedingungen erfüllt ist:

- $u_n < 0 < v_n$ für alle n .
 - $0 < u_n < v_n$ für alle n und $v_n/(v_n - u_n)$ ist beschränkt.
 - f' ist stetig auf $(-1, 1)$.
- 22 Für $f \in C^n(I)$ gilt $\partial^n(tf(t)) = t\partial^n f(t) + n\partial^{n-1}f(t)$.
- 23 Die *Legendreschen Polynome* P_n sind definiert durch

$$P_n(t) := \frac{1}{2^n n!} \partial^n (t^2 - 1)^n, \quad n \geq 0.$$

- a. Bestimmen sie P_n für $0 \leq n \leq 5$.
 b. Jedes P_n ist ein Polynom vom Grad n mit genau n Nullstellen in $(-1, 1)$.

- 24 **Verallgemeinerter Satz von Rolle** Die Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei $n - 1$ -mal stetig differenzierbar und auf (a, b) n -mal differenzierbar, wobei $n \geq 1$. Besitzt f Nullstellen $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ in $[a, b]$, so gibt es einen Punkt $c \in (a_0, a_n)$ mit $f^{(n)}(c) = 0$.
 25 Sei I ein offenes Intervall. Eine Funktion $f \in C^2(I)$ heiße *konvex*, wenn $f'' \geq 0$ auf ganz I . Man zeige:
 a. Für alle $a \in I$ gilt

$$f(t) \geq T_a^1 f(t), \quad t \in I.$$

Man sagt, f liegt oberhalb aller seiner Sttzgeraden.

- b. Für alle $u, v \in I$ und $0 \leq \lambda \leq 1$ gilt

$$f(\lambda u + (1 - \lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1 - \lambda)f(v).$$

- c. Für beliebige $u_1, \dots, u_n \in I$ und $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0, 1]$ mit $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$ gilt

$$f(\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n) \leq \lambda_1 f(u_1) + \dots + \lambda_n f(u_n).$$

- 26 **Restglied von Schlömilch** Sei $f \in C^{n+1}(I)$ und $0 \leq p \leq n$. Dann gibt es zu $a, a + h \in I$ ein $\theta \in (0, 1)$, so dass

$$R_a^n f(a + h) = \frac{h^{n+1}}{n!} \frac{(1 - \theta)^{n-p}}{p + 1} f^{(n+1)}(a + \theta h).$$

Für $p = 0$ ist dies das *Restglied von Cauchy*.

- 27 Sei I ein kompaktes Intervall, $f \in C^{n+1}(I)$ und $a \in I$ ein beliebiger Punkt. Gilt für ein Polynom p_n vom Grad n die Abschätzung

$$|f(t) - p_n(t)| \leq M |t - a|^{n+1}, \quad t \in I,$$

so ist $p_n = T_a^n f$.

- 28 Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ und $M_r = \|f^{(r)}\|_{\mathbb{R}} < \infty$ für $r = 0, 1, 2$. Dann gilt

$$M_1^2 \leq 4M_0 M_2.$$

Hinweis: Man stelle mithilfe der Taylorschen Formel f' durch f und f'' dar.

- 29 Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$, und die zweite Ableitung f'' sei gleichmäßig beschränkt. Gilt $\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = 0$, so gilt auch $\lim_{t \rightarrow -\infty} f'(t) = 0$. *Hinweis:* Vorangehende Aufgabe A-28.

- 30 **Abelscher Grenzwertsatz** Konvergiert die reelle Reihe $\sum_{n \geq 0} a_n$, so konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n \geq 0} a_n t^n$ gleichmäßig auf $[0, 1]$ gegen eine stetige Funktion, und es gilt

$$\lim_{t \uparrow 1} \sum_{n \geq 0} a_n t^n = \sum_{n \geq 0} a_n.$$

Hinweis: Verfahre ähnlich wie beim Beweis des Abelschen Konvergenzkriteriums A-6.12.

- 31 Die Funktion $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sei dreimal differenzierbar mit

$$f(-1) = f(0) = f'(0) = 0, \quad f(1) = 1.$$

Dann existiert ein $c \in (-1, 1)$ mit $f'''(c) = 3$. Konstruieren sie auch ein Polynom p dieser Art mit $p''' \equiv 3$.

- 32 Beweisen sie folgende Aussagen über die binomische Reihe

$$(1+t)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} t^n.$$

- a. Für $\alpha \geq 0$ konvergiert die Reihe gleichmäßig auf $[-1, 1]$. *Hinweis:* Aufgabe 6.13.
 b. Für $-1 < \alpha < 0$ konvergiert die Reihe für $t = 1$ und divergiert für $t = -1$.
 c. Für $\alpha \leq -1$ divergiert die Reihe sowohl für $t = 1$ als auch $t = -1$.
- 33 Ist $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $a \in I$ differenzierbar, so ist $\lambda: t \mapsto f(a) + f'(a)(t - a)$ die eindeutig bestimmte bestapproximierende Gerade an f im Punkt a .
- 34 Man zeige, dass eine Potenzreihe und ihre formale, gliedweise Ableitung²⁴ denselben Konvergenzradius haben.
- 35 Man beweise die Leibnizsche Formel¹⁷ per Induktion über den Grad der Ableitung.
- 36 Man beweise Satz 18 per Induktion über den Grad der Ableitung.
- 37 Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bei a differenzierbar, so gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

Aus der Existenz des Grenzwertes links allein folgt jedoch nicht die Differenzierbarkeit von f bei a .

- 38 Sei $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lediglich beschränkt. Dann ist f mit $f(t) = t^2 \varphi(t)$ bei 0 differenzierbar mit $f'(0) = 0$.
- 39 Sind $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $fg = id$, so können nicht beide Funktionen bei 0 verschwinden.
- 40 Sei $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, auf $(0, 1)$ differenzierbar, und es existiere $\lim_{t \rightarrow 0} f'(t) = \lambda$. Dann ist f auch in 0 differenzierbar, und es ist $f'(0) = \lambda$.

9

Spezielle Funktionen

Spezielle Funktionen sind das Salz der Analysis. An erster Stelle stehen dabei die Exponentialfunktion und die trigonometrischen Funktionen, mit deren Hilfe Wachstums- und Schwingungsvorgänge beschrieben werden. Solche Vorgänge werden, entsprechend ihrer physikalischen Natur, durch *Differenzialgleichungen* modelliert.

Das einfachste und zugleich wichtigste *Wachstumsgesetz* ist

$$\varphi' = \varphi.$$

Bezeichnet φ irgendeine positive Messgröße, so bringt diese Gleichung zum Ausdruck, dass die Veränderungsrate φ' proportional zu φ selbst ist – wobei der Proportionalitätsfaktor hier der Einfachheit halber 1 ist.

Das einfachste *Schwingungsgesetz* wird beschrieben durch die Gleichung

$$\varphi'' = -\varphi.$$

Bezeichnet φ die Auslenkung aus einer gewissen Ruhelage, so bringt sie zum Ausdruck, dass die Rückstellkraft, also im Wesentlichen die Beschleunigung φ'' , proportional zur Auslenkung φ wächst und in die entgegengesetzte Richtung weist.

Lösungen des Wachstumsgesetzes werden durch Exponentialfunktionen, Lösungen des Schwingungsgesetzes durch trigonometrische Funktionen beschrieben. Den allgemeinen Existenzsatz für Lösungen von Differenzialgleichungen benötigen wir hierfür nicht, es reicht die Theorie der Potenzreihen.

9.1

Exponentialfunktion

Wir suchen eine Lösung des Wachstumsgesetzes

$$\varphi' = \varphi.$$

Das heißt, wir suchen eine reelle differenzierbare Funktion φ auf einem möglichst großen Intervall I , so dass $\varphi'(t) = \varphi(t)$ für alle $t \in I$ gilt.

Eine solche Lösung kann allerdings nicht eindeutig sein. Denn ist φ eine Lösung, so ist auch $\lambda\varphi$ für jedes reelle λ eine Lösung, die für $\lambda \neq 1$ und $\varphi \neq 0$ von φ verschieden ist. Eindeutig wird eine solche Lösung erst, wenn man zum Beispiel noch einen festen Wert zu einem festen Zeitpunkt vorgibt. Man spricht dann von einem *Anfangswertproblem*.

1 **Existenz- und Eindeigkeitssatz** *Das Anfangswertproblem*

$$\varphi' = \varphi, \quad \varphi(0) = 1$$

besitzt die eindeutige analytische Lösung

$$\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \exp(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!},$$

genannt Exponentialfunktion. \times

⟨⟨⟨ Nehmen wir zunächst an, dass es eine solche Lösung auf einem Intervall I um den Nullpunkt gibt. Dann ist sie notwendigerweise unendlich oft differenzierbar, und $\varphi^{(n)} = \varphi$ für alle $n \geq 1$. Insbesondere ist

$$\varphi^{(n)}(0) = 1, \quad n \geq 0,$$

und die Taylorreihe von φ ist

$$T_0\varphi(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!}.$$

Das Lagrange-Restglied $_{8,22}$ verschwindet auf jedem Intervall $[a, b] \subset I$, denn

$$\|\varphi^{(n)}\|_{[a,b]} \frac{r^n}{n!} = \|\varphi\|_{[a,b]} \frac{r^n}{n!} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Somit wird φ durch seine Taylorreihe dargestellt, und es ist $\varphi(t) = \exp(t)$. Dies beweist die *Eindeutigkeit*. — Andererseits definiert die Exponentialreihe offensichtlich eine Lösung des Anfangswertproblems. Somit ist auch die *Existenz* einer analytischen Lösung nachgewiesen. $\rangle\rangle\rangle$

Genauso beweist man den etwas allgemeineren Fall.

2 **Satz** *Das allgemeine Anfangswertproblem*

$$\varphi' = \varphi, \quad \varphi(0) = \varphi_0$$

besitzt die eindeutige analytische Lösung

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \varphi_0 \exp(t). \quad \times$$

Aus der Reihendarstellung von \exp kann man allerdings kaum auf die wesentlichen Eigenschaften der Exponentialfunktion schließen. Hierfür benötigen wir die

3 **Funktionalgleichung der Exponentialfunktion** *Für reelle s, t gilt*

$$\exp(s + t) = \exp(s) \exp(t). \quad (1)$$

Insbesondere ist $\exp(t) \exp(-t) = 1$ und $\exp(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. \times

⟨⟨⟨ Als Funktion nur von t betrachtet erfüllen beide Seiten von (1) die Differentialgleichung $\varphi' = \varphi$. Zum Beispiel ist

$$(\exp(s) \exp(t))' = \exp(s) \exp(t)' = \exp(s) \exp(t).$$

Außerdem haben sie denselben Wert bei $t = 0$, nämlich $\exp(s)$. Also $\text{}_2$ gilt also (1). Die zweite Gleichung folgt hieraus mit $\exp(t) \exp(-t) = \exp(0) = 1$. Das aber bedeutet, dass \exp keine Nullstelle besitzt. Aus Stetigkeitsgründen ist daher \exp überall positiv. ⟩⟩⟩

4 **Satz** *Die Exponentialfunktion ist streng monoton steigend mit*

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \exp(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \exp(t) = \infty.$$

Insbesondere bildet \exp die reelle Gerade bijektiv auf $(0, \infty)$ ab. \times

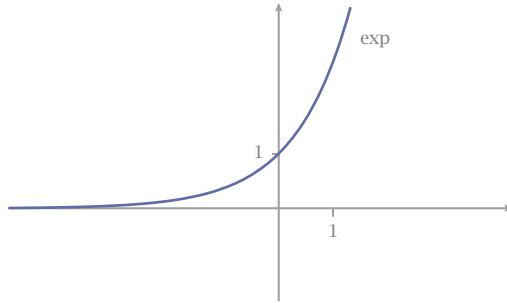
⟨⟨⟨ Aufgrund des letzten Satzes ist \exp' überall positiv und damit \exp streng monoton steigend. Aus der Reihendarstellung folgt

$$\exp(t) \geq 1 + t \rightarrow \infty, \quad 0 \leq t \rightarrow \infty.$$

Wieder mit (1) ist dann

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \exp(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp(t)} = 0. \quad \rangle\rangle\rangle$$

Abb 1
Exponentialfunktion



■ Die Funktion e^t

Bis jetzt ist noch nicht klar, was die Exponentialfunktion mit *Exponentiation* und der *Eulerschen Zahl* e 5.15

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \exp(1)$$

zu tun hat. Das wollen wir jetzt klären.

5 **Lemma** Für $n \in \mathbb{Z}$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\exp(n/m) = e^{n/m} := (e^{1/m})^n. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Für $n \geq 0$ ist aufgrund der Funktionalgleichung

$$\exp(n) = \exp(1 + \dots + 1) = \exp(1) \cdot \exp(1) = e^n,$$

wobei die Pünktchen für insgesamt n Summanden respektive Faktoren stehen. Also ist auch

$$\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = e^{-n}.$$

Für $m \geq 1$ gilt entsprechend $\exp(1/m)^m = \exp(m/m) = e$. Somit ist nach Definition der m -ten Wurzel 7.15

$$\exp(1/m) = e^{1/m}.$$

Die n -te Potenz beider Seiten ergibt die allgemeine Behauptung. ⟩⟩⟩

Aus Stetigkeitsgründen ist es sinnvoll, diese Identität *per definitionem* auf beliebige reelle Exponenten auszudehnen.

Definition Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist

$$e^t := \exp(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!}. \quad \times$$

Damit gilt also $e^{s+t} = e^s e^t$, wie es sich für eine Exponentialfunktion gehört.

9.2

Logarithmusfunktion

Die Exponentialfunktion ist streng monoton steigend, und ihre Ableitung verschwindet nirgends. Sie besitzt somit eine Umkehrfunktion, die ebenfalls streng monoton steigt und überall differenzierbar ist. Dies ist die *Logarithmusfunktion*.

Definiton und Satz Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist der natürliche Logarithmus $\log: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Seine Ableitung ist

$$\log'(t) = \frac{1}{t},$$

und es gilt die Funktionalgleichung

$$\log(uv) = \log(u) + \log(v), \quad u, v > 0. \quad (2)$$

Insbesondere gilt $\log(u^n) = n \log(u)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. \times

⟨⟨⟨⟨ Aufgrund der Regel für die Ableitung einer Umkehrfunktion ist

$$\log'(t) = \frac{1}{\exp'(s)} \Big|_{s=\log(t)} = \frac{1}{\exp(\log(t))} = \frac{1}{t}.$$

Und aufgrund der Funktionalgleichung für \exp ist

$$\begin{aligned} \exp(\log(u) + \log(v)) &= \exp(\log(u)) \exp(\log(v)) \\ &= uv \\ &= \exp(\log(uv)). \end{aligned}$$

Also ist $\log(u) + \log(v) = \log(uv)$. Die letzte Behauptung folgt für $n \geq 1$ mit Induktion, und dann für $n \leq -1$ aus

$$0 = \log(1) = \log(uu^{-1}) = \log(u) + \log(u^{-1}),$$

also $\log(u^{-1}) = -\log(u)$. $\rangle\rangle\rangle\rangle$

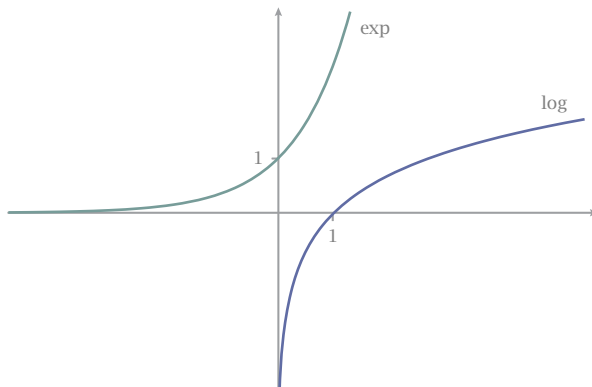
Da $\log'(t) = 1/t$ auf $(0, \infty)$ unendlich oft differenzierbar ist, ist es auch der Logarithmus. Tatsächlich ist er sogar reell analytisch.

6 Satz Die Logarithmusfunktion ist reell analytisch auf $(0, \infty)$ und besitzt die Potenzreihenentwicklung

$$\log(1+t) = \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n} = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} \mp \dots, \quad |t| < 1. \quad \times$$

Abb 2

Logarithmus- und
Exponentialfunktion



⋄⋄⋄ Aufgrund der Funktionalgleichung (2) gilt

$$\log(a+h) = \log\left(a\left(1+\frac{h}{a}\right)\right) = \log(a) + \log\left(1+\frac{h}{a}\right), \quad a > 0.$$

Es genügt daher zu zeigen, dass $\log(1+t)$ um 0 durch seine Taylorreihe dargestellt wird. Dann existiert eine solche Darstellung auch um jeden anderen Punkt $a > 0$.

Sei $g(t) = \log(1+t)$. Dann ist $g'(t) = 1/t$ und

$$g^{(n)}(t) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+t)^n}, \quad n \geq 1,$$

also $g(0) = 0$ und

$$\frac{g^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad n \geq 1.$$

Somit hat die Taylorreihe T_0g die im Satz angegebene Gestalt. Für das Restglied erhalten wir für $0 \leq t \leq 1$ die Abschätzung

$$|R_0^{n-1}g(t)| \leq \|g^{(n)}\|_{[0,1]} \frac{t^n}{n!} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Die Tayloreihe stellt also dort die Logarithmusfunktion dar. Für eine entsprechende Abschätzung für $-1 < t < 0$ benötigen wir allerdings die Darstellung des Restglieds in Integralform, welche wir später nachholen 10.17. ⋄⋄⋄)

Bemerkung Es gilt also insbesondere

$$\log 2 = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm \dots$$

Ferner gilt

$$\log \frac{1}{1-t} = \sum_{n \geq 1} t^n, \quad |t| < 1. \quad \infty$$

■ Allgemeine Potenzen

Für $a > 0$ und rationale Exponenten n/m vereinbaren wir

$$a^{n/m} := (a^{1/m})^n$$

wie zuvor für die e-Funktion. Mit $a = e^{\log a}$ folgt hieraus

$$a^{n/m} = e^{(n/m) \log a}.$$

Daher ist folgende Definition sinnvoll.

Definition und Satz Für $a > 0$ und $t \in \mathbb{R}$ ist

$$a^t := e^{t \log a}.$$

Die Funktion $t \mapsto a^t$ ist stetig differenzierbar mit

$$(a^t)' = a^t \log a$$

und

$$a^{s+t} = a^s a^t, \quad a^{st} = (a^s)^t, \quad (ab)^t = a^t b^t$$

für alle $s, t \in \mathbb{R}$ und $a, b > 0$. ✕

⟨⟨⟨⟨ Alle Eigenschaften folgen unmittelbar aus der Definition, zum Beispiel

$$(a^t)' = (e^{t \log a})' = e^{t \log a} \log a = a^t \log a. \quad \rangle\rangle\rangle\rangle$$

Betrachten wir nicht t , sondern a als Variable, so haben wir mit a^t zugleich auch für jedes reelle α die Potenz

$$t^\alpha := e^{\alpha \log t}, \quad t > 0,$$

erklärt. Für diese gilt

$$(t^\alpha)' = (e^{\alpha \log t})' = e^{\alpha \log t} \frac{\alpha}{t} = \frac{\alpha t^\alpha}{t} = \alpha t^{\alpha-1}.$$

Die Differenziationsregel für ganzzahlige Exponenten ^{8.4} gilt damit ebenso für beliebige reelle Exponenten.

9.3

Sinus und Cosinus

Die Sinus- und Cosinusfunktion erhalten wir als spezielle Lösungen der *Schwingungsgleichung* $\varphi'' = -\varphi$.

7 **Satz und Definition** *Das Anfangswertproblem*

$$\varphi'' = -\varphi, \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1,$$

besitzt die eindeutige analytische, *Sinusfunktion* genannte Lösung

$$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \sin(t) := \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Ebenso besitzt das Anfangswertproblem

$$\varphi'' = -\varphi, \quad \varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 0,$$

die eindeutige analytische, *Cosinusfunktion* genannte Lösung

$$\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \cos(t) := \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!}. \quad \times$$

◀◀◀ Wir betrachten die erste Gleichung und nehmen zunächst an, dass es eine Lösung φ auf einem Intervall I um den Nullpunkt gibt. Dann ist φ notwendigerweise unendlich oft differenzierbar, und

$$\varphi^{(2n)} = (-1)^n \varphi, \quad n \geq 1.$$

Insbesondere gilt dann

$$\varphi^{(2n)}(0) = 0, \quad \varphi^{(2n+1)}(0) = (-1)^n, \quad n \geq 0.$$

Die Tayloreihe von φ bei 0 ist also

$$T_0 \varphi(t) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Das Lagrange-Restglied 8.22 verschwindet auf jedem Intervall $[-r, r] \subset I$ wie bei der Exponentialfunktion. Somit wird φ durch seine Taylorreihe dargestellt, und es ist $\varphi(t) = \sin(t)$. Dies beweist die *Eindeutigkeit*. — Andererseits definiert die Sinusreihe offensichtlich eine Lösung des Anfangswertproblems. Somit ist auch die *Existenz* einer analytischen Lösung nachgewiesen. ▶▶▶

Aufgrund der Linearität der Schwingungsgleichung erhält man die Lösung eines beliebigen Anfangswertproblems als Linearkombination dieser beiden Basislösungen.

Satz *Das Anfangswertproblem*

$$\varphi'' = -\varphi, \quad \varphi(0) = a, \quad \varphi'(0) = b$$

besitzt die eindeutige analytische Lösung

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = a \cos(t) + b \sin(t). \quad \times$$

Im Folgenden geht es darum, die wesentlichen Eigenschaften dieser Funktionen zu bestimmen. Die Potenzreihenentwicklungen sind dabei allerdings wenig hilfreich. So sieht man ihnen nicht im Geringsten an, dass sie periodische Funktionen definieren. Vielmehr stützen wir uns im Folgenden auf die Differenzialgleichung.

8 Satz *Für alle $s, t \in \mathbb{R}$ gilt*

- (i) $\sin(-t) = -\sin(t), \quad \cos(-t) = \cos(t),$
- (ii) $\sin'(t) = \cos(t), \quad \cos'(t) = -\sin(t),$
- (iii) $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1,$
- (iv) $\sin(s+t) = \sin(s)\cos(t) + \cos(s)\sin(t),$
- (v) $\cos(s+t) = \cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t). \quad \times$

⟨⟨⟨ Die ersten zwei Behauptungen folgen unmittelbar aus der Potenzreihendarstellung. Die nächste Behauptung ergibt sich aus

$$(s^2 + c^2)' = 2ss' + 2cc' = 2sc - 2cs = 0,$$

wobei $s = \sin$ und $c = \cos$. Die Funktion $s^2 + c^2$ ist somit konstant und gleich ihrem Wert 1 bei 0. Die letzten beiden Gleichungen ergeben sich aus dem Eindeutigkeitssatz. Denn beide Seiten jeder Gleichung sind Lösungen der Gleichung $\varphi'' = -\varphi$ mit denselben Anfangswerten bei 0. ⟩⟩⟩

Aussage (i) bedeutet, dass der Sinus eine ungerade, der Cosinus eine gerade Funktion ist. Ihre Graphen sind demnach symmetrisch zum Ursprung respektive zur Ordinatenachse.

■ Die Zahl π

Wir kommen nun zur Zahl π , einer der wichtigsten Zahlen der Mathematik. Wir definieren sie als die erste positive Nullstelle der Sinusfunktion.

9 Satz *Es gibt eine eindeutig bestimmte reelle Zahl $\pi > 0$, so dass*

$$\sin(\pi) = 0, \quad \sin(t) > 0, \quad 0 < t < \pi. \quad \times$$

⋄⋄⋄ Sei wieder $s = \sin$ und $c = \cos$. Aus Stetigkeitsgründen gibt es wegen $c(0) = 1$ ein $\delta > 0$, so dass

$$c(t) > 0, \quad 0 \leq t \leq \delta.$$

Wegen $s' = c$ ist s strikt wachsend auf $[0, \delta]$ und damit

$$s(t) > 0, \quad 0 < t \leq \delta.$$

Zu zeigen bleibt damit, dass s überhaupt eine positive Nullstelle besitzt. Dann ist das Infimum aller positiven Nullstellen die kleinste positive Nullstelle von s .

Angenommen, es ist $s > 0$ auf $(0, \infty)$. Dann ist c wegen $c' = -s$ dort streng fallend, und es gibt zwei Möglichkeiten: c hat eine positive Nullstelle, oder eben nicht. Im ersten Fall gibt es auch ein a mit $c(a) < 0$. Dann aber wäre wegen der Monotonie von c

$$s'(t) = c(t) \leq c(a) < 0, \quad t \geq a.$$

Also fällt s ab dem Punkt a mit nicht nachlassender Rate und muss daher doch eine Nullstelle haben. Im anderen Fall aber wäre s wegen $s' = c$ strikt wachsend, und aus

$$c'(t) = -s(t) \leq -s(a) < 0, \quad t \geq a,$$

folgt analog wie zuvor, dass jetzt c eine Nullstelle rechts von a haben müsste.

In beiden Fällen gelangen wir also zu einem Widerspruch. Also hat \sin doch eine positive Nullstelle, und wir sind fertig. ⋄⋄⋄

- 10 **Satz** Die Cosinusfunktion bildet das Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend auf $[-1, 1]$ ab, und es gilt

$$\cos(\pi/2) = 0, \quad \sin(\pi/2) = 1. \quad \times$$

⋄⋄⋄ Sei wieder $s = \sin$ und $c = \cos$. Aufgrund des letzten Satzes ist

$$c'(t) = -s(t) < 0, \quad 0 < t < \pi.$$

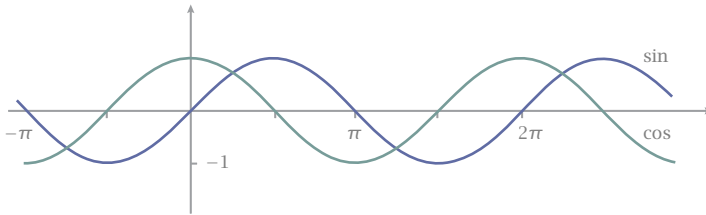
Also ist c streng monoton fallend auf $[0, \pi]$. Aus $c^2(t) + s^2(t) = 1$ für alle t und $s(\pi) = 0$ folgt weiter $c^2(\pi) = 1$. Da aber bereits $c(0) = 1$, muss $c(\pi) = -1$ gelten. Mit den Additionstheoremen des vorletzten Satzes ist dann noch

$$2s(\pi/2)c(\pi/2) = s(\pi) = 0.$$

Wegen $s(\pi/2) > 0$ ist also $c(\pi/2) = 0$ und weiter $s(\pi/2) = 1$. ⋄⋄⋄

Nun können wir feststellen, dass \sin und \cos *periodische Funktionen* sind.

Abb 3 Sinus und Cosinus



- 11 **Satz** Sinus und Cosinus sind antiperiodisch mit der Periode π und daher periodisch mit der Periode 2π . Das heißt, es gilt

$$\sin(t + \pi) = -\sin(t), \quad \sin(t + 2\pi) = \sin(t),$$

und dasselbe für \cos . Außerdem gilt

$$\sin(t + \pi/2) = \cos(t), \quad \cos(t + \pi/2) = -\sin(t). \quad \times$$

«» Dies folgt direkt aus den Additionstheoremen für \sin und \cos $\&$ und deren speziellen Werten bei $\pi/2$ und π . Zum Beispiel ist

$$\sin(t + \pi) = \sin(t) \cos(\pi) + \cos(t) \sin(\pi) = -\sin(t). \quad \gggg$$

Für den Graphen der Sinusfunktion bedeutet dies zum Beispiel:

- Verschiebung um 2π führt ihn in sich selbst über,
- Verschiebung um π und Spiegelung an der x -Achse ebenso,
- Verschiebung um $-\pi/2$ ergibt den Graphen der Cosinusfunktion.

Die Graphen dieser Funktionen sehen daher wie in Abbildung 3 aus.

■ Der Schul-Sinus

Bis jetzt ist noch nicht klar, was dieser Sinus mit dem ›Schul-Sinus‹ zu tun hat. Um dies zu klären, sei

$$\mathbb{S} := \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$$

der Einheitskreis in der euklidischen Ebene, und

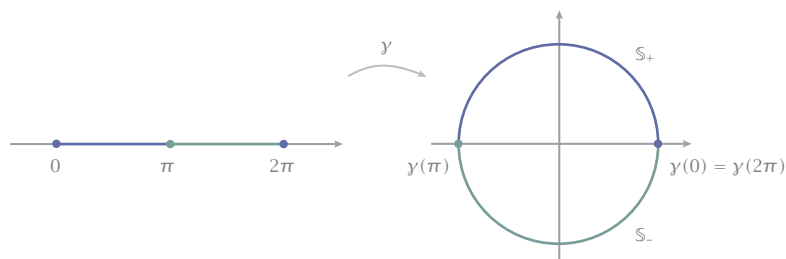
$$\mathbb{S}_+ = \mathbb{S} \cap \{y \geq 0\}, \quad \mathbb{S}_- = \mathbb{S} \cap \{y \leq 0\}$$

dessen obere respektive untere Hälfte.

- 12 **Satz** Die Abbildung

$$\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \gamma(t) = (\cos t, \sin t)$$

bildet $[0, \pi]$ bijektiv auf \mathbb{S}_+ und $[\pi, 2\pi]$ bijektiv auf \mathbb{S}_- ab. \times

Abb 4 Die Abbildung $\gamma: t \mapsto (\cos t, \sin t)$ 

◀◀◀◀ Wegen $s^2(t) + c^2(t) = 1$ und $s(t) \geq 0$ auf $[0, \pi]$ ist klar, dass

$$\gamma: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{S}_+.$$

Da der Cosinus dort streng monoton fällt¹⁰, ist diese Abbildung injektiv. Und sie ist surjektiv, denn zu jedem $x \in [-1, 1]$ existiert ein $t \in [0, \pi]$ mit $c(t) = x$, und dort ist

$$s(t) = \sqrt{1 - c^2(t)} = \sqrt{1 - x^2} = y.$$

Die Behauptung zu $\gamma: [\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{S}_-$ folgt analog. ▶▶▶▶

Aus den beiden letzten Sätzen folgt, dass der Punkt $\gamma(t)$ eine Bahn gegen den Uhrzeigersinn auf dem Einheitskreis \mathbb{S} beschreibt, beginnend beim Punkt $\gamma(0) = (1, 0)$ und periodisch mit Periode 2π . Sein Geschwindigkeitsvektor ist

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t),$$

und seine Absolutgeschwindigkeit ist konstant,

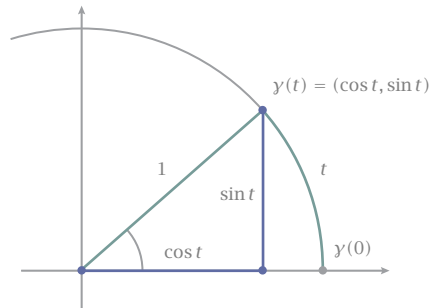
$$\|\dot{\gamma}(t)\|_2 = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 1.$$

Die Länge der Bahn vom Punkt $\gamma(0)$ zum Punkt $\gamma(t)$ ist demnach t — dies wird noch genauer im Kapitel über Kurven erklärt werden. Nimmt man diese Länge t als das *Bogenmaß* des zwischen den Punkten $\gamma(0)$, $(0, 0)$ und $\gamma(t)$ eingeschlossenen Winkels, so erhält man die geometrische Definition des Sinus und Cosinus wie in Abbildung 5:

$$\sin t = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos t = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}},$$

wobei im Einheitskreis die Hypotenuse die Länge 1 hat.

Abb 5
Schul-Sinus und
Schul-Cosinus



9.4 Tangens und Arcusfunktionen

Mit Sinus und Cosinus verbunden sind einige weitere trigonometrische Funktionen. Wir erwähnen noch den Tangens, die übrigen übergehen wir.

Definition und Satz Der *Tangens* ist auf $\{t \in \mathbb{R} : \cos t \neq 0\}$ definiert durch

$$\tan t = \frac{\sin t}{\cos t}.$$

Er ist ungerade, π -periodisch und stetig differenzierbar mit Ableitung

$$\tan' t = 1 + \tan^2 t. \quad \times$$

⟨⟨⟨⟨ Der Quotient einer geraden und einer ungeraden Funktion ist immer ungerade. Ferner ist ₁₁

$$\tan(t + \pi) = \frac{\sin(t + \pi)}{\cos(t + \pi)} = \frac{-\sin t}{-\cos t} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t.$$

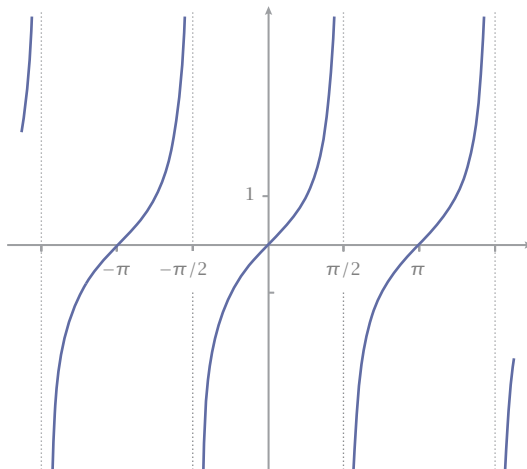
Die stetige Differenzierbarkeit folgt aus der Quotientenregel und

$$\tan' t = \frac{\sin' t \cos t - \sin t \cos' t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = 1 + \tan^2 t,$$

da \cos auf dem Definitionsbereich von \tan nirgends verschwindet. ⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Der Tangens ist natürlich ebenfalls reell analytisch. Wir benötigen seine Taylorreihe jedoch nicht. \rightarrow

Abb 6
Tangens



■ Arcusfunktionen

Die Umkehrfunktion der exp-Funktion ist die log-Funktion. Was sind die Umkehrfunktionen von sin, cos und tan ?

Umkehrbarkeit setzt Injektivität voraus. Eine *periodische* Funktion ist aber geradezu die Antithese einer injektiven Funktion – sie wiederholt sich ja ständig. Um die betreffenden Funktionen ›umkehrbar zu machen‹, müssen wir sie daher auf geeignete Intervalle *einschränken*. Hierfür gibt es zwar unendlich viele Möglichkeiten, doch die Einschränkungen

$$\sin|_{[-\pi/2, \pi/2]}, \quad \cos|_{[0, \pi]}, \quad \tan|_{(-\pi/2, \pi/2)}$$

sind die gebräuchlichsten. Diese Funktionen sind umkehrbar, ihre Umkehrfunktionen werden *Arcussinus*, *Arcuscosinus* und *Arcustangens* genannt und mit arcsin, arccos und arctan bezeichnet.

13 Satz Die Funktionen

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\pi/2, \pi/2], \quad \arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$

sind auf $[-1, 1]$ stetig, auf $(-1, 1)$ stetig differenzierbar, und es gilt

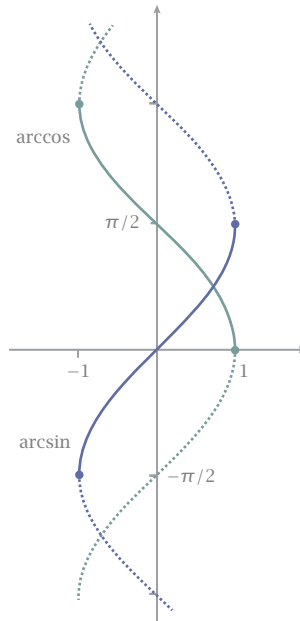
$$\arcsin' t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \arccos' t = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Die Funktion $\arctan : \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ ist stetig differenzierbar mit

$$\arctan' t = \frac{1}{1+t^2}. \quad \times$$

Abb 7

Hauptzweige des
Arcussinus und
Arcuscosinus mit Teilen
zweier Nebenzweige



»»»» Betrachte \arctan . Die Funktion $\tan: (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt eine strikt positive Ableitung und ist surjektiv. Sie ist daher umkehrbar, und die Umkehrfunktion \arctan ist auf \mathbb{R} differenzierbar. Für die Ableitung gilt mit $s = \arctan t$ und der Umkehrregel

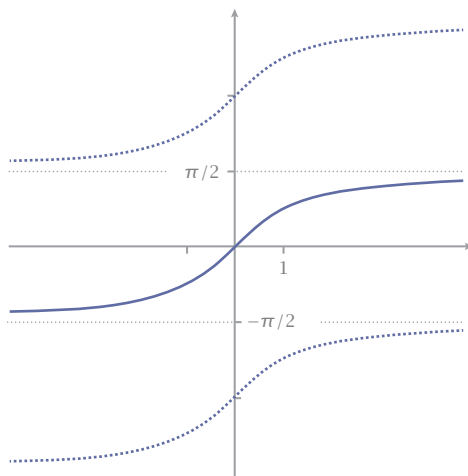
$$\arctan' t = \frac{1}{\tan' s} = \frac{1}{1 + \tan^2 s} = \frac{1}{1 + t^2}.$$

Analog werden die übrigen Behauptungen bewiesen. »»»»

Bemerkung Die hier definierten Arcusfunktionen werden als die *Hauptzweige* der jeweiligen Arcusfunktion bezeichnet. Schränkt man \sin , \cos , \tan auf andere geeignete Intervalle ein, so erhält man entsprechende *Nebenzweige* dieser Funktionen. \rightarrow

Abb 8

Hauptzweig des
Arcustangens mit zwei
Nebenzweigen



9.5

Exp, Sin und Cos im Komplexen

Die Funktionen \sin , \cos und \exp können kaum unterschiedlicher sein: \sin und \cos sind periodisch, beschränkt und besitzen unendlich viele Nullstellen, \exp dagegen ist streng monoton, unbeschränkt, und ohne jede Nullstelle.

Tatsächlich handelt es sich um ein und dieselbe Funktion. Der Zusammenhang wird erkennbar, wenn wir diese auch für *komplexe* Argumente betrachten. Da die Potenzreihenentwicklungen von \exp , \sin und \cos für komplexe Argumente ebensogut wie für reelle Argumente konvergieren, ist folgende Definition gerechtfertigt.

Definition Für $z \in \mathbb{C}$ ist

$$\exp z := \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$$

sowie

$$\sin z := \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z := \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \quad \times$$

Die Theorie der Potenzreihen zeigt, dass diese Funktionen auch im Komplexen beliebig oft differenzierbar sind und man ihre Ableitungen durch gliedweises Differenzieren erhält. Zum Beispiel gilt

$$\exp' z = \sum_{n \geq 1} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = \exp z.$$

Entsprechend gilt $\sin' = \cos$ und $\cos' = -\sin$. Ausmultiplizieren liefert außerdem die Funktionalgleichung

$$\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w).$$

Hieraus folgt beispielsweise, dass die Exponentialfunktion auch im Komplexen *keine Nullstelle* hat. Momentan brauchen wir diese Resultate jedoch nicht. Uns genügt folgende grundlegende Identität.

Eulersche Formel Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(iz) = \cos(z) + i \sin(z). \quad \times$$

⟨⟨⟨ Da die exp-Reihe absolut konvergiert, können wir sie beliebig umordnen 6.6. Mit $i^{2n} = (-1)^n$ für alle $n \geq 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \exp(iz) &= \sum_{n \geq 0} \frac{(iz)^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \cos(z) + i \sin(z). \quad \rangle\rangle\rangle \end{aligned}$$

Setzen wir π ein, so erhalten wir mit $\sin \pi = 0$ und $\cos \pi = -1$ die berühmte

14 Eulersche Gleichung

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

×

Viele Mathematiker halten sie für die schönste Gleichung der Mathematik. Sie verbindet ihre fünf wichtigsten Zahlen,

$$0, \quad 1, \quad i, \quad e, \quad \pi$$

auf gelegentlich mystisch anmutende Weise.

Insbesondere für reelle t ist

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

immer ein Punkt auf dem Einheitskreis $\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, denn

$$|e^{it}| = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Identifizieren die komplexe Zahl e^{it} in \mathbb{C} mit dem Punkt $(\cos t, \sin t)$ in \mathbb{R}^2 , so können wir das Ergebnis von Satz 12 wie folgt formulieren.

15 **Satz** *Die Funktion*

$$\text{cis} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad t \mapsto e^{it}$$

ist 2π -periodisch und bildet $[0, 2\pi)$ bijektiv auf den Einheitskreis \mathbb{S} in der komplexen Ebene ab. \times

›cis‹ ist ein Akronym für ›cos + i sin‹. Diese Abbildung wickelt also die reelle Gerade gleichmäßig mit der Periode 2π so um den Einheitskreis, dass aufgrund der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus ⁸

$$\text{cis}(s + t) = \text{cis}(s) \text{cis}(t),$$

oder kürzer

$$e^{i(s+t)} = e^{is} e^{it}.$$

Es handelt sich also um einen *Endomorphismus* der additiven Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ in die multiplikative Gruppe (\mathbb{S}, \cdot) .

Umgekehrt führt die Funktionalgleichung für e^{it} zu den Additionstheoremen für sin und cos. Einerseits ist aufgrund der Eulerschen Gleichung ¹⁴

$$e^{i(s+t)} = \cos(s + t) + i \sin(s + t).$$

Andererseits ist dies aufgrund der Funktionalgleichung für \exp ³ gleich

$$\begin{aligned} e^{is} e^{it} &= (\cos s + i \sin s)(\cos t + i \sin t) \\ &= (\cos s \cos t - \sin s \sin t) + i (\sin s \cos t + \cos s \sin t). \end{aligned}$$

Ein Vergleich der Real- und Imaginärteile ergibt dann die Additionstheoreme. Ebenso leicht erhält man die *Formeln von Moivre*,

$$(\cos t + i \sin t)^n = e^{int} = \cos nt + i \sin nt,$$

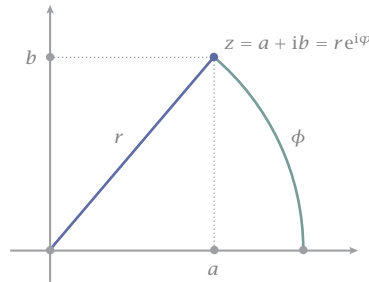
aus denen mit den binomischen Formeln Identitäten für $\sin nt$ und $\cos nt$ folgen. Schließlich gilt

$$\cos t = \Re e^{it} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \Im e^{it} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

Beginnt man das Studium der Speziellen Funktionen mit der exp-Funktion im Komplexen, und insbesondere der cis-Funktion, so werden cos und sin mithilfe dieser Formeln *definiert*. Auf diesem Weg fallen diese Funktionen allerdings gewissermassen ›vom Himmel‹. Der Zugang über die Schwingungsgleichung illustriert dagegen das allgemeine Phänomen, dass viele wichtige Funktionen durch Differenzialgleichungen definiert werden und ihre Eigenschaften sich auch aus diesen ableiten lassen.

Abb 9

Polardarstellung einer komplexen Zahl



■ Polardarstellung komplexer Zahlen

Bisher kennen wir die *kartesische Darstellung* $z = a + ib$ komplexer Zahlen. Die cis-Funktion ermöglicht die ebenso nützliche *Polardarstellung*.

- 16 **Satz** Zu jeder komplexen Zahl $z \neq 0$ existieren genau ein $r > 0$ und ein $\varphi \in [0, 2\pi)$, so dass

$$z = r e^{i\varphi}.$$

Die reelle Zahl φ heißt das *Argument* der komplexen Zahl $z \neq 0$. ✕

⟨⟨⟨ Gibt es eine solche Darstellung, so ist notwendigerweise $r = |z|$, und

$$\frac{z}{r} = \frac{z}{|z|} \in \mathbb{S}$$

bestimmt eindeutig $\varphi \in [0, 2\pi)$.¹⁵ Somit ist die Darstellung eindeutig. Die Existenz einer solchen Darstellung ist offensichtlich, auch für $z = 0$. ⟩⟩⟩

Wegen der Periodizität der cis-Funktion gilt dann auch

$$z = r e^{i\varphi} = r e^{i(\varphi + 2\pi n)}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Das Argument einer komplexen Zahl $\neq 0$ ist also bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π erklärt. Für $z = 0$ dagegen ist das Argument nicht erklärt.

Mithilfe der Polardarstellung finden wir leicht alle Wurzeln einer komplexen Zahl. Zuerst betrachten wir die Wurzeln aus 1.

- 17 **Satz** Es gibt genau n verschiedene komplexe n -te Wurzeln der Zahl 1, die sogenannten n -ten *Einheitswurzeln*

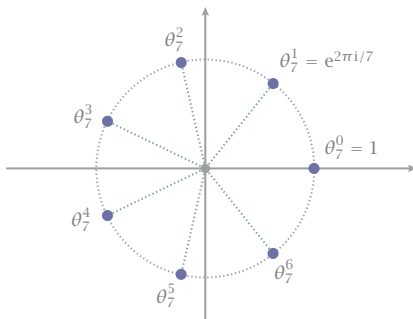
$$\theta_n^k := e^{2\pi i k/n}, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Offenbar ist 0 keine Wurzel aus 1. Somit können wir die gesuchten Wurzeln als $z = r e^{i\varphi}$ ansetzen. Dann gilt

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = 1$$

Abb 10

Die sieben Einheitszwerte



genau dann, wenn $r = 1$ und $n\varphi = 2\pi k$ mit einer ganzen Zahl k , also

$$\varphi = \frac{2\pi}{n} k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Also ist $z = e^{2\pi i k/n} = \theta_n^k$. Dies sind genau n verschiedene komplexe Zahlen¹⁵, zum Beispiel für $k = 0, \dots, n-1$. »»»

Nun noch der allgemeine Fall.

- 18 **Satz** Zu jeder komplexen Zahl $z = re^{i\varphi} \neq 0$ gibt es genau n verschiedene n -te Wurzeln

$$w_k = w_0 \theta_n^k, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

wobei $w_0 = r^{1/n} e^{i\varphi/n}$. ✕

»»» Für w_0 gilt sicher $w_0^n = z$. Ist w eine weitere n -te Wurzel von z , so ist w/w_0 eine n -te Einheitswurzel, also gleich θ_n^k für ein $0 \leq k < n$. Das ergibt die Behauptung. »»»

9.6

Die Hyperbelfunktionen

- 19 **Satz und Definition** Es gibt jeweils genau eine auf der reellen Geraden zweimal differenzierbare Lösung der Differenzialgleichung $\varphi'' = \varphi$ mit

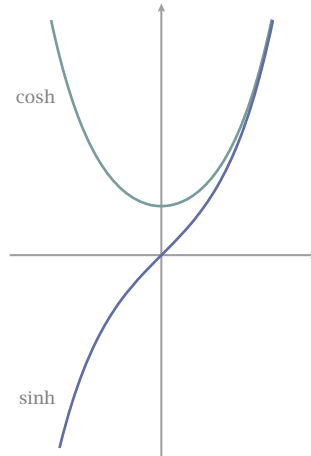
$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 1$$

respektive

$$\varphi(0) = 1, \quad \varphi'(0) = 0.$$

Abb 11

Sinus hyperbolicus und
Cosinus hyperbolicus



Diese werden *Sinus hyperbolicus* und *Cosinus hyperbolicus* genannt und mit \sinh respektive \cosh bezeichnet. Sie sind reell analytisch und besitzen die Darstellung

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \sum_{n \geq 0} \frac{t^{2n}}{(2n)!}. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Man verifiziert sofort, dass die angegebenen Funktionen die Gleichung $\varphi'' = \varphi$ erfüllen und die geforderten Anfangswerte haben. Die Eindeutigkeit dieser Lösungen ergibt sich wie bei der Exponentialfunktion. ⟩⟩⟩

Diese Funktionen sind natürlich ebenso in der ganzen komplexen Ebene erklärt. Wir beschränken uns hier aber auf die reellen Aspekte.

Satz Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt

- (i) $\sinh(-t) = -\sinh t$, $\cosh(-t) = \cosh t$,
- (ii) $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$,
- (iii) $\sinh t = -i \sin(it)$, $\cosh t = \cos(it)$. \times

⟨⟨⟨ Zum Beispiel ist

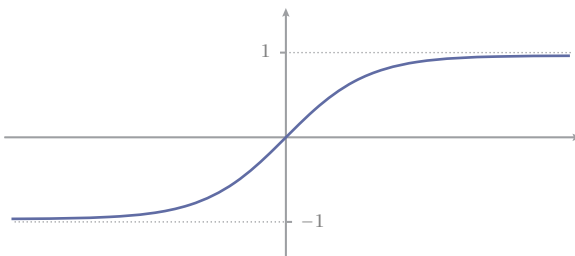
$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = 1,$$

und

$$\sin(it) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \Big|_{z=it} = \frac{e^{-t} - e^t}{2i} = i \sinh t. \quad \rangle\rangle\rangle$$

Abb 12

Tangens hyperbolicus



Die Funktion \sinh steigt streng monoton auf ganz \mathbb{R} und bildet die reelle Gerade bijektiv auf sich selbst ab. Die Funktion \cosh fällt streng monoton auf $(-\infty, 0]$ und wächst streng monoton auf $[0, \infty)$ und bildet beide Intervalle bijektiv auf $[1, \infty)$ ab. Siehe Abbildung 11 für ihre Graphen.

Der Tangens hyperbolicus wird analog zum ›klassischen‹ Tangens gebildet:

Definition und Satz *Der Tangens hyperbolicus ist auf \mathbb{R} definiert durch*

$$\tanh t = \frac{\sinh t}{\cosh t}$$

und bildet die reelle Gerade streng monoton steigend und surjektiv auf $(-1, 1)$ ab. \times

Aus dem Vorangehenden ergibt sich, dass \sinh und \tanh ohne Einschränkung umkehrbar sind, während bei \cosh dessen Einschränkung auf $[0, \infty)$ umkehrbar ist. Deren Umkehrungen werden *Areasinus hyperbolicus*, *Areatangens hyperbolicus* und *Areacosinus hyperbolicus* genannt und mit arsinh , artanh und arcosh , respektive, bezeichnet. Es gilt damit

$$\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\operatorname{arcosh} : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty),$$

$$\operatorname{artanh} : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Da die Hyperbelfunktionen durch die Exponentialfunktion dargestellt werden, können diese Areafunktionen durch die Logarithmusfunktion dargestellt werden.

Satz *Im Innern ihrer Definitionsbereiche gilt*

$$\operatorname{arsinh} t = \log(t + \sqrt{t^2 + 1}), \quad \operatorname{arcosh} t = \log(t + \sqrt{t^2 - 1})$$

sowie

$$\operatorname{artanh} t = \frac{1}{2} \log \frac{1+t}{1-t}. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Ist

$$t = \cosh s = \frac{e^s + e^{-s}}{2}, \quad s \geq 0.$$

so gilt auch $2te^s = e^{2s} + 1$, oder

$$e^{2s} - 2te^s + 1 = 0.$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für e^s mit den beiden Lösung

$$e^s = t \pm \sqrt{t^2 - 1}.$$

Von diesen ist jedoch nur die Pluslösung größer oder gleich 1. Somit ist

$$s = \operatorname{arcosh} t = \log(t + \sqrt{t^2 - 1}).$$

Die beiden übrigen Identitäten erhält man auf analoge Weise. ⟩⟩⟩

Zum Schluss listen wir noch sämtliche Ableitungen auf. Die einzelnen Rechnungen sind eine einfache Übung.

Satz *Im Innern der jeweiligen Definitionsbereiche gilt*

$$\begin{aligned} \sinh' t &= \cosh t, & \operatorname{arsinh}' t &= \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}}, \\ \cosh' t &= \sinh t, & \operatorname{arcosh}' t &= \frac{1}{\sqrt{t^2 - 1}}, \\ \tanh' t &= 1 - \tanh^2 t, & \operatorname{artanh}' t &= \frac{1}{1 - t^2}. \quad \times \end{aligned}$$

Aufgaben

- 1 Welche Aussagen sind wahr?
 - a. Die Funktionalgleichung $\varphi(u + v) = \varphi(u)\varphi(v)$ hat unendliche viele Lösungen.
 - b. $\sin it$ mit $t \in \mathbb{R}$ hat keine Nullstellen.
 - c. e^{it} mit $t \in \mathbb{R}$ ist streng monoton.
 - d. Die komplexe Sinusfunktion ist unbeschränkt.
 - e. arctan ist die Umkehrfunktion von \sin/\cos .
 - f. $\operatorname{arcosh} 0 = 1$.

- 2 Die differenzierbare Funktion $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ genüge der Funktionalgleichung

$$\varphi(u + v) = \varphi(u)\varphi(v),$$

sei aber nicht identisch 0. Dann gilt:

- a. $\varphi(0) = 1$.
 - b. $\varphi(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
 - c. $\varphi'(t) = a\varphi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $a = \varphi'(0)$.
 - d. $\varphi(t) = \exp(at)$.
- 3 Man bearbeite die vorangehende Aufgabe 2 nur mit der Annahme, dass φ stetig ist.
 - 4 Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} t^n e^{-t} = 0$.
 - 5 Es gilt

$$\log \left(\sum_{n \geq 0} t^n \right) = \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n}.$$

- 6 a. Für $0 \leq t \leq 1/2$ gilt

$$\frac{1}{1-t} \leq e^{2t}.$$

- b. Sind p_1, \dots, p_m alle Primzahlen, die eine der Zahlen $1, 2, \dots, n$ teilen, so gilt

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq \prod_{l=1}^m \left(1 - \frac{1}{p_l}\right)^{-1} \leq \exp \left(\sum_{l=1}^m \frac{2}{p_l} \right).$$

- c. Schließen sie hieraus, dass die Summe der Kehrwerte aller Primzahlen divergiert:

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} = \infty.$$

- 7 Die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

ist unendlich oft differenzierbar, und es gilt $f^{(r)}(0) = 0$ für alle $r \geq 0$.

- 8 Die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} \frac{e^t - 1}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

ist reell analytisch. Dasselbe gilt für $g = 1/f$ in einer hinreichend kleinen Umgebung des Nullpunkts.

9 Zur Funktion

$$f: t \mapsto \log \frac{1+t}{1-t}$$

bestimme man $T_0^{2n+1}f$.

- 10 Die Umkehrfunktion zu $t \mapsto a^t$ mit $a > 0$, $a \neq 1$, ist der *Logarithmus zur Basis a* , bezeichnet mit \log_a . Hierfür gilt

$$\log_a t = \frac{\log t}{\log a} = \log_a e \cdot \log t.$$

- 11 Zeigen sie, dass für jedes $\alpha > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\alpha} \log x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \log x = 0.$$

Zeigen sie damit auch, dass $\lim_{x \searrow 0} x^x = 1$.

- 12 a. Sei $\omega > 0$. Wie lautet die Lösung des Anfangswertproblems

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi, \quad \varphi(0) = \varphi_0, \quad \dot{\varphi}(0) = \psi_0 ?$$

b. Zeigen sie, dass der Raum aller Lösungen von $\ddot{\varphi} = -\omega^2 \varphi$ mit $\omega \in \mathbb{R}$ einen zweidimensionalen reellen Vektorraum bildet.

c. Wie sieht dieser Raum für $\omega = 0$ aus?

- 13 a. Es gilt $\frac{t}{1+t} \leq \log(1+t) \leq t$, $t \geq 0$.

b. Für $a > 0$ folgt hieraus $\exp\left(\frac{a}{1+a/n}\right) \leq \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \leq \exp(a)$, $n \geq 1$.

c. Also gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \exp(a)$.

- 14 Man beweise die folgenden Ungleichungen für $n \geq 1$.

$$a. \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{t^k}{k!} < e^t \quad \text{für } t \neq 0 \quad b. \sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k-1} \frac{t^k}{k} > \log(1+t) \quad \text{für } t > -1, t \neq 0$$

- 15 Man beweise die folgenden Identitäten. a. $2 \cos^2 u/2 = 1 + \cos u$

$$b. 2 \sin^2 u/2 = 1 - \cos u \quad c. \tan u/2 = (1 - \cos u) / \sin u = \sin u / (1 + \cos u)$$

- 16 Seien a und c reelle Konstanten und

$$f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad f(t) = \left(1 + \frac{a}{t}\right)^{t+c}.$$

a. Für alle c gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = e^a$.

b. Für $0 < a \leq 2c$ ist f streng monoton fallend auf $(0, \infty)$.

c. Für $c \leq 0 < a$ ist f streng monoton steigend auf $(0, \infty)$.

d. Für $0 < 2c < a$ existiert ein $T > 0$, so dass f auf $(0, T)$ streng monoton fällt und auf (T, ∞) streng monoton wächst. Dabei ist $T < ac/(a - 2c)$.

Hinweis: Man betrachte auch für a die zweite Ableitung von $\varphi = \log f$.

17 Es gilt

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin(n + 1/2)x}{2 \sin x/2}.$$

Hinweis: Stellen sie die linke Seite als geometrische Summe dar.

18 *Tschebyschew-Polynome* Für jedes $n \geq 1$ gibt es ein Polynom T_n vom Grad n , so dass

$$T_n(\cos z) = \cos nz.$$

Dieses Polynom heißt *Tschebyschew-Polynom* vom Grad n .

a. Es gilt die Rekursionsformel

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t), \quad n \geq 1,$$

mit $T_0 = 1$ und $T_1(t) = t$. Man berechne damit T_2, \dots, T_5 .

b. In $[-1, 1]$ hat T_n die Nullstellen

$$x_k = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi, \quad k = 1, \dots, n,$$

und die Extremalstellen $c_k = \cos k\pi/n$, $k = 0, 1, \dots, n$.

19 *Additionstheorem für die Tangensfunktion* Es gilt

$$\tan(u + v) = \frac{\tan u + \tan v}{1 - \tan u \tan v},$$

wann immer die Ausdrücke $\tan x$, $\tan y$ und $\tan(x + y)$ erklärt sind.

20 Untersuchen sie, für welche $\alpha, \beta \geq 0$ die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} t^\alpha \sin t^{-\beta}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

a. stetig b. differenzierbar c. stetig differenzierbar im Punkt $t = 0$ ist.

21 Für $|t| < 1$ gilt

$$\arctan t = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1}, \quad |t| < 1..$$

22 Für kein $a \in \mathbb{R}$ ist $(\cos na)_{n \geq 0}$ eine Nullfolge.

23 a. Für alle $t \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|\sin nt| \leq n |\sin t|.$$

b. Es gibt $t \in \mathbb{R}$ und $a > 0$, so dass

$$|\sin at| > a |\sin t|.$$

24 Für eine stetige Funktion $f: [-1, 1]$ gilt

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{hf(t)}{h^2 + t^2} dt = f(0).$$

Hinweis: Betrachte zuerst den Fall einer konstanten Funktion.

- 25 Für $t \in \mathbb{R}$ und $n \geq 1$ sei $z_n = e^{it/n}$ und

$$L_n(t) = \sum_{k=1}^n |z_n^k - z_n^{k-1}|$$

die Länge des Polygonzugs $z_n^0, z_n^1, \dots, z_n^n$ auf dem Einheitskreis. Dann gilt

$$L_n(t) = 2n |\sin(t/2n)| \rightarrow |t|, \quad n \rightarrow \infty.$$

Die Länge des Polygonzugs konvergiert also gegen die Länge des Kreisbogens vom Punkt 1 bis zum Punkt e^{it} .

- 26 Für $t \in \mathbb{R}$ bestimme man

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t), \quad f_n(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\cos(n! \pi t))^{2k}.$$

Hinweis: Man unterscheide $t \in \mathbb{Q}$ und $t \notin \mathbb{Q}$.

- 27 Für $t \in \mathbb{R}$ betrachte man auf dem Einheitskreis \mathbb{S} die Folge

$$a_n(t) = e^{2\pi i n t}, \quad n \geq 0.$$

- a. Diese Folge hat für $t \in \mathbb{Q}$ nur endlich viele Häufungswerte.
b. Andernfalls ist sie dicht auf \mathbb{S} .

- 28 Man zeige, dass $\sin 1$ und $\cos 1$ irrational sind.

- 29 Für eine Lösung φ der Differenzialgleichung $\ddot{\varphi} = \varphi$ mit $\varphi(0) = 0$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$ gilt

$$a. (\dot{\varphi}^2 - \varphi^2)' = 0 \quad b. \dot{\varphi}^2 = \varphi^2 \quad c. \varphi \equiv 0.$$

- 30 *Additionstheoreme für Hyperbelfunktionen* Es gilt

$$\sinh(u + v) = \sinh u \cosh v + \cosh u \sinh v,$$

$$\cosh(u + v) = \cosh u \cosh v + \sinh u \sinh v.$$

- 31 Es gilt

$$\sinh u + \sinh v = 2 \sinh \frac{u+v}{2} \cosh \frac{u-v}{2}.$$

- 32 Für $z = x + iy$ mit reellen x, y gilt

$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y,$$

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y.$$

- 33 Für $|t| < 1$ gilt

$$\arcsin t = \sum_{n \geq 0} \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} \frac{t^{2n+1}}{2n+1}.$$

- 34 Bestimmen sie a. $\sin i$ b. $\cos i$ c. i^i d. $\sqrt[5]{i}$

10

Integration

Der Flächeninhalt eines Rechtecks bestimmt sich aus dem Produkt der Längen seiner beiden Seiten. Doch wie bestimmt sich der Inhalt krummlinig begrenzter Flächen, beispielsweise einer Ellipse? Oder die Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion und der Abszisse, wenn diese Funktion nicht konstant ist? Die naheliegende, bereits von Archimedes angewandte Idee ist, solche Flächen durch Rechteckflächen – deren Inhalt wir ja kennen – zu approximieren, die immer kleiner werden. Wenn alles gut geht, konvergiert die Summe ihrer Flächeninhalte gegen einen Wert, den wir als den Inhalt dieser krummlinig begrenzten Fläche *definieren* können.

Wir werden daher das Integral zuerst für sogenannte *Treppenfunktionen* definieren. Diese sind stückweise konstant, und ihr Integral ist nichts anderes als die mit Vorzeichen gewichtete Summe der zugehörigen Rechteckflächen. Dieses Integral repräsentiert somit unseren vertrauten Flächenbegriff.

Anschließend geht es darum, dieses Integral auf Funktionen auszudehnen, die sich durch Treppenfunktionen approximieren lassen. Diese Approximation kann allerdings auf unterschiedliche Weisen erfolgen, und führt zu unterschiedlichen Integralbegriffen wie dem Cauchy-, Riemann- oder Lebesgueintegral.

Wir beschränken uns hier auf das Cauchyintegral, auch Regelintegral genannt, da es für unsere unmittelbaren Zwecke ausreicht und am leichtesten zu definieren ist. Hier werden solche Funktionen betrachtet, die sich *gleichmäßig* durch Treppenfunktionen approximieren lassen.

10.1

Treppenfunktionen

Definition Eine *Zerlegung* Z eines Intervalls $[a, b]$ ist ein Tupel (t_0, \dots, t_n) reeller Zahlen mit

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b.$$

Eine Funktion $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn es eine derartige Zerlegung von $[a, b]$ und reelle Zahlen c_1, \dots, c_n gibt, so dass

$$\varphi \mid (t_{k-1}, t_k) = c_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Der Raum aller Treppenfunktionen auf $[a, b]$ wird mit T_a^b bezeichnet. \times

Eine Treppenfunktion nimmt natürlich auch an den Teilungspunkten selbst gewisse Werte an. Diese gehen aber nicht in das zu definierende Integral ein und erhalten deshalb auch keine eigene Bezeichnung. Wir schreiben daher kurz

$$\varphi = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{(t_{k-1}, t_k)}.$$

Da eine Treppenfunktion nur endlich viele verschiedene Werte annimmt, ist sie auch beschränkt. Es gilt also

$$\|\varphi\|_{[a, b]} = \sup_{t \in [a, b]} |\varphi(t)| < \infty$$

und damit $T_a^b \subset B_a^b := B([a, b])$.

Verschiedene Treppenfunktionen φ und ψ basieren im Allgemeinen auf verschiedenen Zerlegungen. Fasst man aber die Teilungspunkte ihrer Zerlegungen zu einer gemeinsamen *Verfeinerung* zusammen, so lassen sich beide über derselben Zerlegung definieren. Dann ist auch $\lambda\varphi + \mu\psi$ wieder eine Treppenfunktion. Somit bilden alle Treppenfunktionen auf $[a, b]$ einen Vektorraum.

Notiz Der Raum T_a^b aller Treppenfunktionen auf dem Intervall $[a, b]$ ist ein reeller Untervektorraum von B_a^b . \times

Abb 1

Eine Treppenfunktion

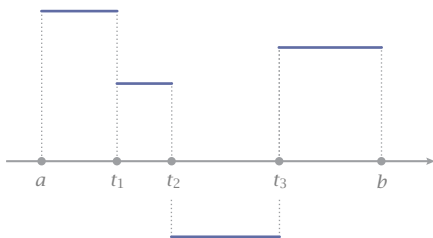
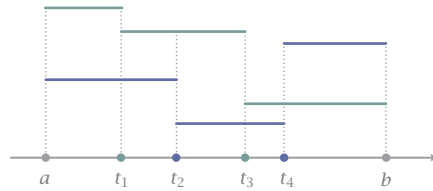


Abb 2

Gemeinsame Zerlegung
zweier Treppenfunktionen



Die folgende Definition des Integrals einer Treppenfunktion verallgemeinert unsere Vorstellung des Flächeninhalts eines Rechtecks.

1 **Definition und Notiz** Das *Integral* einer Treppenfunktion

$$\varphi = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{(t_{k-1}, t_k)}, \quad a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b,$$

ist definiert als

$$J_a^b(\varphi) := \sum_{k=1}^n c_k (t_k - t_{k-1}).$$

Dieses Integral hängt nicht von der Darstellung von φ ab. \times

⟨⟨⟨ Seien φ_1 und φ_2 zwei Treppenfunktionen in T_a^b , die als Funktionen auf $[a, b]$ identisch sind, also in jedem Punkt denselben Wert annehmen, aber auf verschiedenen Zerlegungen Z_1 respektive Z_2 beruhen. Aus diesen Zerlegungen können wir immer eine gemeinsame Verfeinerung Z bilden. Der Übergang von Z_1 oder Z_2 zu Z besteht darin, in endlich vielen Schritten jeweils einem Teilintervall (t_{k-1}, t_k) einen weiteren Teilungspunkt $t_l \in (t_{k-1}, t_k)$ hinzuzufügen. Bei einem solchen Schritt wird in der Summe J_a^b der Term $c_k(t_k - t_{k-1})$ ersetzt durch

$$c_k(t_k - t_l) + c_k(t_l - t_{k-1}).$$

Dies ändert die Integralsumme offensichtlich nicht. Somit hängt $J_a^b(\varphi)$ nur von der Treppenfunktion selbst und nicht von ihrer Darstellung ab. $\rangle\rangle\rangle$

▶ A. Die charakteristische Funktion χ_J eines beliebigen Intervalls $J \subset [a, b]$ ist eine Treppenfunktion, und $J_a^b(\chi_J) = |J|$ ist die Länge dieses Intervalls.

B. Die Signum- und die Gaußklammerfunktion, eingeschränkt auf jedes beliebige Intervall $[a, b]$, sind Treppenfunktionen.

C. Eine Funktion φ_0 , die nur an endlich vielen Punkten in $[a, b]$ nicht verschwindet, ist eine Treppenfunktion, und es ist $J_a^b(\varphi_0) = 0$. \blacktriangleleft

Das Integral ordnet jeder Treppenfunktion in T_a^b eine reelle Zahl zu. Wir erhalten also eine Funktion

$$J_a^b: T_a^b \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto J_a^b(\varphi).$$

Da es sich um eine *reellwertige* Funktion auf einem *Funktionsraum* handelt, spricht man in klassischer Terminologie auch von einem *Funktional*.

2 **Satz** Das Funktional $J_a^b: T_a^b \rightarrow \mathbb{R}$ hat folgende Eigenschaften:

(i) *Linearität:*

$$J_a^b(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda J_a^b(\varphi) + \mu J_a^b(\psi).$$

(ii) *Monotonie:*

$$\varphi \leq \psi \Rightarrow J_a^b(\varphi) \leq J_a^b(\psi).$$

(iii) *Normierung:*

$$\varphi = \chi_{[a,b]} \Rightarrow J_a^b(\varphi) = b - a.$$

(iv) *Lipschitzstetigkeit:*

$$|J_a^b(\varphi) - J_a^b(\psi)| \leq (b - a) \|\varphi - \psi\|_{[a,b]}. \quad \times$$

««« Wählen wir für φ und ψ eine Darstellung mit einer gemeinsamen Zerlegung von $[a, b]$, so folgen die ersten zwei Behauptungen aus der Definition J_a^b von J_a^b . Ebenfalls aus der Definition folgt

$$\begin{aligned} |J_a^b(\varphi)| &= \left| \sum_{1 \leq k \leq n} c_k (t_k - t_{k-1}) \right| \\ &\leq \sum_{1 \leq k \leq n} |c_k| (t_k - t_{k-1}) \\ &\leq \max\{|c_1|, \dots, |c_n|\} \sum_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1}) \leq \|\varphi\|_{[a,b]} (b - a). \end{aligned}$$

Wegen der Linearität von J_a^b folgt damit auch

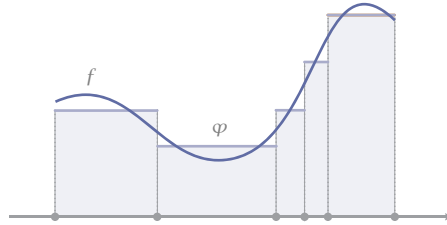
$$|J_a^b(\varphi) - J_a^b(\psi)| = |J_a^b(\varphi - \psi)| \leq \|\varphi - \psi\|_{[a,b]} (b - a).$$

Die dritte Behauptung ist offensichtlich. »»»

Für Treppenfunktionen haben wir somit ein Integral definiert, das unseren Vorstellungen entspricht. Dies sind aber noch nicht die Funktionen, die uns eigentlich interessieren - sie sind ja nicht einmal stetig. Dies erreichen wir jedoch mit einer *stetigen Fortsetzung* des Funktionals J_a^b auf den Raum aller Funktionen, die sich durch Treppenfunktionen gleichmäßig approximieren lassen.

Abb 3

Regelfunktion f und
approximierende
Treppenfunktion φ



10.2

Das Cauchyintegral

Definition und Notiz Eine Funktion $f \in B_a^b$ ist eine *Regelfunktion* genau dann, wenn es eine Folge (φ_n) von Treppenfunktionen in T_a^b gibt, die gleichmäßig auf $[a, b]$ gegen f konvergiert. Das Cauchyintegral einer solcher Funktion ist definiert als

$$J_a^b(f) := \lim J_a^b(\varphi_n)$$

und ist unabhängig von der Wahl der approximierenden Folge (φ_n) . Der Raum aller Regelfunktionen auf $[a, b]$ wird mit R_a^b bezeichnet. \times

⟨⟨⟨ Angenommen, es gilt $\varphi_n \Rightarrow f$ und $\psi_n \Rightarrow f$ für zwei Folgen in T_a^b . Dann folgt $\|\varphi_n - \psi_n\|_{[a, b]} \rightarrow 0$ und damit $_2$

$$|J_a^b(\varphi_n) - J_a^b(\psi_n)| = |J_a^b(\varphi_n - \psi_n)| \leq (b - a) \|\varphi_n - \psi_n\|_{[a, b]} \rightarrow 0.$$

Also ist $\lim J_a^b(\varphi_n) = \lim J_a^b(\psi_n)$, und das Integral ist wohldefiniert. $\rangle\rangle\rangle$

Dies ist im Moment eine sehr abstrakte Definition. Weder wissen wir, welche Funktionen genau Regelfunktionen sind, noch wie deren Integral zu bestimmen ist. Diese beiden Probleme werden wir in den nächsten Abschnitten behandeln.

Bemerkung Funktionalanalytisch betrachtet sind wir folgendermaßen vorgegangen. Der Raum T_a^b aller Treppenfunktionen auf $[a, b]$ ist ein reeller, aber *nicht abgeschlossener* Unterraum des Banachraumes B_a^b aller beschränkten Funktionen auf $[a, b]$, versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_{[a, b]}$. Sein Abschluss ist der Raum aller Grenzwerte von Cauchyfolgen in T_a^b , also der Raum R_a^b :

$$T_a^b \subset (T_a^b)^- = R_a^b \subset B_a^b.$$

Das Funktional $J_a^b: T_a^b \rightarrow \mathbb{R}$ ist lipschitzstetig bezüglich dieser Norm und besitzt daher eine *eindeutige lipschitzstetige Fortsetzung* auf den Abschluss,

$$\bar{J}_a^b: R_a^b \rightarrow \mathbb{R}.$$

Der Einfachheit halber bezeichnen wir diese wieder mit demselben Symbol. \rightarrow

Wir notieren nun einige elementare Eigenschaften dieses Integrals auf R_a^b .

3 Permanenzsatz *Das Cauchyintegral*

$$J_a^b : R_a^b \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto J_a^b(f)$$

hat dieselben Eigenschaften wie seine Einschränkung auf T_a^b , also Linearität, Monotonie, Normierung und Lipschitzstetigkeit. \times

⟨⟨⟨ Linearität: Sind f und g gleichmäßige Limites der Treppenfunktionen φ_n respektive ψ_n , so ist $\lambda f + \mu g$ der gleichmäßige Limes der Treppenfunktionen $\lambda\varphi_n + \mu\psi_n$. Dann gilt aufgrund der Linearität auf T_a^b und der üblichen Grenzwertsätze

$$\begin{aligned} J_a^b(\lambda f + \mu g) &= \lim J_a^b(\lambda\varphi_n + \mu\psi_n) \\ &= \lim (\lambda J_a^b(\varphi_n) + \mu J_a^b(\psi_n)) \\ &= \lambda \lim J_a^b(\varphi_n) + \mu \lim J_a^b(\psi_n) \\ &= \lambda J_a^b(f) + \mu J_a^b(g). \end{aligned}$$

Monotonie: Wegen der Linearität des Funktional genügt es zu zeigen, dass für $f \in R_a^b$ mit $f \geq 0$ auch $J_a^b(f) \geq 0$. Nun, gilt $\varphi_n \Rightarrow f$ und $f \geq 0$, so gilt auch

$$\varphi_n^+ \Rightarrow f, \quad \varphi_n^+ := \max(\varphi_n, 0) \geq 0.$$

Die φ_n^+ sind ebenfalls Treppenfunktionen, und es ist $J_a^b(\varphi_n^+) \geq 0$. Also ist auch

$$J_a^b(f) = \lim J_a^b(\varphi_n^+) \geq 0.$$

Normierung: Hier gibt es nichts Neues zu zeigen.

Lipschitzstetigkeit: Das ist eine Übungsaufgabe A-2. $\rangle\rangle\rangle$

4 Intervalladditivität *Sei $c \in (a, b)$. Dann gilt*

$$f \in R_a^b \Leftrightarrow f|_{[a,c]} \in R_a^c \wedge f|_{[c,b]} \in R_c^b,$$

und in diesem Fall gilt weiter $J_a^b(f) = J_a^c(f) + J_c^b(f)$. \times

⟨⟨⟨ Für Treppenfunktionen φ ist offensichtlich, dass

$$\varphi \in T_a^b \Leftrightarrow \varphi|_{[a,c]} \in T_a^c \wedge \varphi|_{[c,b]} \in T_c^b$$

sowie $J_a^b(\varphi) = J_a^c(\varphi) + J_c^b(\varphi)$. Gegebenenfalls fügt man c als weiteren Teilungspunkt hinzu. Entsprechendes gilt dann auch für die gleichmäßigen Limites von Treppenfunktionen. Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} J_a^b(f) &= \lim J_a^b(\varphi_n) \\ &= \lim (J_a^c(\varphi_n) + J_c^b(\varphi_n)) \\ &= \lim J_a^c(\varphi_n) + \lim J_c^b(\varphi_n) = J_a^c(f) + J_c^b(f). \quad \rangle\rangle\rangle \end{aligned}$$

5 **Zusatz** Mit den Vereinbarungen $J_a^a(f) = 0$ und $J_b^a(f) = -J_a^b(f)$ für $a < b$ gilt

$$J_b^b(f) = J_a^c(f) + J_c^b(f)$$

für beliebige a, b, c und jede Regelfunktion f , die auf dem kleinsten, alle Integrationsgrenzen umfassenden Intervall definiert ist. \times

⟨⟨⟨ Dies ist eine Routinerechnung. Für $c < a < b$ haben wir beispielsweise 4

$$J_c^b(f) = J_c^a(f) + J_a^b(f).$$

Mit der Zusatzvereinbarung 5 ist dies äquivalent mit

$$J_a^b(f) = J_c^b(f) - J_c^a(f) = J_a^c(f) + J_c^b(f). \quad \rangle\rangle\rangle$$

Beginnend mit dem nächsten Satz verwenden wir die auf Leibniz zurückgehende Schreibweise für Integrale, die aus einem stilisierten S für *Summe* besteht.

Definition Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *integrierbar* genau dann, wenn sie eine Regelfunktion auf $[a, b]$ ist, also zu R_a^b gehört. Ihr *Integral* mit den *Integrationsgrenzen* a und b ist dann

$$\int_a^b f := J_a^b(f). \quad \times$$

Die Intervalladditivität schreibt sich damit

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

für jede Funktion f , die auf einem alle Integrationsgrenzen umfassenden Intervall integrierbar ist.

Dreiecksungleichung Ist f auf $[a, b]$ integrierbar, so auch $|f|$, und es gilt

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|. \quad \times$$

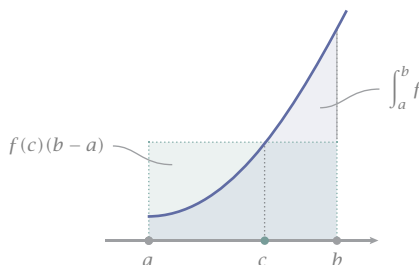
⟨⟨⟨ Ist f gleichmäßiger Limes der Treppenfunktionen φ_n , so ist $|f|$ gleichmäßiger Limes der Funktionen $|\varphi_n|$. Da diese ebenfalls Treppenfunktionen sind, ist auch $|f|$ eine Regelfunktion. Für jede Treppenfunktion φ_n gilt nun offensichtlich mit der entsprechenden Zerlegung

$$\left| \int_a^b \varphi_n \right| = \left| \sum_{k=1}^n c_k (t_k - t_{k-1}) \right| \leq \sum_{k=1}^n |c_k| (t_k - t_{k-1}) = \int_a^b |\varphi_n|.$$

Gehen wir zum Limes $n \rightarrow \infty$ über 5,9, so erhalten wir die Behauptung. $\rangle\rangle\rangle$

Abb 4

Zum Mittelwertsatz
der Integralrechnung
mit $p \equiv 1$



- 6 **Mittelwertsatz der Integralrechnung** Seien f und p integrierbar auf $[a, b]$, außerdem sei f stetig und p nichtnegativ. Dann existiert ein $c \in [a, b]$, so dass

$$\int_a^b fp = f(c) \int_a^b p. \quad \times$$

⟨⟨⟨⟨ Aufgrund ihrer Stetigkeit nimmt die Funktion f auf $[a, b]$ ihr Minimum m und Maximum M an $_{7.11}$. Es gilt dann $m \leq f \leq M$ auf $[a, b]$. Wegen $p \geq 0$ gilt dann auch $mp \leq fp \leq Mp$ auf $[a, b]$. Mit der Monotonie des Integrals $_{2,3}$ folgt

$$m \int_a^b p \leq \int_a^b fp \leq M \int_a^b p.$$

Ist nun $\int_a^b p = 0$, so ist folglich auch $\int_a^b fp = 0$, und die Behauptung gilt für jedes $c \in [a, b]$. Andernfalls ist $\int_a^b p > 0$ und damit

$$m \leq w := \left(\int_a^b p \right)^{-1} \int_a^b fp \leq M.$$

Nach dem Zwischenwertsatz von Bolzano gibt es ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = w$. Das ergibt die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩

- 7 **Vertauschungssatz** Eine Cauchyfolge (f_n) in R_a^b ist konvergent, und es gilt

$$\int_a^b \lim f_n = \lim \int_a^b f_n. \quad \times$$

⟨⟨⟨⟨ Dies folgt aus der Definition des Regelintegrals. Eine Cauchyfolge (f_n) in R_a^b bezüglich $\|\cdot\|_{[a,b]}$ ist auch eine Cauchyfolge im umgebenden Banachraum B_a^b und hat dort einen Grenzwert $f \in B_a^b$. Da aber R_a^b in B_a^b abgeschlossen ist, ist auch $f \in R_a^b$, also integrierbar. Die Vertauschbarkeit von Grenzwert und Integral ist dann gerade die Stetigkeit des Funktional J_a^b auf R_a^b . ⟩⟩⟩⟩

10.3 Regelfunktionen

Im Folgenden charakterisieren wir Regelfunktionen durch eine leicht zu verifizierende Eigenschaft. Zunächst eine einfache Feststellung.

- 8 **Satz** *Eine Regelfunktion besitzt höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.* \times

⟨⟨⟨ Sei f der gleichmäßige Limes einer Folge (φ_n) in T_a^b . Jede Treppenfunktion φ_n hat nur endlich viele Unstetigkeitsstellen. Die Menge S der Unstetigkeitsstellen aller φ_n zusammengenommen ist somit abzählbar $A_{3.18}$. Auf $[a, b] \setminus S$ ist nun jedes φ_n stetig. Als gleichmäßiger Limes der φ_n ist dann f auf dieser Menge ebenfalls stetig 7.33 . $\rangle\rangle\rangle$

- 9 **Satz** *Eine Regelfunktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt in jedem Punkt von $[a, b]$ einseitige Grenzwerte. Das heißt, auf $[a, b]$ existieren alle rechtsseitigen Grenzwerte f_+ , und auf $(a, b]$ alle linksseitigen Grenzwerte f_- von f .* \times

⟨⟨⟨ Wir betrachten den linksseitigen Grenzwert einer Funktion $f \in R_a^b$ in einem Punkt $c \in (a, b)$. Sei dazu (t_n) eine Folge in $[a, b]$ mit $t_n \nearrow c$, und sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Treppenfunktion $\varphi \in T_a^b$ mit

$$\|f - \varphi\|_{[a, b]} < \varepsilon/2. \quad (1)$$

Diese ist auf einem kleinen, *offenen* Intervall $(c - \delta, c)$ links von c konstant, unabhängig davon, ob c ein Teilungspunkt der zugehörigen Zerlegung ist oder nicht. Wegen $t_n \nearrow c$ gibt es dazu ein $N \geq 1$, so dass

$$\varphi(t_n) = \varphi(t_m), \quad n, m \geq N.$$

Mit (1) gilt dann auch

$$|f(t_n) - f(t_m)| \leq |f(t_n) - \varphi(t_n)| + |\varphi(t_m) - f(t_m)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Da es für jedes ε ein solches N gibt, bildet $f(t_n)$ eine Cauchyfolge. Ihr Grenzwert hängt nicht von (t_n) ab, denn ist (t'_n) eine weitere solche Folge, so zeigt dasselbe Argument, dass $(f(t_n) - f(t'_n))$ eine Nullfolge bildet. Also existiert der linksseitige Grenzwert

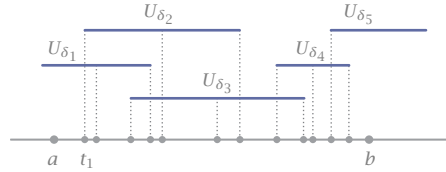
$$f_-(c) = \lim_{t \nearrow c} f(t).$$

Für rechtsseitige Grenzwerte $f_+(c) = \lim_{t \searrow c} f(t)$ argumentiert man analog. $\rangle\rangle\rangle$

Von diesem Satz gilt auch die Umkehrung. Für den Beweis benötigen wir noch den folgenden Spezialfall eines Satzes über kompakte Mengen.

Abb 5

Endliche Teilüberdeckung
und Zerlegung Z



- 10 **Überdeckungslemma von Heine-Borel** Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine beliebige *offene Überdeckung* von $[a, b]$, das heißt, eine Familie offener Intervalle mit

$$[a, b] \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda.$$

Dann enthält diese Familie auch eine *endliche Teilüberdeckung* von $[a, b]$. Das heißt, es gibt endlich viele Intervalle $I_{\lambda_1}, \dots, I_{\lambda_m}$, so dass

$$[a, b] \subset \bigcup_{1 \leq i \leq m} I_{\lambda_i}.$$

Man sagt, »jede offene Überdeckung von $[a, b]$ enthält eine endliche Teilüberdeckung«. ✕

⟨⟨⟨ Angenommen, es gibt *keine* solche endliche Teilüberdeckung. Wir zeigen, dass es dann eine fallende Folge von abgeschlossenen Intervallen

$$[a, b] \supseteq J_0 \supseteq J_1 \supseteq J_2 \supseteq \dots$$

mit Länge

$$|J_n| = 2^{-n} |J_0|, \quad n \geq 0,$$

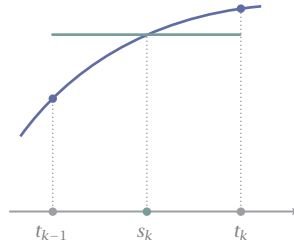
gibt, die alle ebenfalls keine endliche Teilüberdeckung besitzen. Für $J_0 = [a, b]$ entspricht dies der Annahme. Besitzt nun J_n für ein $n \geq 0$ keine endliche Teilüberdeckung, so besitzt mindestens eine der beiden abgeschlossenen Hälften von J_n ebenfalls keine. Wählen wir diese als J_{n+1} , so erhalten wir das nächste abgeschlossene Intervall dieser Folge.

Wir erhalten somit eine *Intervallschachtelung*, deren Durchschnitt genau einen Punkt $p \in [a, b]$ enthält. Dieser ist in wenigstens einem Intervall I_{λ_p} der Überdeckung enthalten. Da I_{λ_p} aber offen ist, enthält es alle Intervalle J_n mit n hinreichend groß. Das heißt, diese Intervalle J_n werden sogar von nur *einem* Intervall I_{λ_p} der Familie überdeckt. Dies ist ein Widerspruch zur Konstruktion der J_n . ⟩⟩⟩

- 11 **Satz** Die Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ besitze in jedem Punkt von $[a, b]$ einseitige Grenzwerte. Dann ist f der gleichmäßige Limes von Treppenfunktionen. ✕

Abb 6

Approximation durch
konstante Funktion
auf $[t_{k-1}, t_k]$



««« Sei $\varepsilon > 0$. Zu jedem Punkt $c \in [a, b]$ existiert aufgrund der Existenz der einseitigen Grenzwerte eine Umgebung $U_\delta(c)$, so dass

$$|f(u) - f(v)| < \varepsilon$$

für alle $u, v \in U_\delta(c) \cap [a, b]$, die beide auf *derselben Seite* von c liegen. Dabei hängt δ vom Punkt c ab.

Die Familie $(U_\delta(c))_{c \in [a, b]}$ bildet eine offene Überdeckung von $[a, b]$. Nach dem Lemma von Heine-Borel₁₀ besitzt diese eine endliche Teilüberdeckung. Es gibt also endlich viele $U_{\delta_i}(c_i)$, so dass

$$[a, b] \subset U_{\delta_1}(c_1) \cup \dots \cup U_{\delta_m}(c_m).$$

Sei $Z = (t_0, \dots, t_n)$ diejenige Zerlegung von $[a, b]$, die aus allen Mittel- und Endpunkten dieser m Intervalle bestehen, die innerhalb von $[a, b]$ liegen, zuzüglich der Punkte a und b selbst. Jedes Zerlegungsintervall (t_{k-1}, t_k) gehört dann entweder zu einer linken oder einer rechten Hälfte eines dieser m Intervalle, da deren Mittelpunkte zu den Teilungspunkten gehören. Somit gilt auf jedem Teilungsintervall

$$|f(u) - f(v)| < \varepsilon, \quad u, v \in (t_{k-1}, t_k). \quad (2)$$

Dazu definieren wir nun $\varphi \in T_a^b$ durch

$$\varphi|_{(t_{k-1}, t_k)} = f(s_k), \quad s_k = \frac{t_{k-1} + t_k}{2}.$$

Außerdem setzen wir der Vollständigkeit halber $\varphi(t_k) = f(t_k)$ für $0 \leq k \leq n$. Dann gilt wegen (2) auf jedem Zerlegungsintervall

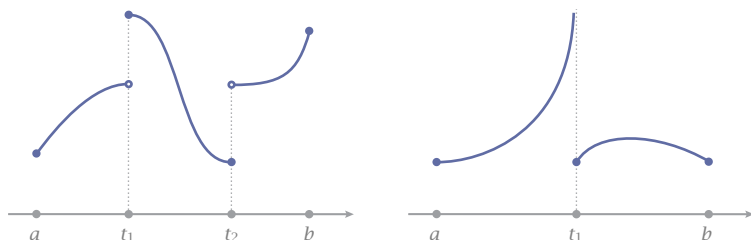
$$\|f - \varphi\|_{[t_{k-1}, t_k]} \leq \|f - f(s_k)\|_{(t_{k-1}, t_k)} < \varepsilon.$$

Also gilt insgesamt

$$\|\varphi - f\|_{[a, b]} < \varepsilon.$$

Da für jedes $\varepsilon > 0$ ein solches φ existiert, ist die Behauptung bewiesen. »»»

Abb 7 Stückweise, und nicht stückweise stetige Funktion



Zusammengefasst $9, 11$ erhalten wir folgende

- 12 **Charakterisierung der Regelfunktionen** Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine Regelfunktion genau dann, wenn sie in jedem Punkt des Intervalls $[a, b]$ einseitige Grenzwerte besitzt. Insbesondere sind stetige, stückweise stetige und monotone Funktionen Regelfunktionen und damit integrierbar. \times

Dabei heißt eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ *stückweise stetig*, wenn es eine Zerlegung (t_0, \dots, t_n) von $[a, b]$ gibt, so dass die Einschränkungen $f|_{(t_{k-1}, t_k)}$ für $1 \leq k \leq n$ stetig sind und einseitige Grenzwerte in allen Endpunkten besitzen.

- ▶ A. Die Gaußklammer und die Signumfunktion sind auf jedem abgeschlossenen Intervall integrierbar. Sie sind ja auch Treppenfunktionen.
- B. Die Thomaefunktion ist integrierbar $A-8$.
- C. Die Dirichletfunktion δ ist auf *keinem* nichttrivialen Intervall integrierbar $A-9$. \blacktriangleleft

10.4

Der Hauptsatz

Wir wissen nun, welche Funktionen auf abgeschlossenen Intervallen im Sinne von Cauchy integrierbar sind. Jetzt geht es darum, eine brauchbare Methode zu finden, um deren Integrale auch zu bestimmen.

Die Idee ist, das Integral einer stetigen Funktion f als Funktion der rechten Intervallgrenze zu betrachten. Auf diese Weise erhält man eine differenzierbare Funktion F mit $F' = f$. Man spricht von einer *Stammfunktion* von f . Auswertung einer solchen Stammfunktion f zwischen den Grenzen von $[a, b]$ ergibt dann das Integral von f über $[a, b]$.

Um diese Idee auch für Regelfunktionen umzusetzen, benötigen wir noch die *rechts-* und *linksseitige Ableitung* einer Funktion f ,

$$f'_+(t) := \lim_{h \searrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

und

$$f'_-(t) := \lim_{h \nearrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h},$$

wenn diese Grenzwerte existieren. Offensichtlich ist f in einem inneren Punkt c differenzierbar genau dann, wenn dort links- und rechtsseitige Ableitung existieren und übereinstimmen. In diesem Fall ist $f'_-(t) = f'(t) = f'_+(t)$.

Definition Eine Funktion $F: I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* einer Regelfunktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, wenn F in jedem Punkt von I einseitige Ableitungen besitzt und

$$F'_+ = f_+, \quad F'_- = f_-$$

auf I gilt. In einem Randpunkt von I wird dabei nur der jeweilige einseitige Grenzwert betrachtet. \times

Besonders übersichtlich ist der Fall einer stetigen Funktionen.

Notiz Ist $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist jede Stammfunktion F von f stetig differenzierbar, und es gilt $F' = f$ auf ganz I . \times

⟨⟨⟨ Ist F Stammfunktion der stetigen Funktion f , so ist überall

$$F'_- = f_- = f = f_+ = F'_+.$$

Also ist $F'_- = F'_+$ auf I , somit F differenzierbar, und $F' = f$. Außerdem folgt hieraus die Stetigkeit von F' . $\rangle\rangle\rangle$

Stammfunktionen sind *nicht eindeutig*. Ist F eine Stammfunktion, so ist es auch $F+c$ für jede reelle Konstante c . Auf einem *Intervall* ist dies aber die einzig mögliche Unbestimmtheit:

- 13 **Lemma** Auf einem Intervall unterscheiden sich verschiedene Stammfunktionen einer Regelfunktion nur durch eine additive Konstante. \times

⟨⟨⟨ Seien G und H zwei Stammfunktionen derselben Regelfunktion f . Dann besitzt auch $G - H$ in jedem Punkt einseitige Ableitungen – das ist eine leichte Übung –, und es gilt

$$(G - H)'_+ = G'_+ - H'_+ = f_+ - f_+ = 0.$$

Entsprechendes gilt für linksseitige Grenzwerte. Also ist $G - H$ sogar differenzierbar mit $(G - H)' = 0$. Aufgrund des Monotoniesatzes 8.12 ist $G - H$ auf dem Intervall I konstant. \gggg

Die fundamentale Beobachtung ist nun, dass man eine Stammfunktion einer Regelfunktion f erhält, indem man das Integral über f als *Funktion der oberen Grenze* betrachtet.

- 14 **Stammfunktionsatz** Sei f auf I integrierbar und $c \in I$ ein beliebiger Punkt. Dann definiert

$$\Phi(t) := \int_c^t f, \quad t \in I,$$

eine Stammfunktion $\Phi: I \rightarrow \mathbb{R}$ von f . Diese ist außerdem Lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $L = \|f\|_I$. \times

\llll Ist f auf I integrierbar, so auch auf jedem Teilintervall von I . Die Funktion Φ ist daher für jedes $t \in I$ definiert. Aus der Additivität des Integrals 5 ergibt sich

$$\Phi(v) - \Phi(u) = \int_c^v f - \int_c^u f = \int_u^v f, \quad u, v \in I.$$

Für $u < v$ folgt hieraus mit der Dreiecksungleichung

$$|\Phi(v) - \Phi(u)| = \left| \int_u^v f \right| \leq \int_u^v |f| \leq \|f\|_I (v - u).$$

Also ist Φ L -Lipschitz mit $L = \|f\|_I$. Mit $u = t$ und $v = t + h$ ist ferner

$$\frac{\Phi(t+h) - \Phi(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f.$$

Aufgrund des Riemannschen Lemmas 15 - das wir gleich beweisen - besitzt der Ausdruck auf der rechten Seite die einseitigen Grenzwerte $f_+(t)$ respektive $f_-(t)$. Also besitzt Φ die entsprechenden einseitigen Ableitungen, und es gilt

$$\Phi'_\pm(t) = f_\pm(t).$$

Somit ist Φ eine Stammfunktion von f . \gggg

- 15 **Riemannsches Lemma** Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar, so gilt

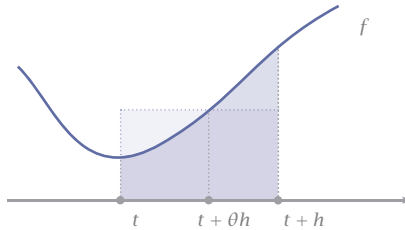
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f = f_+(t), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{t-h}^t f = f_-(t)$$

für jeden Punkt $t \in [a, b)$ respektive $t \in (a, b]$. Ist f im Punkt t stetig, so gilt insbesondere

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f = f(t). \quad \times$$

Abb 8

Zum Hauptsatz



«»» Wir betrachten den rechtsseitigen Limes in einem Punkt $t \in [a, b)$. Sei $h > 0$ so klein, dass auch $t + h \in [a, b]$. Dann ist

$$f_+(t) = f_+(t) \cdot \frac{1}{h} \int_t^{t+h} 1 = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f_+(t).$$

Also gilt, für $h > 0$,

$$\left| f_+(t) - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f \right| = \left| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (f_+(t) - f) \right| \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |f_+(t) - f|.$$

Aufgrund der Definition des rechtsseitigen Grenzwerts existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so, dass

$$|f_+(t) - f(s)| < \varepsilon, \quad t < s < t + \delta.$$

Zusammen mit der vorangehenden Ungleichung erhalten wir also

$$\left| f_+(t) - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f \right| \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \varepsilon = \varepsilon, \quad 0 < h < \delta.$$

Da zu jedem $\varepsilon > 0$ ein solches $\delta > 0$ existiert, folgt

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f = f_+(t).$$

Für $t \in (a, b]$ und $h > 0$ mit $t - h \in [a, b]$ argumentiert man entsprechend.

Ist f im Punkt t sogar stetig, so ist $f_-(t) = f(t) = f_+(t)$, und die beiden Grenzwerte im Riemannschem Lemma₁₅ sind gleich $f(t)$. »»»

Bemerkung Ist f auf I stetig, so gilt überall

$$\Phi'(t) = \left(\int_c^t f \right)' = f(t), \quad t \in I.$$

Dies folgt übrigens auch aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung₆, denn für stetiges f gilt ja

$$\frac{\Phi(t+h) - \Phi(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f = f(t + \theta h) \rightarrow f(t), \quad h \rightarrow 0.$$

In diesem Sinne sind Differenzieren und Integrieren *inverse Operationen*. –

► A. Die Signumfunktion ist auf jedem kompakten Intervall integrierbar, und eine Stammfunktion ist

$$\Phi(t) = \int_0^t \operatorname{sgn} = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ -t, & t < 0 \end{cases} = |t|.$$

Offensichtlich gilt $\Phi'(t) = |t|' = \operatorname{sgn} t$ für $t \neq 0$ sowie $\Phi'_{\pm}(0) = \operatorname{sgn}_{\pm}(0) = \pm 1$.

B. Eine Stammfunktion der Betragsfunktion ist

$$\int_0^t |s| = \frac{1}{2}t|t| = \frac{1}{2}t^2 \operatorname{sgn}(t). \quad \blacktriangleleft$$

Der vorangehende Satz eröffnet nun die Möglichkeit, Integrale mithilfe von Stammfunktionen zu berechnen.

16 Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung Ist f auf $[a, b]$ integrierbar und F eine beliebige Stammfunktion von f , so gilt

$$\int_a^b f = F \Big|_a^b := F(b) - F(a). \quad \times$$

⟨⟨⟨ Für die Funktion Φ des Stammfunktionensatzes ₁₄ gilt aufgrund ihrer Definition

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_c^b f - \int_c^a f = \int_a^b f.$$

Jede andere Stammfunktion F von f unterscheidet sich von Φ aber nur durch eine additive Konstante ₁₃, die sich in der Differenz aufhebt. Also ist auch

$$F(b) - F(a) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b f. \quad \gggg$$

► A. Mit der Stammfunktion $|\cdot|$ für die Signumfunktion gilt

$$\int_a^b \operatorname{sgn} = |t| \Big|_a^b = |b| - |a|.$$

B. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} \Big|_1^4 = 2. \quad \blacktriangleleft$

Ist f stetig differenzierbar, so ist f selbst Stammfunktion seiner Ableitung f' . Es gilt also folgender Spezialfall.

Korollar Ist f auf $[a, b]$ stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_a^b f' = f \Big|_a^b. \quad \times$$

Wegen des Hauptsatzes wird eine Stammfunktion auch als *unbestimmtes Integral* bezeichnet, während das Integral mit Intervallgrenzen *bestimmtes Integral* genannt wird. Genauer gilt folgende Sprachregelung.

Definition Das *unbestimmte Integral* einer stetigen Funktion f auf einem Intervall ist die Familie

$$\int f := \{F + c : c \in \mathbb{R}\}$$

aller Stammfunktionen von f auf diesem Intervall. \times

Gewöhnlich schreibt man dafür einfach $F + c$. In Formelsammlungen wird auch die Konstante c oft weggelassen. Unbestimmte Integral erhält man beispielsweise, indem man Ableitungsformeln »rückwärts« liest.

- ▶ A. $\int e^t = e^t + c, \quad \int \frac{1}{t} = \log t + c.$
 B. $\int \cos t = \sin t + c, \quad \int \sin t = -\cos t + c.$
 C. $\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + c, \quad \int \frac{1}{1+t^2} = \arctan t. \quad \blacktriangleleft$

10.5

Integrationsregeln

Die Bestimmung von Integralen beruht auf der Bestimmung von Stammfunktionen, also einer Lösung der Gleichung $F' = f$ zu gegebenem f . Jede Differenzierungsregel liefert damit eine Integrationsregel, indem man sie »rückwärts« liest. Insbesondere folgen aus der Produkt- und Kettenregel die Regeln der partiellen Integration und der Substitution, die wir nun formulieren. Der Einfachheit halber gehen wir von stetig differenzierbaren respektive stetigen Funktionen aus.

Von nun an verwenden wir die klassische *Leibnizsche Integralnotation*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(t) dt,$$

die vor allem bei der Substitutionsregel zweckmäßig ist. Dabei ist die Integrationsvariable, ähnlich wie ein Summationsindex, frei wählbar. Es ist also

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du = \int_a^b f(x) dx.$$

Partielle Integration Sind f und g auf $[a, b]$ stetig differenzierbar, so gilt

$$\int_a^b f'(t)g(t) dt = f(t)g(t) \Big|_a^b - \int_a^b f(t)g'(t) dt. \quad \times$$

Entsprechend gilt für unbestimmte Integrale

$$\int f'(t)g(t) dt = f(t)g(t) - \int f(t)g'(t) dt.$$

Eine äquivalente Formulierung ist

$$\int f(t)g(t) dt = F(t)g(t) - \int F(t)g'(t) dt$$

mit einer Stammfunktion F von f . Eine additive Konstante müssen wir hier nicht notieren, weil auf beiden Seiten ein unbestimmtes Integral steht.

⟨⟨⟨ Die Integrale existieren, da die Integranden nach Voraussetzung stetig sind. Also gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(t)g(t) dt + \int_a^b f(t)g'(t) dt \\ = \int_a^b (f'g + fg')(t) dt = \int_a^b (fg)'(t) dt = (fg) \Big|_a^b. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. ⟩⟩⟩

▶ A.

$$\int te^t dt = te^t - \int e^t dt = te^t - e^t + c = (t-1)e^t + c,$$

also beispielsweise

$$\int_0^1 te^t dt = (t-1)e^t \Big|_0^1 = 1.$$

B.

$$\int \cos^2 t dt = \int \cos t \cos t dt = \sin t \cos t + \int \sin^2 t dt.$$

Mit $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ folgt hieraus

$$\int \cos^2 t dt = \sin t \cos t + t - \int \cos^2 t dt.$$

Also ist

$$2 \int \cos^2 t dt = t + \sin t \cos t + c.$$

So erhält man zum Beispiel

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{t + \sin t \cos t}{2} \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

c. Gelegentlich hilft es, einen neutralen Faktor 1 ›aufzuleiten‹. Für den Logarithmus erhält man auf diese Weise

$$\begin{aligned}\int \log t \, dt &= \int 1 \cdot \log t \, dt \\ &= t \log t - \int t \log' t \, dt = t \log t - \int 1 \, dt = t \log t - t + c.\end{aligned}$$

Zum Beispiel ist

$$\int_1^e \log t \, dt = (t \log t - t) \Big|_1^e = 1. \quad \blacktriangleleft$$

Mit wiederholter partieller Integration erhält man auch die Taylorsche Formel mit Restglied in Integralform. Wegen der Wichtigkeit dieses Beispiels formulieren wir das Ergebnis als Satz.

17 Satz von Taylor mit Integralrest Für $f \in C^{n+1}(I)$ und $a, a+h \in I$ gilt

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k + R_a^n f(h)$$

mit dem Integralrest

$$R_a^n f(h) = \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(a+th) \, dt. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Der Beweis erfolgt durch Induktion. Ist f stetig differenzierbar, so gilt aufgrund des Hauptsatzes

$$\begin{aligned}f(a+h) - f(a) &= f(a+th) \Big|_0^1 \\ &= \int_0^1 (f(a+th))' \, dt = h \int_0^1 f'(a+th) \, dt.\end{aligned}$$

Der letzte Term ist gerade $R_a^0 f(h)$, und wir erhalten damit die Behauptung für $n=0$. Gilt die Formel nun für ein $n \geq 0$, so ergibt partielle Integration

$$\begin{aligned}&\frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-t)^n f^{(n+1)}(a+th) \, dt \\ &= - \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} (1-t)^{n+1} f^{(n+1)}(a+th) \Big|_0^1 \\ &\quad + \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^1 (1-t)^{n+1} f^{(n+2)}(a+th) \, dt \\ &= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} h^{n+1} + R_a^{n+1} f(h). \quad \gggg\end{aligned}$$

- 18 **Substitutionsregel** Ist φ stetig differenzierbar auf $I = [a, b]$ und f stetig auf dem Bildintervall $\varphi(I)$, so gilt

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt \quad (3)$$

für das bestimmte Integral, und

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = F \circ \varphi + c$$

für das unbestimmte Integral mit einer beliebigen Stammfunktion F von f . \times

⟨⟨⟨ Für eine beliebige Stammfunktion F von f gilt

$$(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi)\varphi' = (f \circ \varphi)\varphi'.$$

Daraus folgt die Gleichung für das unbestimmte Integral. Für das bestimmte Integral erhält man

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) dx &= \int_a^b (F \circ \varphi)'(x) dx \\ &= F \circ \varphi \Big|_a^b = F \Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt \end{aligned}$$

mit zweimaliger Anwendung des Hauptsatzes. \gggg

Die einfache Anwendung der Substitutionsregel besteht darin zu erkennen, dass der Integrand aus der Anwendung der Kettenregel hervorgegangen ist und das Integral daher von der Form

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) dx.$$

In diesem Fall setzt man direkt $\varphi(x) = t$. Gemäß der Substitutionsregel ist dann dt durch $\varphi'(x) dx$ zu ersetzen. *Formal* ergibt sich dies mit der Leibnizschen Notation, indem man

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d\varphi(x)}{dx} = \varphi'(x)$$

schreibt und zu $dt = \varphi'(x) dx$ ›auflöst‹¹. Jetzt muss man nur noch die Integrationsgrenzen mit φ abbilden, und man erhält die rechte Seite der Substitutionsregel.

¹ Eine rigorose Begründung dieser Schreibweise liefert der Formalismus der Differenzialformen, siehe ›Noch mehr Analysis‹.

► A. Im unbestimmten Integral

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

ist der Zähler bis auf einen Faktor die Ableitung der Funktion unter der Wurzel. Wir können daher die Substitutionsregel mit $t = \varphi(x) = 1 + x^2$ anwenden:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{\varphi(x)}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Mit der Stammfunktion von $\sqrt{\cdot}$ 8.2 erhalten wir

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{t} + c = \sqrt{1+x^2} + c.$$

Für das bestimmte Integral gilt dann

$$\int_a^b \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx = \sqrt{1+x^2} \Big|_a^b.$$

B. Im Integral $\int \frac{\log u}{u} du$ ist $\frac{1}{u}$ die Ableitung von $\log u$. Mit $t = \log u$ erhalten wir

$$\int \frac{\log u}{u} du = \int t dt = \frac{1}{2} t^2 + c = \frac{1}{2} \log^2 u + c.$$

C. Es ist

$$\int \tan \varphi d\varphi = \int \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} d\varphi = -\log(\cos \varphi) + c. \quad \blacktriangleleft$$

Die ›nicht so einfache‹ Anwendung der Substitutionsregel besteht darin, in einem Integral

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$$

die gegebene Integrationsvariable t so durch eine neue zu ersetzen, dass sich der Integrand vereinfacht. Die richtige Substitution kann schnell zum Ziel führen, die falsche jedoch vollends ins Dickicht. Hier wird das Integrieren teilweise zu einer Kunst, die Erfahrung und Übung erfordert. Man setzt also $t = \varphi(x)$ mit einer – hoffentlich geeigneten – stetig differenzierbaren Funktion φ . Genau wie zuvor ist dann dt durch $\varphi'(x) dx$ zu ersetzen. Schließlich ist noch ein Intervall $[a, b]$ zu finden, dass von φ auf $[\alpha, \beta]$ abgebildet wird. Das heißt, es ist

$$\varphi(a) = \alpha, \quad \varphi(b) = \beta$$

zu lösen. Dann gilt wieder

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx.$$

Nun braucht es nur noch etwas Übung

► A. Im Integral

$$\int t\sqrt{1+t} dt$$

schreiben wir versuchsweise $1+t = x^2$. Es ist dann $dt = 2x dx$, und wir erhalten

$$\int t\sqrt{1+t} dt = \int (x^2 - 1)x \cdot 2x dx = 2 \int (x^4 - x^2) dx.$$

Dies ist nun elementar lösbar. Im bestimmten Integral sind die Integrationsgrenzen noch entsprechend zu transformieren, eine Grenze t_* geht dabei über in $\sqrt{1+t_*}$. Man erhält

$$\int_a^b t\sqrt{1+t} dt = 2 \int_{\sqrt{1+a}}^{\sqrt{1+b}} (x^4 - x^2) ds = \frac{2}{15} (3x^5 - 5x^3) \Big|_{\sqrt{1+a}}^{\sqrt{1+b}}.$$

B. Betrachte

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt.$$

Mit der Substitution $t = \sin x$ und damit $dt = \cos x dx$ wird

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 x} \cos x dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2},$$

also die Fläche des halben Einheitskreises. Analog erhält man

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} du = \pi.$$

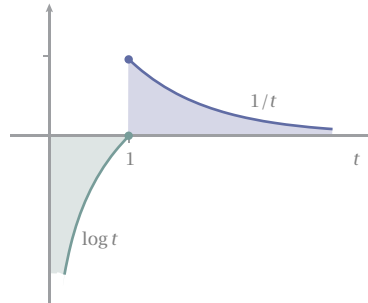
Dies kann man allerdings auch direkt rechnen:

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Big|_{-1}^1 = \pi.$$

C. Typische Anwendungen der Substitutionsregel sind die Translation und die Streckung der Integrationsvariablen. Mit $\lambda > 0$ und $n \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t+c) dt &= \int_{a+c}^{b+c} f(x) dx, & x &= t+c, \\ \int_a^b f(\lambda t) dt &= \lambda^{-1} \int_{\lambda a}^{\lambda b} f(x) dx, & x &= \lambda t, \\ \int_a^b f(t^n) t^{n-1} dt &= n^{-1} \int_{a^n}^{b^n} f(x) dx, & x &= t^n. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Abb 9

Zwei uneigentliche
Integrale

10.6 Uneigentliche Integrale

Das Integral haben wir bisher für Funktionen definiert, die auf einem *kompakten* Intervall definiert und dort integrierbar und damit auch *beschränkt* sind. Dies reicht auf die Dauer jedoch nicht aus. Wir wollen, wenn möglich, auch Funktionen auf *unbeschränkten* Intervallen sowie *unbeschränkte* Funktionen integrieren. — Betrachte dazu eine Funktion

$$f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad a < b \leq \infty.$$

Das Intervall ist also entweder rechts unbeschränkt, oder die Funktion ist möglicherweise an der rechten Intervallgrenze unbeschränkt.

Definition Es sei $a < b \leq \infty$, und die Funktion $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sei über jedem kompakten Teilintervall $[a, c] \subset [a, b)$ integrierbar. Existiert der Limes

$$\lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(t) dt =: \int_a^b f(t) dt,$$

so heißt er das *uneigentliche Integral* von f über $[a, b]$, und man sagt, das *uneigentliche Integral konvergiert*. Andernfalls *divergiert* es. \times

Entsprechendes erklärt man für Funktionen $f: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $-\infty \leq a < b$.

- A. $\int_0^{\infty} e^{-t} dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^r e^{-t} dt = \lim_{r \rightarrow \infty} -e^{-t} \Big|_0^r = \lim_{r \rightarrow \infty} (1 - e^{-r}) = 1.$
- B. $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} 2\sqrt{t} \Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2.$
- C. $\int_1^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \lim_{r \rightarrow \infty} 2\sqrt{t} \Big|_1^r = 2 \lim_{r \rightarrow \infty} (\sqrt{r} - 1) = \infty. \quad \blacktriangleleft$

Ein an beiden Integrationsgrenzen uneigentliches Integral wird auf zwei einseitig unbestimmte Integrale zurückgeführt:

Definition Es sei $-\infty \leq a < b \leq \infty$ und die Funktion $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sei über jedem kompakten Teilintervall von (a, b) integrierbar. Existieren für ein $c \in (a, b)$ dessen uneigentliche Integrale über $(a, c]$ und $[c, b)$, so heißt

$$\int_a^b f(t) dt := \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

das **uneigentliche Integral** von f über (a, b) . ✕

Die Existenz und der Wert dieses Integrals hängen nicht von der Wahl des Teilungspunktes c ab, wie man sich leicht überlegt.

► A. Es existieren

$$\int_0^\infty 2te^{-t^2} dt = -e^{-t^2} \Big|_0^\infty = 1, \quad \int_{-\infty}^0 -2te^{-t^2} dt = e^{-t^2} \Big|_{-\infty}^0 = 1.$$

Daraus folgt $\int_{-\infty}^\infty |t| e^{-t^2} dt = 1$.

B. Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^\infty \frac{t}{1+t^2} dt$ existiert nicht, denn

$$\int_0^\infty \frac{t}{1+t^2} dt = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \log(1+t^2) \Big|_0^r = \infty.$$

Es genügt nicht, dass aus Symmetriegründen

$$\int_{-r}^r \frac{t}{1+t^2} dt = 0, \quad r > 0,$$

und dasselbe für dessen Limes für $r \rightarrow \infty$ gilt. ◀

Integrale über kompakte Teilintervalle spielen für uneigentliche Integrale quasi die Rolle von *Partiialsummen*, wie der folgende Satz zeigt. Der Einfachheit halber betrachten wir den Fall, dass die uneigentliche Integrationsgrenze rechts liegt. Der andere Fall wird analog behandelt.

19 Satz Es sei $a < b \leq \infty$, und die Funktion $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sei über jedem kompakten Teilintervall integrierbar. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) Das uneigentliche Integral von f über $[a, b)$ konvergiert.
- (ii) Es gibt eine Stammfunktion F von f , so dass $\lim_{c \nearrow b} F(c)$ existiert.
- (iii) Für jede Stammfunktion F von f existiert $\lim_{c \nearrow b} F(c)$. ✕
- (iv) Es gilt das **Cauchy Kriterium**: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $d \in (a, b)$, so dass

$$\left| \int_u^v f(t) dt \right| < \varepsilon, \quad u, v \in (d, b).$$

◀◀◀ (i) \Leftrightarrow (ii) Das uneigentliche Integral existiert *per definitionem* genau dann, wenn der Grenzwert

$$\lim_{c \nearrow b} \int_a^c f(t) dt = \lim_{c \nearrow b} \left(F \Big|_a^c \right) = \lim_{c \nearrow b} (F(c) - F(a)) = \lim_{c \nearrow b} F(c) - F(a)$$

für eine beliebige Stammfunktion F von f existiert.

(ii) \Leftrightarrow (iii) Zwei Stammfunktionen von f unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante, und diese hat keinen Einfluss auf die Existenz dieses Grenzwerts.

(iii) \Leftrightarrow (iv) Aussage (iv) bedeutet wegen

$$\int_u^v f(t) dt = F \Big|_u^v,$$

dass jede Stammfunktion F von f für $d \rightarrow b$ einer Cauchybedingung genügt. Das wiederum ist äquivalent damit, dass $\lim_{c \nearrow b} F(c)$ existiert A-7.35. \gggg

Uneigentliche Integrale verhalten sich in vielerlei Hinsicht wie Reihen, wie die folgenden Definitionen und Sätzen zeigen.

20 Definition und Satz Das Integral $\int_a^b f(t) dt$ heißt *absolut konvergent*, falls das *Absolutintegral*

$$\int_a^b |f(t)| dt$$

existiert. Dies ist genau dann der Fall, wenn letzteres beschränkt ist. In diesem Fall ist auch das Integral über f konvergent. \times

\llll Die durch

$$\Phi(t) = \int_a^t |f(s)| ds$$

definierte Stammfunktion Φ des Absolutintegrals ist auf $[a, b)$ monoton steigend. Sie konvergiert somit für $t \nearrow b$ genau dann, wenn sie beschränkt ist, also das Absolutintegral existiert. Aufgrund der Dreiecksungleichung

$$\left| \int_u^v f(t) dt \right| \leq \int_u^v |f(t)| dt$$

impliziert absolute Konvergenz die einfache Konvergenz. \gggg

Majorantenkriterium Gilt $|f| \leq g$ auf $[a, b)$ und existiert das uneigentliche Integral $\int_a^b g(t) dt$, so ist $\int_a^b f(t) dt$ absolut konvergent. \times

Nützliche Majoranten sind zum Beispiel die Funktionen $t^{-\alpha}$ auf $(0, \infty)$, für die Folgendes gilt.

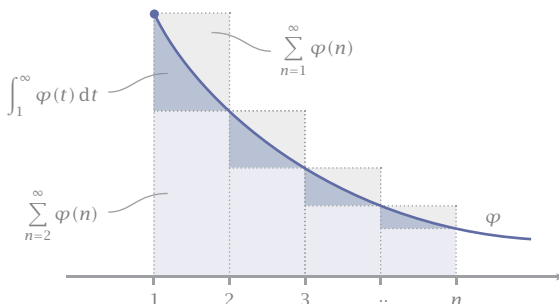
21 Satz Es gilt

$$\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha} < \infty \Leftrightarrow \alpha > 1 \quad \text{und} \quad \int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} < \infty \Leftrightarrow \alpha < 1.$$

Insbesondere divergieren beide Integrale für $\alpha = 1$. \times

Abb 10

Zum Integralkriterium



««« Für $\alpha \neq 1$ ist

$$(1 - \alpha) \int_1^r \frac{dt}{t^\alpha} = t^{1-\alpha} \Big|_1^r = r^{1-\alpha} - 1.$$

Die rechte Seite konvergiert für $r \rightarrow \infty$ genau für $1 - \alpha < 0$ und für $r \rightarrow 0$ genau für $1 - \alpha > 0$. Das ergibt die erste Behauptung. Für $\alpha = 1$ ist

$$\int_1^r \frac{dt}{t} = \log t \Big|_1^r = \log r,$$

und dies divergiert für $r \rightarrow \infty$ und für $r \rightarrow 0$. »»»

► A. Das uneigentliche Integral

$$\int_1^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha} dt$$

ist absolut konvergent für $\alpha > 1$, denn $t^{-\alpha}$ ist eine konvergente Majorante.

B. Das Integral

$$\int_1^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

ist ebenfalls konvergent, aber nicht absolut konvergent A-20. ◀

■ Reihen

Jede Reihe lässt sich als ein uneigentliches Integral schreiben, indem man eine passende, stückweise konstante Funktion definiert. So ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \int_1^{\infty} a(t) dt \quad \text{mit} \quad a := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{[n, n+1)}.$$

Entsprechend kann man viele Reihen durch Integrale majorisieren, was viele Konvergenzbetrachtungen vereinfacht.

22 **Integralkriterium** Ist die Funktion $a: [1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ monoton fallend und auf jedem kompakten Teilintervall integrierbar, so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a(n) \asymp \int_1^{\infty} a(t) dt.$$

Das heißt, beide Seiten haben dasselbe Konvergenzverhalten. Genauer gilt

$$\sum_{n=2}^{\infty} a(n) \leq \int_1^{\infty} a(t) dt \leq \sum_{n=1}^{\infty} a(n). \quad \times$$

⟨⟨⟨ Da a positiv ist, sind

$$s(n) := \sum_{k=1}^n a(k), \quad S(t) := \int_1^t a(s) ds$$

beide monoton steigend. Konvergenz ist also in beiden Fällen gleichbedeutend mit Beschränktheit. Da a monoton fällt, gilt

$$a(k-1) \geq a(t) \geq a(k), \quad t \in [k-1, k],$$

und deshalb

$$a(k) \leq \int_{k-1}^k a(t) dt \leq a(k-1), \quad k \geq 2.$$

Summieren über $k = 2, \dots, n$ ergibt

$$s(n) - a(1) \leq S(n) \leq s(n-1).$$

Daraus folgen alle Behauptungen. ⟩⟩⟩

▶ Es gilt $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \log n} = \infty$, denn

$$\int_2^{\infty} \frac{dt}{t \log t} = \log(\log t) \Big|_2^{\infty} = \infty.$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt andererseits

$$\int_2^{\infty} \frac{dt}{t \log^{1+\varepsilon} t} = -\frac{1}{\varepsilon \log^{\varepsilon} t} \Big|_2^{\infty} = \frac{1}{\varepsilon \log^{\varepsilon} 2} < \infty,$$

und damit auch

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \log^{1+\varepsilon} n} < \infty.$$

Zum selben Ergebnis gelangt man mit dem Verdichtungskriterium 6.11. ◀

10.7

Integration in Banachräumen

Das Integral einer Treppenfunktion ist nichts anderes als eine Linearkombination seiner Funktionswerte. Es lässt sich daher ebenso gut definieren, wenn diese Werte Vektoren, Matrizen oder Elemente irgendeines Banachraums E sind.

Definition Eine Funktion $\varphi: [a, b] \rightarrow E$ heißt *E -wertige Treppenfunktion*, wenn es eine Zerlegung (t_0, \dots, t_n) des Intervalls $[a, b]$ und Elemente w_1, \dots, w_n in E gibt, so dass

$$\varphi|_{(t_{k-1}, t_k)} = w_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Das Integral einer solchen Treppenfunktion ist

$$J_a^b(\varphi) := \sum_{k=1}^n w_k(t_k - t_{k-1}).$$

Dieses hängt nicht von der Darstellung von φ ab. \times

Bezeichnen wir mit $T_a^b(E)$ den Raum aller E -wertigen Treppenfunktionen auf $[a, b]$, so definiert das Integral eine Abbildung

$$J_a^b: T_a^b(E) \rightarrow E, \quad \varphi \mapsto J_a^b(\varphi).$$

Diese ist wieder linear, normiert und lipschitz, denn genau wie im Beweis von Satz 2 erhält man

$$\|J_a^b(\varphi)\|_E \leq \|\varphi\|_{[a,b],E} (b - a)$$

mit

$$\|\varphi\|_{[a,b],E} := \sup_{t \in [a,b]} \|\varphi(t)\|_E.$$

Genau wie beim reellen Cauchyintegral erhalten wir nun den Raum $R_a^b(E)$ der *E -wertigen Regelfunktionen* dadurch, dass wir die Grenzwerte gleichmäßig konvergierender Folgen von E -wertigen Treppenfunktionen betrachten. Das heißt, eine Funktion f in $B_a^b(E)$ gehört also zu $R_a^b(E)$ genau dann, wenn es eine Folge (φ_n) in $T_a^b(E)$ gibt, so dass

$$\|f - \varphi_n\|_{[a,b],E} \rightarrow 0.$$

Das Cauchyintegral einer solcher Funktion ist dann

$$\int_a^b f := \lim_{n \rightarrow \infty} J_a^b(\varphi_n).$$

Dieses ist unabhängig von der Wahl der approximierenden Folge (φ_n) .

Der Permanenzsatz $\text{\textsubscript{3}}$ und die Intervalladditivität $\text{\textsubscript{5}}$ gelten unverändert. Auf die Monotonie müssen wir allerdings verzichten, da sie in allgemeinen Banachräumen keinen Sinn macht.

Ebenso bleiben die Dreiecksungleichung, das Riemannsches Lemma, und die Charakterisierung der Regelfunktionen unverändert. Es ist lediglich der reelle Betrag $|\cdot|$ durch die Banachraumnorm $\|\cdot\|_E$ zu ersetzen. Es gilt daher folgender

Satz *Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow E$ ist eine Regelfunktion genau dann, wenn sie in jedem Punkt des Intervalls $[a, b]$ einseitige Grenzwerte besitzt. Jede Regelfunktion besitzt höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen. Insbesondere sind stückweise stetige Funktionen Regelfunktionen und damit integrierbar. \times*

Vektor- und matrixwertige Integrale treten beispielsweise auf in der höherdimensionalen Analysis und bei der Lösung von höherdimensionalen Differenzialgleichungen. Ist zum Beispiel

$$A: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}, \quad A(t) = (a_{kl}(t))_{mn}$$

eine stetige matrixwertige Funktion, so ist $\text{\textsubscript{A-29}}$

$$\int_0^1 A(t) dt = \left(\int_0^1 a_{kl}(t) dt \right)_{mn}.$$

Aufgaben

- 1 Welche der folgenden Aussagen sind wahr?
 - a. Jede beschränkte Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist integrierbar.
 - b. Eine integrierbare Funktion hat nur endlich viele Unstetigkeitsstellen.
 - c. Jede offene Überdeckung von $(0, 1)$ besitzt eine endliche Teilüberdeckung.
 - d. Die Indikatorfunktion jeder Teilmenge von $[0, 1]$ ist eine Treppenfunktion.
- 2 Auf R_a^b ist J_a^b lipschitz. Genauer gilt

$$|J_a^b(f) - J_a^b(g)| \leq (b - a) \|f - g\|_{[a, b]}.$$

- 3 Das Integral einer Regelfunktion, die nur auf einer abzählbaren Menge nicht verschwindet, ist Null.
- 4 Die Funktion $f \in R_a^b$ sei nichtnegativ und $J_a^b(f) = 0$. Dann ist $f_+ = f_- = 0$.
- 5 Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Regelfunktion und $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist auch $\phi \circ f$ eine Regelfunktion.
- 6 Das Produkt zweier Regelfunktionen ist wieder eine Regelfunktion.
- 7 Ist

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < t \leq \frac{1}{n}, & n \geq 1, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

eine Treppenfunktion, eine Regelfunktion, oder keins von beidem?

- 8 Die Thomaefunktion $\tau_{A-7.12}$ ist auf $[0, 1]$ integrierbar mit Integral 0. Konstruieren sie auch eine Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen τ konvergiert.
- 9 Die Dirichletfunktion ist auf keinem nichtentarten Intervall integrierbar.
- 10 Zeigen Sie mithilfe von Treppenfunktionen, dass

$$\int_0^x t^m = x^{m+1} \int_0^1 t^m = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \quad x > 0.$$

Wählen Sie für das zweite Integral Treppenfunktionen, deren Teilungspunkte eine geometrische Folge bilden.

- 11 Die Potenzreihe $\varphi = \sum_{n \geq 0} a_n t^n$ habe Konvergenzradius $0 < r \leq \infty$. Dann gilt:
 - a. Die Funktion φ ist auf jedem kompakten Intervall in $(-r, r)$ integrierbar.
 - b. Es gilt

$$\int_0^x \varphi = \sum_{n \geq 0} a_n \int_0^x t^n = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad |x| < r.$$

c. Zum Beispiel gilt

$$\int_0^x \sin t = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- 12 Sind f und g auf dem Intervall I integrierbar, so auch fg , und es gilt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$\int_I |fg| \leq \left(\int_I |f|^2 \right)^{1/2} \left(\int_I |g|^2 \right)^{1/2}.$$

13 Auf $C(I)$ wird durch $\langle f, g \rangle := \int_I fg$ ein Skalarprodukt definiert.

14 Sei $f \in R_a^b$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\varphi \in C([a, b])$ mit

$$\int_a^b |f - \varphi| < \varepsilon.$$

15 Es sei f eine Regelfunktion auf $[a-1, b+1]$ und $\tau_h f := f(\cdot + h)$. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta \in (0, 1)$, so dass

$$\int_a^b |\tau_h f - f| < \varepsilon, \quad |h| < \delta.$$

16 Die Funktion

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} \sin 1/t, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

ist *nicht* integrierbar.

17 Bestimmen sie die folgenden Integrale.

$$a. \int_0^\infty t^2 e^{-t} dt \quad b. \int_0^1 t \log t dt \quad c. \int_0^\infty e^{-t} \sin t dt \quad d. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3 t dt$$

$$e. \int_0^\infty t^n e^{-at} \cos \omega t dt, \quad a > 0 \quad f. \int_0^\pi e^{-\cos t} \sin 2t dt \quad g. \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^3}$$

18 Für $a, b > 0$ gilt

$$\int_0^\infty \frac{\cos at - \cos bt}{t} dt = \log \frac{b}{a}.$$

19 Das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^\infty \sin t dt$ existiert *nicht*, wohl aber dessen *Cauchyscher Hauptwert*

$$H \int_{-\infty}^\infty \sin t dt := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r \sin t dt.$$

20 Das Integral $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ konvergiert, aber nicht absolut.

21 Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ zeige man

$$\int_0^1 t^m \log^n t dt = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

Hieraus folgt

$$\int_0^1 t^t dt = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}.$$

22 Der Raum $(C_s(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ ist ein normierter, aber nicht vollständiger Vektorraum.

23 Welche der folgenden uneigentlichen Integrale konvergieren für welche Parameter?

$$a. \int_0^\infty \frac{\sin t}{t^\alpha} dt \quad b. \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt$$

24 Bestimmen sie mithilfe der Substitution $t = \sinh u$ das Integral

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}.$$

- 25 Ist $f \in C([0, \infty))$ integrierbar, so definiert

$$F(t) = - \int_t^\infty f(s) \, ds, \quad t \geq 0,$$

eine Stammfunktion $F \in C^1([0, \infty))$ von f .

- 26 Sei $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ monoton fallend mit $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 0$. Dann existiert

$$\int_0^\infty f(t) \sin t \, dt.$$

- 27 Die Funktion $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ sei monoton und integrierbar. Dann existiert für jedes $h > 0$ die Reihe $\sum_{n \geq 0} f(nh)$, und es gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{n \geq 0} f(nh) = \int_0^\infty f(t) \, dt.$$

- 28 Beweisen sie die Existenz der sogenannten *Eulerschen Konstanten*

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n - \log n), \quad s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

- 29 a. Für eine stetige Funktion $A: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ mit $A(t) = (a_{kl}(t))_{mn}$ gilt

$$\Lambda(t) := \int_0^1 A(t) \, dt = \left(\int_0^1 a_{kl}(t) \, dt \right)_{mn}.$$

- b. Für $h \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\int_0^1 A(t) h \, dt = \Lambda(t) h.$$

- 30 Sei $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine im Punkt 0 stetige Regelfunktion. Dann gilt

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{h}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t)}{t^2 + h^2} \, dt = f(0).$$

- 31 Für $f \in C([0, \infty))$ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = 1$ gilt

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon \int_0^\infty e^{-\varepsilon t} f(t) \, dt = 1.$$

- 32 Jeder Regelfunktion $f \in R_a^b$ sei die Funktion $f_-: (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ihrer linksseitigen und die Funktion $f_+: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ihrer rechtsseitigen Grenzwerte zugeordnet. Dann gilt:

- a. f_- ist *linksseitig stetig* - das heißt, es gilt

$$f_-(c) = \lim_{t \nearrow c} f_-(t), \quad c \in (a, b].$$

Analog ist f_+ *rechtsseitig stetig*.

- b. Es gibt eine abzählbare Menge $S \subset [a, b]$, so dass $f_- = f = f_+$ auf $[a, b] \setminus S$.

- c. Es gilt

$$\int_a^b f = \int_a^b f_- = \int_a^b f_+.$$

- 33 Eine Funktion ist genau dann stückweise stetig, wenn sie als Summe einer Treppenfunktion und einer stetigen Funktionen dargestellt werden kann.

- 34 Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$\left| \int_a^b f - \sum_{k=1}^n f(t_k)(t_k - t_{k-1}) \right| < \varepsilon$$

für jede Zerlegung $Z = (t_0, \dots, t_n)$ mit *Feinheit* $\sup_{1 \leq k \leq n} (t_k - t_{k-1}) < \delta$. *Hinweis:* Man verwende die gleichmäßige Stetigkeit von f 7.32.

- 35 *Dirichletsches Konvergenzkriterium* Sei f eine stetige Funktion auf $[a, b)$ mit beschränkter Stammfunktion und g eine monotone C^1 -Funktion auf $[a, b)$ mit $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = 0$. Dann existiert das Integral von fg über $[a, b)$.
- 36 *Stieltjesintegral* Für eine stetige und monoton steigende Funktion $\mu: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definiere man das Integral einer Treppenfunktion

$$\varphi = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{(t_k, t_{k-1})} \in T_a^b$$

durch

$$J_a^b(\varphi; \mu) := \sum_{k=1}^n c_k (\mu(t_k) - \mu(t_{k-1})).$$

Verfährt man genau wie zuvor, so erhält man das *Stieltjesintegral* von f bezüglich der *Belegungsfunktion* μ . Das Regelintegral entspricht dann der Belegungsfunktion $\mu = id$. Man beweise die entsprechenden Sätze für dieses Stieltjesintegral.

- 37 *Unter- und Obersumme* Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige beschränkte Funktion, so heißt jede Funktion $\phi \in T_a^b$ mit $\phi \leq f$ eine *Unterfunktion* von f und $J_a^b(\phi)$ eine *Untersumme* von f . Entsprechend werden *Oberfunktion* und *Obersumme* erklärt. Für eine Regelfunktion $f \in R_a^b$ gilt

$$\sup_{\phi \leq f} J_a^b(\phi) = \int_a^b f = \inf_{\phi \geq f} J_a^b(\phi).$$

11

Elementare Differenzialgleichungen

Differenzialgleichungen stellen eine Beziehung her zwischen einer oder mehreren Funktionen und ihren Ableitungen. Da Ableitungen Veränderungen beschreiben, modellieren Differenzialgleichungen ganz allgemein das Veränderungsverhalten von Systemen.

Wir beschränken uns hier auf den einfachsten Fall einer *skalaren* Größe x , die nur von *einer* unabhängigen Variablen abhängt, der Zeit:

$$t \mapsto x(t).$$

Eine Differenzialgleichung betrifft in diesem Fall die Größe x und endlich viele ihrer Ableitungen \dot{x}, \ddot{x}, \dots nach der Zeit t . Beschränken wir uns auch hier auf den einfachsten Fall, so haben wir es mit Differenzialgleichungen *erster Ordnung* zu tun, die nur t, x, \dot{x} involvieren und allgemein die *implizite Form*

$$F(t, x, \dot{x}) = 0$$

haben. Am einfachsten sind solche Gleichungen in *expliziter* Form,

$$\dot{x} = f(t, x),$$

und nur solche wollen wir jetzt betrachten.

Die hier verwendete Notation ist die *physikalische Notation*, wo die unabhängige Variable als Zeit aufgefasst wird. In der *mathematischen Notation* übernimmt x diese Rolle, und die abhängige Größe wird meist mit y bezeichnet. Die letzte Gleichung lautet dann

$$y' = f(x, y).$$

Auf diesen Unterschied ist beim Studium der Literatur zu achten.

11.1

Grundbegriffe

Definition Sei I ein Intervall, $D \subset \mathbb{R}$ offen, und $f: I \times D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (t, x) \in I \times D, \quad (1)$$

eine *Differenzialgleichung erster Ordnung* auf $I \times D$. Eine *Lösung* dieser Differenzialgleichung ist eine differenzierbare Abbildung $\varphi: J \rightarrow D$ mit einem nichtleeren Intervall $J \subset I$, so dass

$$\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t)), \quad t \in J. \quad \times \quad (2)$$

Die Differenzialgleichung heißt *autonom*, wenn die Funktion f nicht explizit von der Zeit t abhängt, sie also von der Form

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in D,$$

ist. Andernfalls heißt die Gleichung *nichtautonom*.

Bemerkungen a. Genauer handelt es sich um eine *explizite skalare Differenzialgleichung erster Ordnung*. Explizit, weil die Gleichung nach \dot{x} aufgelöst, skalar, weil x eindimensional und reell ist, und *erster Ordnung*, da nur die erste Ableitung \dot{x} auftritt.

b. Es wäre zu einschränkend zu verlangen, dass eine Lösung φ auf dem ganzen Intervall I erklärt ist. Sie kann zum Beispiel vorzeitig den Definitionsbereich D verlassen. \leadsto

Geometrisch betrachtet handelt es sich bei der rechten Seite der Differenzialgleichung (1) um ein *Richtungsfeld*. In jedem Punkt $(t, x) \in I \times D$ schreibt die Funktion f vor, welche *Richtung* oder *Steigung* die Tangente einer Lösung einnimmt, falls sie durch diesen Punkt verläuft. Gleichung (2) verlangt genau dies von einer Lösung φ . Eine Betrachtung des Richtungsfeldes kann oft schon Aufschluss über die Gestalt seiner Lösungskurven geben.

► A. Die einfachste Differenzialgleichung ist sicherlich

$$\dot{x} = 0.$$

Jede Lösung ist eine konstante Funktion $\varphi: t \mapsto c$. Dies ist nicht weiter interessant.

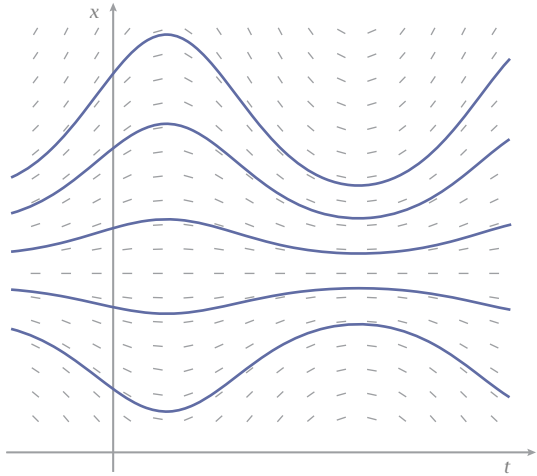
B. Die Gleichung

$$\dot{x} = f(t)$$

mit stetigem $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ist keine ›echte‹ Differenzialgleichung, da die rechte Seite nicht von x abhängt. Das zugehörige Richtungsfeld ist somit invariant

Abb 1

Ein Richtungsfeld mit
fünf Lösungskurven



unter Translationen in der x -Richtung, also *ortsunabhängig*. Ihre Lösungen sind die *Stammfunktionen* von f . Diese unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante, gehen also durch vertikale Translation ineinander über [Abb 2](#).

c. Das wohl einfachste Beispiel einer autonomen Differentialgleichung ist das *Wachstumsgesetz*

$$\dot{x} = ax$$

mit konstantem Koeffizienten $a \neq 0$, mit dessen Hilfe wir bereits die Exponentialfunktion definiert hatten. Jede Lösung ist von der Form [9.1](#)

$$\varphi(t) = e^{at}c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Abb 2

Ortsunabhängiges
Richtungsfeld

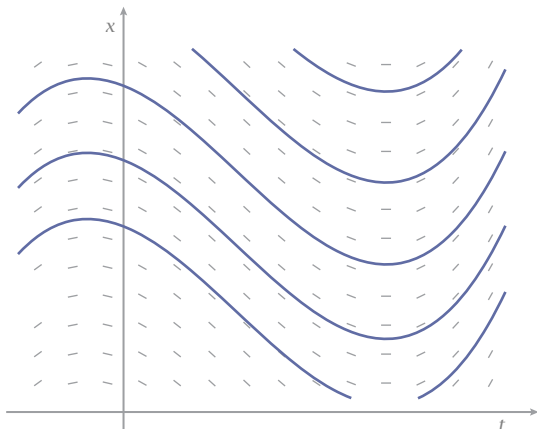
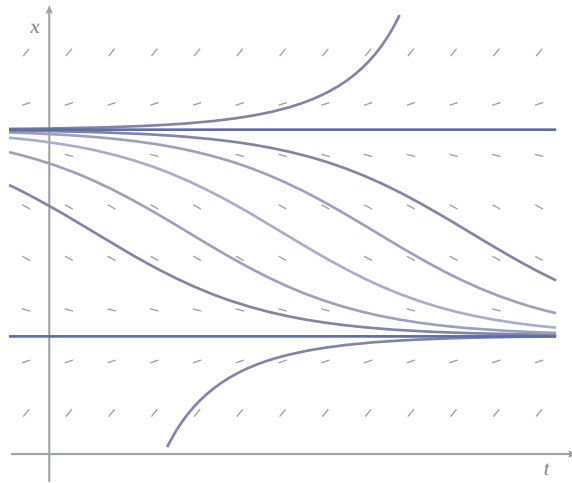


Abb 3
Zeitunabhängiges
Richtungsfeld



D. Das Richtungsfeld der autonomen Differentialgleichung

$$\dot{x} = (x - a)(x - b), \quad a < b,$$

mit einigen Lösungen ist in Abbildung 3 skizziert. ◀

Die Beispiele zeigen, dass eine Lösung durch eine Differentialgleichung allein nicht eindeutig bestimmt wird. Das ist auch nicht überraschend, denn eine solche Gleichung bestimmt ja nur deren *Veränderungsverhalten*, nicht aber ihre *absolute* Position. Dazu bedarf es weiterer Daten, zum Beispiel eines Anfangswertes. Die Kombination beider Daten bezeichnet man als *Anfangswertproblem*.

Definition Unter einem zur Differentialgleichung (1) gehörenden *Anfangswertproblem* versteht man das System

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

wobei $(t_0, x_0) \in I \times D$. Eine *lokale Lösung* ist eine Lösung $\varphi: I_0 \rightarrow D$ dieser Differentialgleichung mit

$$\varphi(t_0) = x_0, \quad t_0 \in I_0 \subset I. \quad \times$$

Eine lokale Lösung ist also eine Lösung der Differentialgleichung, die auf einem beliebig kleinen Intervall I_0 um die *Anfangszeit* t_0 definiert ist und zu diesem Zeitpunkt den *Anfangswert* x_0 annimmt.

► Wir greifen die vorangehenden Beispiele auf. Das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t), \quad x(t_0) = c$$

hat die eindeutige Lösung

$$\varphi(t) = c + \int_{t_0}^t f(s) \, ds.$$

Für das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = ax, \quad x(t_0) = x_0$$

finden wir

$$\varphi(t) = e^{a(t-t_0)}x_0,$$

indem wir die Gleichung $e^{at_0}c = x_0$ nach c auflösen. ◀

Ein Anfangswertproblem besitzt unter sehr allgemeinen Bedingungen an die rechte Seite immer eine eindeutige lokale Lösung – dies ist der lokale Existenz- und Eindeutigkeitssatz, den wir später im Kapitel über gewöhnliche Differenzialgleichungen behandeln. In den speziellen Fällen, die wir im Folgenden betrachten, können wir die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen allerdings direkt zeigen und daher auf die große Maschine vorläufig verzichten.

11.2

Lineare Differenzialgleichungen

Definition Eine *lineare Differenzialgleichung erster Ordnung* ist von der Form

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)$$

mit auf einem Intervall I stetigen Funktionen a und b . Sie heißt *homogen*, falls $b = 0$, andernfalls *inhomogen*. ✕

■ Der homogene Fall

Wir lösen zuerst die homogene Gleichung $\dot{x} = a(t)x$. Dies ist nichts anderes als ein zeitabhängiges Wachstumsgesetz, dessen Lösungen ebenfalls durch Exponentialfunktionen beschrieben werden.

Eine parameterabhängige Familie von Lösungen heißt *allgemeine Lösung* einer Differenzialgleichung, wenn sie *sämtliche Lösungen* dieser Gleichung umfasst.

Satz Sei a stetig auf dem Intervall I . Dann ist die *allgemeine Lösung* von

$$\dot{x} = a(t)x \tag{3}$$

gegeben durch

$$\varphi(t) = e^{A(t)}c, \quad c \in \mathbb{R},$$

mit einer beliebigen Stammfunktion A von a . Sie existiert auf ganz I . \times

««« Offensichtlich ist dies für jedes c eine Lösung, denn $\dot{A} = a$, also

$$\dot{\varphi} = e^A \dot{A}c = e^A ac = a\varphi.$$

Bleibt zu zeigen, dass jede Lösung von dieser Form ist. Nun, ist φ eine beliebige Lösung, dann gilt

$$(e^{-A}\varphi)' = e^{-A}\dot{\varphi} - e^{-A}\dot{A}\varphi = e^{-A}a\varphi - e^{-A}a\varphi = 0.$$

Also ist $e^{-A}\varphi = c$ eine reelle Konstante, und die Behauptung folgt. »»»

Es spielt keine Rolle, welche Stammfunktion A man hier wählt. Dies ändert lediglich den Parameter c .

► A. Für konstantes a ist die allgemeine Lösung von $\dot{x} = ax$ gegeben durch

$$\varphi(t) = e^{at}c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

B. Die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung $\dot{x} = -x/t$ für $t > 0$ ist

$$\varphi(t) = c \exp\left(-\int_1^t \frac{ds}{s}\right) = c \exp(-\log t) = \frac{c}{t}. \quad \blacktriangleleft$$

Zusatz Das zugehörige Anfangswertproblem

$$\dot{x} = a(t)x, \quad x(t_0) = x_0$$

besitzt auf I die eindeutige Lösung $\varphi(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)x_0$. \times

««« Nach dem eben bewiesenen Satz ist jede Lösung von der Form

$$\varphi(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s) ds\right)c.$$

Die Bedingung $\varphi(t_0) = x_0$ ergibt dann $c = x_0$. »»»

Bemerkung *A posteriori* - im Nachhinein - ist es leicht, die Korrektheit einer Lösung zu verifizieren - man muss ja nur Differenzieren und Einsetzen. Das Problem ist, überhaupt eine zu finden. Im Falle der Gleichung $\dot{x} = a(t)x$ hilft der Ansatz

$$\varphi(t) = e^{\Phi(t)},$$

denn die Lösung sollte wohl etwas mit der Exponentialfunktion zu tun haben. Dann muss notwendigerweise gelten

$$\dot{\varphi} = e^{\phi} \dot{\phi} \stackrel{!}{=} a\varphi = ae^{\phi},$$

und damit $\dot{\phi} = a$. Also führt eine Stammfunktion von a zum Ziel. — Diese Argumentation ersetzt allerdings nicht den Eindeutigkeitsbeweis. Denn der Ansatz $\varphi = e^{\phi}$ muss ja nicht der einzig mögliche sein. \leadsto

■ Der inhomogene Fall

Wir betrachten nun die inhomogene lineare Differenzialgleichung

$$\dot{x} = a(t)x + b(t). \quad (4)$$

Wie bei linearen Gleichungssystemen auch, kann man diesen Fall auf die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung plus einer partikulären – also irgendeiner einzelnen – Lösung der inhomogenen Gleichung zurückführen.

Satz Sei φ_0 eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung (4). Dann ist jede andere Lösung von der Form $\varphi_0 + \varphi$ mit einer Lösung φ der homogenen Gleichung (3). \times

⟨⟨⟨ Ist φ_0 eine partikuläre und φ eine homogene Lösung, so ist

$$(\varphi_0 + \varphi)' = \dot{\varphi}_0 + \dot{\varphi} = a\varphi_0 + b + a\varphi = a(\varphi_0 + \varphi) + b,$$

also $\varphi_0 + \varphi$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung. Ist umgekehrt ψ irgendeine Lösung der inhomogenen Gleichung, so ist mit derselben Rechnung $\psi - \varphi_0 = \varphi$ eine Lösung der homogenen Gleichung. $\rangle\rangle\rangle$

Es bleibt die Frage, wie man eine partikuläre Lösung findet. Hier hilft die Idee der *Variation der Konstanten*¹, die auf Lagrange zurückgeht: wenn $e^{A(t)}c$ die homogene Gleichung löst, so löst sie vielleicht auch die inhomogene Gleichung, wenn die Konstante c sich in geeigneter Weise mit t ändert, also eine Funktion von t wird. Dann ist auf der einen Seite

$$(e^A c)' = e^A \dot{A}c + e^A \dot{c} = e^A a c + e^A \dot{c}.$$

Auf der anderen Seite soll diese Funktion die Differenzialgleichung erfüllen, also

$$(e^A c)' = a e^A c + b$$

gelten. Vergleich dieser beiden Gleichungen ergibt $e^A \dot{c} = b$, also

$$\dot{c} = e^{-A} b.$$

¹ Dieser Begriff ist ein Widerspruch in sich, trifft die Sache aber genau.

Diese Gleichung ist durch Integration lösbar, denn die rechte Seite ist bekannt. Ist also c_0 eine Stammfunktion von $e^{-A}b$, so ist $e^A c_0$ eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung. Insgesamt erhalten wir damit folgende Ergebnisse.

Satz Die Funktionen a und b seien stetig auf dem Intervall I . Dann ist die allgemeine Lösung von $\dot{x} = a(t)x + b(t)$ gegeben durch

$$\varphi(t) = e^{A(t)}(c + c_0(t)), \quad c \in \mathbb{R},$$

mit Stammfunktionen A von a und c_0 von $e^{-A}b$, respektive. \times

1 Satz Unter denselben Voraussetzungen besitzt das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = a(t)x + b(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

auf I die eindeutige Lösung

$$\varphi(t) = e^{A(t)} \left(x_0 + \int_{t_0}^t e^{-A(s)} b(s) ds \right), \quad A(t) = \int_{t_0}^t a(s) ds. \quad \times$$

Bemerkung Diese Formel ist eher für theoretische Untersuchungen von Bedeutung. In der Praxis löst man zuerst die homogene Gleichung und konstruiert anschließend per Variation der Konstanten direkt eine partikuläre Lösung. \rightarrow

\triangleright Betrachte die Differenzialgleichung

$$\dot{x} = 2tx + 2t^3.$$

Eine Stammfunktion von $2t$ ist t^2 , die allgemeine Lösung lautet deshalb

$$\varphi(t) = e^{t^2} \left(c + 2 \int_0^t e^{-s^2} s^3 ds \right),$$

wobei wir von der Freiheit Gebrauch machen, eine uns bequeme Stammfunktion zu wählen. Mittels Substitution $s^2 = u$ und partieller Integration erhält man

$$2 \int_0^t e^{-s^2} s^3 ds = \int_0^{t^2} u e^{-u} du = 1 - (t^2 + 1)e^{-t^2}.$$

Also ist

$$\varphi(t) = ce^{t^2} - t^2 - 1, \quad c \in \mathbb{R},$$

wobei wir noch von der Freiheit Gebrauch machen, $c + 1$ durch c zu ersetzen. \blacktriangleleft

11.3

Separierbare Differenzialgleichungen

Eine *separierbare Differenzialgleichung*, auch *Differenzialgleichung mit getrennten Variablen* genannt, ist von der Form

$$\dot{x} = g(t)h(x) \quad (5)$$

mit stetigen Funktionen g und h auf Intervallen I respektive J . Ihr Definitionsbereich ist das Rechteck $I \times J$ in der (t, x) -Ebene. Hierunter fallen auch die Stammfunktionsgleichung, wo $h \equiv 1$, wie auch die allgemeine autonome Differenzialgleichung, wo $g \equiv 1$.

Triviale Lösungen findet man, wenn der Faktor h Nullstellen besitzt. Ist

$$h(x_0) = 0$$

für ein $x_0 \in J$, so ist die konstante Funktion $\varphi \equiv x_0$ eine Lösung, denn

$$\dot{\varphi}(t) = 0 = g(t)h(x_0) = g(t)h(\varphi(t)), \quad t \in I.$$

Ist dazu noch eine Lipschitzbedingung erfüllt, so ist dies auch die einzige solche Lösung:

Satz Die Funktionen g und h seien stetig. Ist x_0 eine Nullstelle von h , so ist die konstante Funktion $\varphi \equiv x_0$ Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = g(t)h(x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Ist h lipschitzstetig, so ist es auch die einzige Lösung. \times

⟨⟨⟨ Die Existenz dieser Lösung haben wir gerade gezeigt. Seien nun φ und ψ zwei Lösungen desselben Anfangswertproblems. Dann gilt

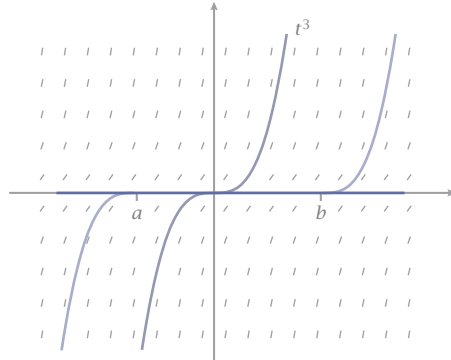
$$\begin{aligned} (\varphi - \psi)(t) &= (\varphi - \psi) \Big|_{t_0}^t = \int_{t_0}^t (\dot{\varphi} - \dot{\psi})(s) \, ds \\ &= \int_{t_0}^t g(s) [h(\varphi(s)) - h(\psi(s))] \, ds. \end{aligned}$$

Auf einem beliebigen kompakten Intervall $[t_0, b] \subset I$ ist g beschränkt, also $\|g\|_{[t_0, b]} \leq K$. Außerdem ist h auf J mit einer gewissen Konstanten L -lipschitz. Für $t_0 \leq t \leq b$ gilt also

$$\begin{aligned} |(\varphi - \psi)(t)| &\leq \int_{t_0}^t |g(s)| |h(\varphi(s)) - h(\psi(s))| \, ds \\ &\leq KL \int_{t_0}^t |(\varphi - \psi)(s)| \, ds. \end{aligned}$$

Abb 4

Nichteindeutigkeit des
Anfangswertproblems
von Beispiel 2



Für die stetige Funktion $u = |\varphi - \psi|$ gilt mit $M = KL$ somit

$$0 \leq u(t) \leq M \int_{t_0}^t u(s) ds, \quad t_0 \leq t \leq b.$$

Dann aber muss u für $t_0 \leq t \leq b$ identisch verschwinden – siehe Aufgabe 10 – und somit ist dort $\varphi = \psi$. – Für ein beliebiges kompaktes Intervall $[a, t_0] \subset I$ argumentiert man entsprechend. \gggg

- 2 \blacktriangleright Die Lipschitzbedingung ist *notwendig*. Das Standardbeispiel hierfür ist das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = 3x^{2/3}, \quad x(0) = 0.$$

Die Wurzelfunktion $x \mapsto x^{2/3}$ ist auf ganz \mathbb{R} wohldefiniert, aber nicht lipschitz im Punkt 0. Und tatsächlich existiert neben der konstanten Lösung $\varphi \equiv 0$ auch noch die Lösung

$$\varphi(t) = t^3.$$

Daraus kann man sogar unendlich viele verschiedene Lösungen zusammensetzen, und zwar

$$\varphi(t) = \begin{cases} (t-a)^3, & t < a \leq 0, \\ 0, & a \leq t \leq b, \\ (t-b)^3, & t > b \geq 0, \end{cases}$$

für jede Wahl von $a \leq 0 \leq b$. Es gibt also *überabzählbar viele* Lösungen dieses Anfangswertproblems Abb 4. \blacktriangleleft

Die zu den Nullstellen von h gehörenden konstanten Lösungen zerlegen das Rechteck $I \times J$ in horizontale Streifen. Ist h lipschitz, so können aus Eindeutigkeitsgründen die übrigen Lösungen diese Streifen nicht verlassen. Indem wir J

geeignet einschränken, können wir daher im Folgenden annehmen, dass h auf J nirgends verschwindet.

Angenommen, es existiert eine Lösung φ in einem solchen Streifen. Da dort h nicht verschwindet, ist

$$g(t) = \frac{\dot{\varphi}(t)}{h(\varphi(t))}. \quad (6)$$

Also gilt dann auch

$$\int_{t_0}^t g(s) \, ds = \int_{t_0}^t \frac{\dot{\varphi}(s)}{h(\varphi(s))} \, ds = \int_{\varphi(t_0)}^{\varphi(t)} \frac{du}{h(u)}. \quad (7)$$

Drehen wir diese Argumentation um, indem wir von der letzten Gleichung ausgehen, so erhalten wir folgenden Satz.

- 3 Satz** Die Funktionen g und h seien stetig auf den Intervallen I respektive J , und h habe keine Nullstelle in J . Dann existiert genau eine lokale Lösung $\varphi: I_0 \rightarrow J$ des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = g(t)h(x), \quad x(t_0) = x_0,$$

mit $t_0 \in I$ und $x_0 \in J$, und diese erfüllt die Gleichung

$$G(t) = H(\varphi(t)), \quad t \in I_0, \quad (8)$$

wobei

$$G(t) := \int_{t_0}^t g(s) \, ds, \quad H(x) := \int_{x_0}^x \frac{du}{h(u)}. \quad \times$$

««« Notwendigkeit: Das haben wir gerade gezeigt: Ist φ eine lokale Lösung, so gilt (6), da h nirgends verschwindet. Integration von t_0 nach t ergibt gemäß (7)

$$G(t) = \int_{t_0}^t g(s) \, ds = \int_{t_0}^t \frac{\dot{\varphi}(s)}{h(\varphi(s))} \, ds = \int_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{du}{h(u)} = H(\varphi(t)).$$

Eindeutigkeit: Da $H' = 1/h$ nirgends verschwindet, ist H streng monoton und damit umkehrbar. Gleichung (8) ist somit nach φ auflösbar, und es ist

$$\varphi(t) = H^{-1}(G(t)), \quad t \in I_0. \quad (9)$$

Somit ist φ , wenn es existiert, auch eindeutig bestimmt.

Existenz: Wir nehmen (9) als *Definition* von φ in einer Umgebung von t_0 . Dann ist

$$\varphi(t_0) = H^{-1}(G(t_0)) = H^{-1}(0) = x_0.$$

Ferner ist φ stetig differenzierbar, und Differenzieren von $G(t) = H(\varphi(t))$ ergibt

$$g(t) = H'(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) = \frac{\dot{\Phi}(t)}{h(\varphi(t))}.$$

Somit erfüllt φ die Differentialgleichung $\dot{\varphi}(t) = g(t)h(\varphi(t))$. \gggg

Bemerkungen a. Der Satz beschreibt die Lösung des Anfangswertproblems nur implizit. Weder die Stammfunktionen G oder H müssen explizit bestimmbar sein, noch ist Gleichung (8) immer nach φ auflösbar.

b. Sind G und H beliebige Stammfunktionen von g und $1/h$, so ist

$$\Phi : I \times J \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(t, x) = G(t) - H(x)$$

konstant entlang *allen* Lösungskurven der Differentialgleichung (5). Denn die entsprechenden Funktionen des Satzes unterscheiden sich von diesen nur durch additive Konstanten. Man kann dies aber auch direkt durch Differenzieren nachprüfen. Es gilt also

$$\Phi(t, \varphi(t)) = c$$

für *jede* Lösung φ , wobei c durch die Anfangswerte bestimmt wird. Man sagt, Φ ist eine *Erhaltungsgröße* oder ein *Integral* der Differentialgleichung. \rightarrow

In der Praxis löst man separierbare Differentialgleichungen in etwas salopper, aber einprägsamer Weise wie folgt. Man schreibt

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = g(t)h(x)$$

und *separiert* die Variablen zu

$$\frac{dx}{h(x)} = g(t) dt.$$

Unbestimmte Integration ergibt

$$\int \frac{dx}{h(x)} = \int g(t) dt.$$

Gelingt es, diese Integrale zu bestimmen und nach x aufzulösen, erhält man eine allgemeine Lösung φ , die noch von einer Integrationskonstante c abhängt.

\rightarrow *Erstes Beispiel* Die homogene lineare Differentialgleichung

$$\dot{x} = a(t)x$$

ist separierbar mit $g(t) = a(t)$ und $h(x) = x$. Die Funktion h hat eine Nullstelle bei 0, und da h Lipschitz ist, ist die Nulllösung auch die einzige, die den Wert 0

annehmen kann. Nun sei $x \neq 0$. Dann ist

$$G(t) = \int g(s) ds = \int a(s) ds = A(t)$$

eine Stammfunktion von a , und

$$H(x) = \int \frac{dx}{h(x)} = \int \frac{dx}{x} = \log |x| + c.$$

Auflösen der Gleichung $H(x) = G(t)$ ergibt zunächst ²

$$|x(t)| = e^{A(t)-c} = e^{A(t)} e^c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Den Fall positiver, negativer und verschwindender Lösungen kann man dann zusammenfassen zu

$$x(t) = e^{A(t)} c, \quad c \in \mathbb{R}. \quad \blacktriangleleft$$

► *Zweites Beispiel* Betrachte

$$\dot{x} = \frac{t}{x}, \quad 0 < t, x < \infty.$$

Rechnen wir informell, so ist also $x dx = t dt$,

$$\int_{t_0}^t s ds = \frac{1}{2}(t^2 - t_0^2) = \int_{x_0}^x u du = \frac{1}{2}(x^2 - x_0^2).$$

Damit wird $x^2 = t^2 - t_0^2 + x_0^2$, oder

$$x(t) = \sqrt{t^2 + x_0^2 - t_0^2}.$$

Der Definitionsbereich dieser Lösung hängt von den Anfangswerten ab. Für $x_0 \geq t_0$ ist er $(0, \infty)$. Für $t_0 > x_0$ verlangen wir dagegen

$$t > \sqrt{t_0^2 - x_0^2} > 0. \quad \blacktriangleleft$$

► *Drittes Beispiel* Betrachte

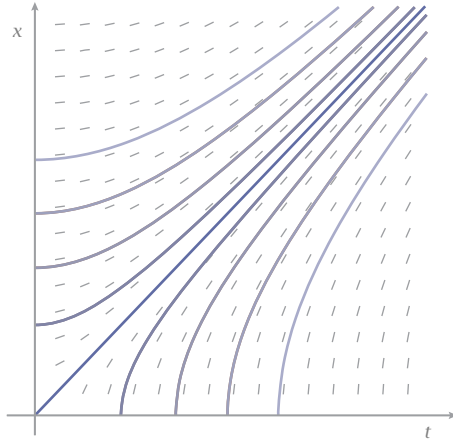
$$\dot{x} = e^x \sin t.$$

Das Richtungsfeld ist periodisch in t mit Periode 2π und symmetrisch zur x -Achse, denn für die rechte Seite gilt $f(t, x + 2\pi) = f(t, x) = -f(-t, x)$. Ist also $\varphi(t)$ eine Lösung, so sind es auch

$$\varphi(t + 2\pi), \quad \varphi(-t),$$

² Wir schreiben jetzt eine Lösung der Einfachheit halber als $x(t)$ statt $\varphi(t)$.

Abb 5

Lösungen zu $\dot{x} = t/x$ 

wie man leicht nachrechnet. — Da e^x keine Nullstellen besitzt, können wir direkt zur Separation der Variablen übergehen und erhalten

$$\int \frac{dx}{e^x} = \int \sin t \, dt.$$

Also ist $e^{-x} = \cos t + c$, oder

$$x(t) = -\log(\cos t + c)$$

mit der Nebenbedingung, dass $\cos t + c > 0$.

Aufgrund von Satz 3 sind dies alle Lösungen der Gleichung. Es ist auch jedes Anfangswertproblem $x(0) = x_0$ lösbar mit

$$x(t) = -\log(\cos t + e^{-x_0} - 1).$$

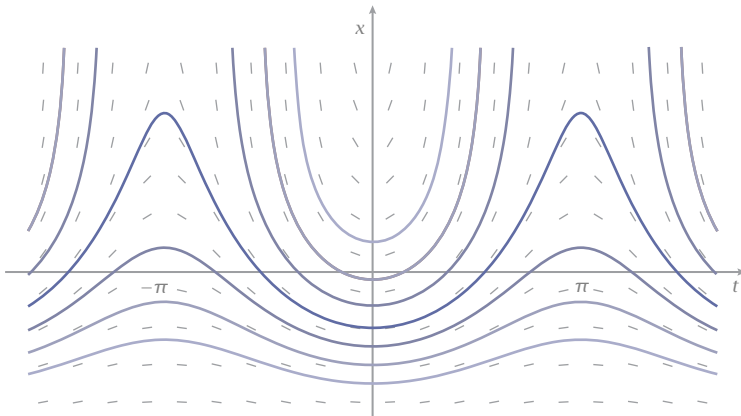
Diese Lösung existiert für $x_0 < -\log 2$ für alle t , und für $x_0 = -\log 2$ auf $(-\pi, \pi)$ mit $x(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \pm\pi$. Für größer werdendes x_0 wird dieses Intervall immer kleiner und konvergiert für $x_0 \rightarrow \infty$ gegen 0. ◀

11.4

Homogene Differenzialgleichungen

Eine Differenzialgleichung der Form

$$\dot{x} = h(x/t)$$

Abb 6 Lösungen zu $\dot{x} = e^x \sin t$ 

heißt *homogene Differentialgleichung*³ – *homogen*, weil die rechte Seite invariant ist unter Skalierung beider Koordinaten mit demselben Faktor. Für die Funktion f mit $f(t, x) = h(x/t)$ gilt also

$$f(\lambda t, \lambda x) = f(t, x), \quad \lambda > 0.$$

Umgekehrt definiert jede Funktion f mit dieser Eigenschaft eine Funktion von x/t , denn dann gilt

$$f(t, x) = f(1, x/t) =: h(x/t), \quad t > 0.$$

Bemerkung Allgemeiner heißt eine auf einem Vektorraum definierte Funktion f *homogen vom Grad α* , falls

$$f(\lambda u) = \lambda^\alpha f(u), \quad \lambda > 0.$$

So ist $x^k y^{n-k}$ für jedes $0 \leq k \leq n$ homogen vom Grad n . Die rechte Seite einer homogenen Differentialgleichung ist also homogen vom Grad 0. –

Eine homogene Differentialgleichung kann auf eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen zurückgeführt werden.

Satz Sei h stetig auf einem Intervall I und $x_0/t_0 \in I$. Dann ist $\varphi: I_0 \rightarrow \mathbb{R}$ eine lokale Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = h(x/t), \quad x(t_0) = x_0, \tag{10}$$

³ Nicht zu verwechseln mit der homogenen *linearen* Differentialgleichung.

genau dann, wenn

$$\psi : I_0 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(t) = \frac{\varphi(t)}{t}$$

eine lokale Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{z} = \frac{h(z) - z}{t}, \quad z(t_0) = \frac{x_0}{t_0} \quad (11)$$

darstellt. ✕

⟨⟨⟨ Dann sind zwei einfache Rechnungen. Ist φ Lösung von (10), so gilt

$$\dot{\psi} = \left(\frac{\varphi}{t}\right)' = \frac{\dot{\varphi}}{t} - \frac{\varphi}{t^2} = h\left(\frac{\varphi}{t}\right) \frac{1}{t} - \frac{\varphi}{t^2} = \frac{h(\psi) - \psi}{t}$$

sowie $\psi(t_0) = \varphi(t_0)/t_0 = x_0/t_0$. Also ist ψ Lösung von (11). Ist umgekehrt ψ eine solche Lösung und definieren wir φ durch $\varphi(t) = t\psi(t)$, so gilt

$$\dot{\varphi} = (t\psi)' = \psi + t\dot{\psi} = \psi + (h(\psi) - \psi) = h(\psi) = h(\varphi/t)$$

sowie $\varphi(t_0) = t_0\psi(t_0) = x_0$. Also ist φ Lösung von (10). ⟩⟩⟩

In der praktischen Rechnung substituiert man in der Differenzialgleichung

$$z = x/t,$$

was ja auch nahe liegt, denn schließlich ist die rechte Seite eine Funktion dieser Variablen. Aus $x = tz$ folgt dann $\dot{x} = z + t\dot{z}$ und damit

$$z + t\dot{z} = \dot{x} = h(z),$$

und das ist die Differenzialgleichung (11). Der Satz sagt also aus, dass diese Rechnung korrekt ist.

▶ **Erstes Beispiel** Die Differenzialgleichung

$$\dot{x} = 1 + \frac{x}{t} + \frac{x^2}{t^2}, \quad t \neq 0,$$

geht durch die Substitution $z = x/t$ über in

$$\dot{z} = \frac{1 + z^2}{t}, \quad t \neq 0.$$

Separation der Variablen ergibt

$$\arctan z = \int \frac{dz}{1 + z^2} = \int \frac{dt}{t} = \log |t| + c.$$

Dies ergibt $z = \tan(\log |t| + c)$, und durch Rücksubstitution die allgemeine Lösung der ursprünglichen Differenzialgleichung,

$$\varphi(t) = t \tan(\log |t| + c). \quad \blacktriangleleft$$

Homogene Differenzialgleichungen sind gelegentlich nicht sofort als solche zu erkennen. Hier hilft der Test, ob die rechte Seite invariant ist unter gleichzeitiger Skalierung von x und t .

► *Zweites Beispiel* Die Differenzialgleichung

$$\dot{x} = \frac{x + \sqrt{t^2 + x^2}}{t}, \quad t > 0,$$

ist ebenfalls homogen, denn für die rechte Seite gilt $f(\lambda x, \lambda t) = f(x, t)$ für $\lambda > 0$. Für $z = x/t$ erhalten wir

$$z + t\dot{z} = \dot{x} = \frac{tz + \sqrt{t^2 + t^2z^2}}{t} = z + \sqrt{1 + z^2},$$

oder

$$t\dot{z} = \sqrt{1 + z^2}, \quad t > 0.$$

Dies löst man nun wieder mit Separation der Variablen. Aus A-10.24

$$\log(z + \sqrt{1 + z^2}) = \int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}} = \int \frac{dt}{t} = \log t + c$$

folgt

$$z + \sqrt{1 + z^2} = pt, \quad p = e^c > 0.$$

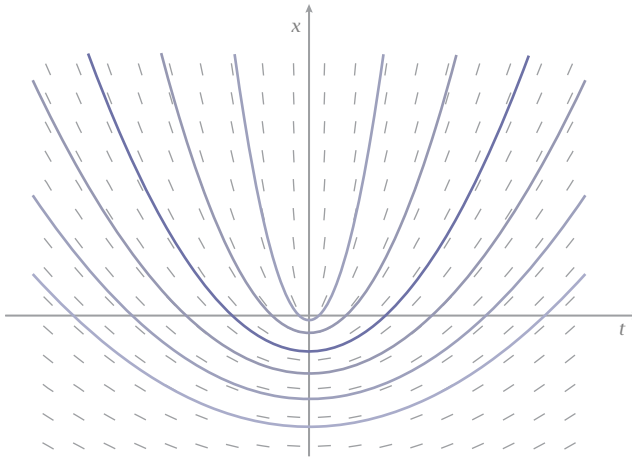
Quadrieren von $z - pt = \sqrt{1 + z^2}$ führt schließlich zu $2ptz = p^2t^2 - 1$ und damit zur Lösung

$$\varphi(t) = \frac{p^2t^2 - 1}{2p}, \quad p > 0.$$

Diese lösen die Differenzialgleichung für $t > 0$, aber man verifiziert leicht, dass sie tatsächlich die Gleichung für alle t erfüllen.

Die Lösungen beschreiben eine Familie von zur x -Achse symmetrischen Parabeln mit Tiefpunkt bei $-1/2p$, Nullstellen bei $-1/p$ und $1/p$ und Brennpunkt im Koordinatenursprung. Es handelt sich um eine Familie *konfokaler Parabeln*. ◀

Abb 7 Konfokale Parabeln



11.5

Bernoulli- und Riccati-Gleichungen

Wir betrachten noch zwei weitere Typen elementarer Differenzialgleichungen.

■ Die Bernoulli-Gleichung

Diese hat die Gestalt

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)x^\alpha$$

mit stetigen Koeffizientenfunktion und $\alpha \in \mathbb{R}$. Mit $\alpha = 0$ und $\alpha = 1$ erhalten wir wieder die inhomogene respektive homogene lineare Differenzialgleichung, also nichts Neues. Daher sei $\alpha \neq 0$ und $\alpha \neq 1$.

Eine triviale Lösung ist $x \equiv 0$. Legen wir diese beiseite und nehmen $x > 0$ an, so führt die Substitution

$$y = x^{1-\alpha}$$

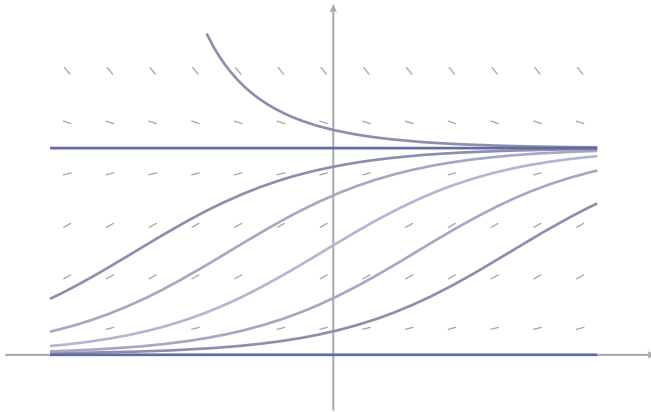
zu

$$\dot{y} = (1 - \alpha)a(t)x^{1-\alpha} + (1 - \alpha)b(t),$$

also zu der *inhomogenen linearen Differenzialgleichung*

$$\dot{y} = (1 - \alpha)a(t)y + (1 - \alpha)b(t).$$

Abb 8 Lösungen der logistischen Gleichung



Umgekehrt verifiziert man, dass eine positive Lösung y dieser Gleichung mit $x = y^{1/(1-\alpha)}$ eine Lösung der ursprünglichen Gleichung ergibt.

Ist $\alpha \neq 1$ eine ganze Zahl, so kann man auch noch negative Lösungen betrachten.

Besonders elegant ist die Situation für $\alpha = 2$. Hier geht die Gleichung

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)x^2.$$

durch die Substitution $y = 1/x$ über in

$$\dot{y} = -a(t)y - b(t).$$

► *Beispiel* Die letzte Gleichung mit konstanten Koeffizienten,

$$\dot{x} = \alpha x - \beta x^2, \quad \alpha, \beta > 0,$$

auch *Verhulst-* oder *logistische Gleichung* genannt, beschreibt ein modifiziertes Wachstumsgesetz. Interpretieren wir x als Größe einer Population und

$$\frac{\dot{x}}{x} = \alpha - \beta x$$

als ihre *Wachstumsrate*, so ist diese für kleine x ungefähr α , und wir erhalten exponentielles Wachstum. Wird die Population größer, verringert sich ihre Wachstumsrate proportional dazu. Beim Wert $x = \alpha/\beta$ ist sie Null. Abbildung 8 zeigt das qualitative Bild ihrer Lösungen _{A-8}. ◀

■ Die Riccati-Gleichung

Diese hat die Gestalt

$$\dot{x} = a(t)x + b(t)x^2 + h(t)$$

mit stetigen Koeffizientenfunktionen.

Für $h \equiv 0$ erhalten wir also eine Bernoulligleichung mit $n = 2$. Neben der Nulllösung erhalten wir mit der Substitution $y = 1/x$ alle weiteren Lösungen.

Für $h \neq 0$ gibt es keinen allgemeinen Lösungsansatz. Kennt man allerdings eine einzige partikuläre Lösung φ , so erhält man für

$$y = x - \varphi$$

die Gleichung

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \dot{x} - \dot{\varphi} = ax + bx^2 - a\varphi - b\varphi^2 \\ &= a(x - \varphi) + b(x - \varphi)(x + \varphi) \\ &= ay + by(y + 2\varphi). \end{aligned}$$

Wir erhalten also die *Bernoulli-Gleichung*

$$\dot{y} = (a + 2b\varphi)y + by^2.$$

Durch die Substitution $y = 1/z$ geht diese schließlich über in

$$\dot{z} = -(a + 2b\varphi)z - b,$$

wobei a, b, φ im Allgemeinen noch von t abhängen.

► *Beispiel* Die Riccati-Gleichung

$$\dot{x} = 2tx + x^2 + 2$$

hat die partikuläre Lösung

$$\varphi = -\frac{1}{t}.$$

Eine solche findet man übrigens, indem man eine Lösung versuchsweise als Polynom in t oder $1/t$ ansetzt. Für $y = x + 1/t$ erhalten wir dann

$$\dot{y} = (2t - 2/t)y + y^2,$$

und für $z = 1/y$ schließlich

$$\dot{z} = (2/t - 2t)z - 1. \quad \blacktriangleleft$$

Aufgaben

- 1 Man zeige: Die Gesamtheit aller Lösungen der inhomogenen Gleichung (4) bildet einen eindimensionalen *affinen* Raum

$$L = \varphi_0 + L_0 = \{\varphi_0 + e^{A(t)}c : c \in \mathbb{R}\}$$

mit einer partikulären Lösung φ_0 und einer Stammfunktion A von a . Dieser Raum hängt nicht von der Wahl von φ_0 und A ab.

- 2 Man zeige, das sämtliche in Beispiel 2 angegebenen Funktionen C^2 -Lösungen der Differenzialgleichung darstellen.
- 3 Bestimmen sie sämtliche Lösungen der Differenzialgleichung
 a. $\ddot{x} + x \sin t = \sin 2t$ b. $\ddot{x} - 3x \tan t = 1$.
- 4 Man löse die folgenden Anfangswertprobleme.
 a. $\dot{x} = x \sin t$, $x(0) = 0$ b. $t\dot{x} + x = x^2 \log t$, $x(1) = 1$
 c. $\dot{x} = x \sin t + t^2 \exp(-\cos t)$, $x(0) = 1$.
- 5 Man löse die folgenden Anfangswertprobleme.
 a. $\dot{x} = \frac{x \ln x}{\sin t}$, $x(\pi/2) = e^e$ b. $\dot{x} = \frac{\cos t}{\cos^2 x}$, $x(\pi) = \pi/4$.
- 6 Bestimmen sie die allgemeine Lösung zu

$$\dot{z} = (2t^{-1} - 2t)z - 1$$

für $t > 0$.

- 7 Man bestimme eine Differenzialgleichung erster Ordnung für folgende Scharen von Kurven mit dem Parameter $c \in \mathbb{R}$.
 a. $x = ct^2$ b. $x = ct^2 + c$ c. $x = ct^2 + c|c|$
- 8 Man bestimme sämtliche Lösungen der Riccati-Gleichungen
 a. $\dot{x} = x^2$ b. $\dot{x} = (x-a)(b-x)$ mit $0 < a < b$ c. $\dot{x} = x^2 + 1 - t^2$.
- 9 Sei $\varphi \in C^1((0, R])$. Gilt

$$\varphi(r) \leq ar\varphi'(r), \quad 0 < r \leq R,$$

mit $a > 0$, so folgt

$$\varphi(r) \leq (r/R)^{1/a} \varphi(R), \quad 0 < r \leq R.$$

- 10 *Lemma von Gronwall* Für die stetige Funktion $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ gelte

$$0 \leq u(t) \leq a + b \int_0^t u(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Dann ist

$$0 \leq u(t) \leq ae^{bt}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Insbesondere ist $u \equiv 0$, falls $a = 0$. *Hinweis:* Setze $v(t) = a + \int_0^t bu(s) ds$ und zeige, dass $e^{-bt}v(t)$ monoton fällt.

12

Ergänzungen

12.1

Der Satz von Arzelà-Ascoli

Eine beliebige Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge, wenn sie beschränkt ist. Das ist der Satz von Bolzano-Weierstrass _{5.17}. Gibt es auch einen entsprechenden Satz für beliebige Folgen stetiger reellwertiger Funktionen auf einem Intervall?

Genauer sei I ein Intervall und (f_n) eine beliebige Folge in $C(I)$. Unter welchen Bedingungen existiert immer eine Teilfolge, die in $C(I)$ bezüglich der Supremumsnorm konvergiert?

Notwendig ist sicherlich die *punktweise Beschränktheit* der Folge, also

$$\sup_n |f_n(t)| < \infty, \quad t \in I.$$

Wie das Beispiel der Funktionen $t \mapsto t^n$ auf $[0, 1]$ zeigt, ist wohl auch folgende Eigenschaft erforderlich _{A-5}.

Definition Eine Folge (f_n) von Funktionen in $C(I)$ heißt *gleichgradig stetig*, wenn es zu jedem Punkt $a \in D$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein offenes Intervall I_a gibt, so dass

$$|f_n(t) - f_n(a)| < \varepsilon, \quad x \in I_a \cap I,$$

für fast alle n . ✕

Eine Umgebung I_a »funktioniert« also für alle Funktionen in der Folge. Im Allgemeinen hängt diese Umgebung aber vom Punkt a ab.

Der Satz von Arzelà-Ascoli sagt nun aus, dass diese beiden Bedingungen auch hinreichend sind, falls das Intervall *kompakt* ist.

- 1 **Satz von Arzelà-Ascoli** Sei K ein kompaktes Intervall. Dann besitzt jede punktweise beschränkte, gleichmäßig stetige Folge von Funktionen in $C(K)$ eine gleichmäßig konvergente Teilfolge. \times

⟨⟨⟨ Sei (f_n) eine solche Folge in $C(K)$ und $\varepsilon > 0$ zunächst beliebig. Wir zeigen, dass es dann eine Teilfolge (f_n°) und ein $N \geq 1$ gibt, so dass

$$\|f_n^\circ - f_m^\circ\|_K < \varepsilon, \quad n, m \geq N. \quad (1)$$

Aufgrund der gleichmäßigen Stetigkeit der Folge existiert zu jedem Punkt $a \in K$ ein offenes Intervall I_a , so dass für fast alle n

$$|f_n(t) - f_n(a)| < \varepsilon/3, \quad t \in I_a \cap K.$$

Diese Intervalle bilden eine offene Überdeckung der kompakten Menge K . Aufgrund des Satzes von Heine-Borel _{10.10} gibt es dann auch endlich viele solche Intervalle I_1, \dots, I_r , die K überdecken. Auf diesen gilt dann 1 mit *einem* N hinreichend groß.

Wählen wir nun je einen Punkt $a_i \in I_i \cap K$ für $1 \leq i \leq r$, so sind aufgrund der punktweisen Beschränktheit von (f_n) die Folgen $(f_n(a_i))$ beschränkt. Aufgrund des Satzes von Bolzano-Weierstrass _{5.17} gibt es daher eine Teilfolge, nennen wir sie (f_n°) , die in den Punkten a_1, \dots, a_r konvergiert und damit auch eine Cauchyfolge bildet. Wir können also N auch noch so groß wählen, dass

$$|f_n^\circ(a_i) - f_m^\circ(a_i)| < \varepsilon/3, \quad n, m \geq N, \quad 1 \leq i \leq r. \quad (2)$$

Jeder andere Punkt $t \in K$ liegt nun in wenigstens einem Intervall I_i . Mit den Ungleichungen 1 und (2) gilt dann, für $n, m \geq N$,

$$\begin{aligned} & |f_n^\circ(t) - f_m^\circ(t)| \\ & \leq |f_n^\circ(t) - f_n^\circ(a_i)| + |f_n^\circ(a_i) - f_m^\circ(a_i)| + |f_m^\circ(a_i) - f_m^\circ(t)| \\ & < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 \\ & = \varepsilon. \end{aligned}$$

Da dies für jeden Punkt $t \in K$ gilt, folgt damit (1).

Betrachte nun irgendeine ε -Nullfolge, zum Beispiel $\varepsilon_k = 2^{-k}$. Dann existiert eine solche Teilfolge (f_n^1) bezüglich ε_1 , dann *darin* eine Teilfolge (f_n^2) bezüglich ε_2 , und so weiter. Es existiert also eine *sukzessive Auswahl* von Teilfolgen (f_n^ν) für $\nu = 1, 2, \dots$ mit der Eigenschaft, dass

$$\|f_n^\nu - f_m^\nu\|_K < \varepsilon_\nu, \quad n, m \geq N_\nu,$$

für gewisse große N_ν . Die *Cantorsche Diagonalfolge* (f_n^n) hiervon ist dann eine Cauchyfolge bezüglich $\|\cdot\|_K$. Aufgrund der Vollständigkeit des Raumes $C(K)$ ist sie auch gleichmäßig konvergent gegen eine Funktion $f \in C(K)$. $\rangle\rangle\rangle$

Bemerkungen a. Der Definitionsbereich der Funktionen kann tatsächlich eine beliebige kompakte Menge in \mathbb{R} oder auch \mathbb{R}^n sein. Denn wir haben lediglich die Eigenschaft verwendet, dass jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

b. Der Wertebereich der Funktionen kann auch der \mathbb{R}^n sein. Denn wir haben dort lediglich den Satz von Bolzano-Weierstrass benötigt. \rightarrow

Der Satz von Arzelà-Ascoli spielt für Folgen stetiger Funktionen die Rolle, die der Satz von Bolzano-Weierstrass für Folgen im \mathbb{R}^n spielt. Eine schöne Anwendung ist der Beweis des Existenzsatzes von Peano im nächsten Band.

12.2

Differenzierbarkeit

Es gibt Funktionen auf \mathbb{R} , die stetig, aber *nirgends* differenzierbar sind. Ebenso gibt es Funktionen, deren Taylorreihe zwar überall konvergiert, aber nicht die Funktion darstellt. Hierzu die klassischen Beispiele.

■ Stetig, aber nirgends differenzierbar

Sei ϕ_0 die mit der Periode 1 fortgesetzte Betragsfunktion auf $[-1/2, 1/2]$ wie in Abbildung 1. Es ist also

$$\phi_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi_0(t) = |t - [t + 1/2]|,$$

wobei $[\cdot]$ die Gaußklammer bezeichnet. Diese Funktion ist stetig, stückweise affin auf Intervallen der Länge $1/2$ mit Steigung 1 oder -1 , und periodisch mit Periode 1. Für $n \geq 1$ sei dann

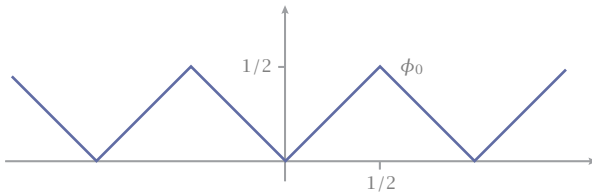
$$\phi_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi_n(t) = 4^{-n} \phi_0(4^n t).$$

Auch diese Funktionen sind stetig, periodisch mit Periode 4^{-n} , und stückweise affin auf Intervallen der Länge $4^{-n}/2$ mit Steigungen 1 oder -1 .

2 Satz Die Funktion

$$\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(t) = \sum_{n \geq 1} \phi_n(t)$$

ist überall stetig, aber in keinem Punkt differenzierbar. \times

Abb 1 Die Funktion ϕ_0 

««« Es ist

$$\left\| \sum_{k=n}^m \phi_k \right\|_{\mathbb{R}} \leq \sum_{k=n}^m \|\phi_k\|_{\mathbb{R}} = \frac{1}{2} \sum_{k \geq n} 4^{-k} < 4^{-n}.$$

Also konvergiert die Reihe gleichmäßig auf \mathbb{R} , und somit ist ϕ stetig 7.33.

Sei jetzt a ein beliebiger Punkt auf \mathbb{R} und $n \geq 1$. Die Funktionen ϕ_1, \dots, ϕ_n haben konstante Steigung auf Intervallen der Länge $4^{-n}/2$. Wählen wir also $h_n = 4^{-n}/4$ oder $h_n = -4^{-n}/4$ entsprechend, so gilt dies insbesondere auf dem Intervall zwischen a und $a + h_n$. Es ist dann

$$\left| \frac{\phi_k(a + h_n) - \phi_k(a)}{h_n} \right| = 1, \quad k = 1, \dots, n.$$

Dagegen gilt

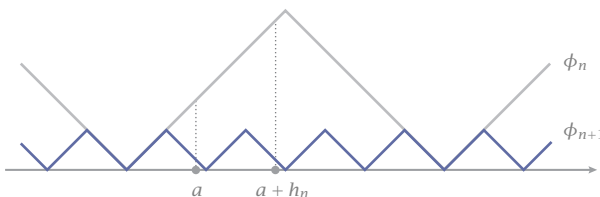
$$\phi_k(a + h_n) = \phi_k(a), \quad k > n,$$

da alle ϕ_k mit $k > n$ periodisch mit Periode h_n sind. Es gilt somit

$$\frac{\phi(a + h_n) - \phi(a)}{h_n} = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\phi_k(a + h_n) - \phi_k(a)}{h_n},$$

und jeder Summand ist vom Betrag 1. Entlang $h_n \rightarrow 0$ bilden die Differenzenquotienten von ϕ zum Punkt a somit keine Cauchyfolge. Also ist ϕ im Punkt a auch nicht differenzierbar. »»»

Abb 2 Zum Beweis von Satz 2



■ Glatt, aber nicht analytisch

3 Das Beispiel von Cauchy Die Funktion

$$\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(t) = \begin{cases} e^{-1/t^2}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

ist unendlich oft differenzierbar, und es gilt $\phi^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \geq 0$. Insbesondere gilt $T_0\phi \equiv 0 \neq \phi$ auf $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$. \times

Die Taylorreihe dieser Funktion bei 0 verschwindet also identisch und konvergiert trivialerweise auf ganz \mathbb{R} . Aber natürlich ist die Funktion ϕ selbst nicht die Nullfunktion, wird also nicht von ihrer Taylorreihe dargestellt. Somit ist ϕ auch nicht reell analytisch.

⟨⟨⟨ Auf \mathbb{R}^* ist ϕ beliebig oft differenzierbar. Genauer zeigt man mit Induktion für alle $n \geq 0$, dass

$$\phi^{(n)}(t) = p_n(1/t) e^{-1/t^2}, \quad t \neq 0,$$

mit einem Polynom p_n vom Grad $\leq 3n$. Wegen $t^m e^{-t} \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ für alle $m \geq 0$ folgt hieraus

$$\lim_{t \rightarrow 0} \phi^{(n)}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t) e^{-t^2} = 0, \quad n \geq 0.$$

Daraus folgt induktiv, dass $\phi^{(n)}$ in 0 stetig ist, dort auch differenzierbar ist, und dass $\phi^{(n+1)}(0) = 0$ gilt. $\rangle\rangle\rangle$

Eine Variante dieses Beispiels ist die Funktion

$$\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(t) = \begin{cases} e^{-t^2/(1-t^2)}, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 1, \end{cases}$$

die ebenfalls unendlich oft differenzierbar ist. Darüber hinaus verschwindet sie außerhalb von $[-1, 1]$ identisch. Ihr Träger $\text{supp } \psi := \{t \in \mathbb{R} : \psi(t) \neq 0\}^-$ ist also kompakt.

Der Raum aller C^∞ -Funktionen auf \mathbb{R} mit kompakten Träger wird mit $C_0^\infty(\mathbb{R})$ bezeichnet und spielt in der Analysis eine wichtige Rolle. Wie die Funktion ψ zeigt, ist er nicht leer.

Abb 3

Das Beispiel von Cauchy

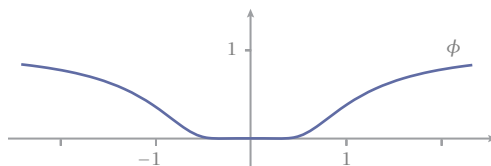
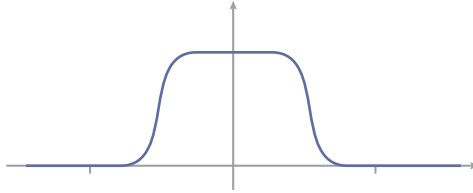


Abb 4

Eine C^∞ -Funktion mit kompakten Träger



12.3 Faltungen

Wir betrachten stetige Funktionen auf der reellen Geraden, die beschränkt oder sogar absolut integrierbar sind. Für Erstere haben wir bereits den Raum

$$C_b(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}) : \|f\|_\infty < \infty\}$$

eingeführt, wobei

$$\|f\|_\infty := \sup_{-\infty < t < \infty} |f(t)|$$

die *Supremums-* oder *L^∞ -Norm* von f bezeichnet. Für Letztere definieren wir den Raum

$$C_s(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}) : \|f\|_1 < \infty\},$$

wobei

$$\|f\|_1 := \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$$

als die *L^1 -Norm* von f bezeichnet wird.

Für eine beliebige stetige Funktion können beide Normfunktionen den Wert ∞ annehmen. Auch ist nicht jede stetige beschränkte Funktion integrierbar, und nicht jede stetige integrierbare Funktion ist beschränkt. Es gilt somit

$$C_s(\mathbb{R}) \not\subseteq C_b(\mathbb{R}), \quad C_b(\mathbb{R}) \not\subseteq C_s(\mathbb{R}).$$

Bemerkung In Abschnitt 7.6 haben wir gezeigt, dass $C_b(\mathbb{R})$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ein vollständiger normierter Raum ist. Der Raum $C_s(\mathbb{R})$ mit der L^1 -Norm $\|\cdot\|_1$ ist zwar ebenfalls normiert, aber *nicht vollständig*. Denn es gibt Folgen in $C_s(\mathbb{R})$, die punktweise und bezüglich $\|\cdot\|_1$ gegen *nichtstetige* Funktionen konvergieren A-10.22. \rightarrow

■ Die Faltungsoperation

Die Faltungsoperation erzeugt mithilfe eines uneigentlichen Integrals aus zwei Funktionen eine neue Funktion.

- 4 **Definition** Sei $f \in C_b(\mathbb{R})$ und $g \in C_s(\mathbb{R})$ oder umgekehrt. Dann ist die **Faltung** oder **Konvolution** von f und g erklärt als die Funktion

$$f * g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) dt. \quad \times$$

⟨⟨⟨⟨ Wir müssen zeigen, dass das uneigentliche Integral für jedes x konvergiert. Ist zum Beispiel $f \in C_b(\mathbb{R})$ und $g \in C_s(\mathbb{R})$, so gilt für alle $r > 0$

$$\int_0^r |f(x-t)g(t)| dt \leq \|f\|_{\infty} \int_0^r |g(t)| dt \leq \|f\|_{\infty} \|g\|_1.$$

Daraus folgt die Konvergenz des Integrals für $r \rightarrow \infty$ 10.20. Gleiches gilt für das Integral über $[-r, 0]$. Für den umgekehrten Fall argumentiert man entsprechend. Somit ist $f * g$ wohldefiniert. ⟩⟩⟩⟩

Die Formulierung ›Faltung von f und g ‹ ist symmetrisch in den Funktionen f und g , die Definition jedoch scheinbar nicht. Dies täuscht jedoch.

Lemma Unter den Voraussetzungen der Faltungsoperation 4 gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t) dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

und somit $f * g = g * f$. \times

⟨⟨⟨⟨ Die Substitution $t = x - s$ ergibt für jedes $r > 0$

$$\int_{-r}^r f(x-t)g(t) dt = - \int_{x+r}^{x-r} f(s)g(x-s) ds = \int_{x-r}^{x+r} f(s)g(x-s) ds.$$

Da die uneigentlichen Integrale für $r \rightarrow \infty$ auf beiden Seiten existieren, folgt hieraus durch Grenzübergang die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩

■ Der Faltungsoperator

Fixieren wir ein $\varphi \in C_s(\mathbb{R})$, so können wir jeder Funktion $f \in C_b(\mathbb{R})$ durch Faltung mit φ eine neue Funktion $f * \varphi$ zuordnen. Die Funktion φ definiert somit einen *Operator*

$$T_{\varphi}: f \mapsto T_{\varphi}f = f * \varphi.$$

Dieser Operator hat viele interessante und nützliche Eigenschaften, von denen wir hier einige wenige erwähnen.

5 **Satz** Jede Funktion $\varphi \in C_s(\mathbb{R})$ definiert einen linearen *Faltungoperator*

$$T_\varphi : C_b(\mathbb{R}) \rightarrow C_b(\mathbb{R}), \quad T_\varphi f := f * \varphi.$$

Dieser ist beschränkt, genauer gilt

$$\|T_\varphi f\|_\infty \leq \|\varphi\|_1 \|f\|_\infty. \quad \times$$

◀◀◀◀ Wir zeigen zuerst, dass $T_\varphi f$ wieder stetig ist. Fixiere ein beliebiges x , und betrachte

$$|T_\varphi f(x+h) - T_\varphi f(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+h-t) - f(x-t)| |\varphi(t)| dt.$$

Das rechts stehende Integral zerlegen wir in drei Teilintegrale über $(-\infty, -r]$, $[-r, r]$ und $[r, \infty)$, wobei r noch geeignet zu wählen ist.

Das linke und rechte Teilintegrale können wir durch

$$\|f\|_\infty \left\{ \int_{-\infty}^{-r} |\varphi(t)| dt + \int_r^{\infty} |\varphi(t)| dt \right\}$$

abschätzen. Da φ integrierbar ist, konvergiert der Ausdruck in Klammern für $r \rightarrow \infty$ gegen Null. Zu jedem gegebenen $\varepsilon > 0$ existiert daher ein $r > 0$ so, dass $\{\cdot\} < \varepsilon$ gilt. Der gesamte Ausdruck ist dann beschränkt durch $\varepsilon \|f\|_\infty$.

Bleibt noch das Integral

$$\int_{-r}^r |f(x+h-t) - f(x-t)| |\varphi(t)| dt.$$

Für $|h| \leq 1$ wird f nur innerhalb eines kompakten Intervalls um x ausgewertet. Dort ist f aber *gleichmäßig* stetig 7.32. Zu dem bereits gegebenen $\varepsilon > 0$ existiert daher ein $0 < \delta \leq 1$ so, dass

$$|f(x+h-t) - f(x-t)| < \varepsilon, \quad |h| < \delta, \quad |t| \leq r.$$

Das letzte Integral ist dann durch $\varepsilon \|\varphi\|_1$ beschränkt.

Beide Abschätzungen zusammen ergeben

$$|T_\varphi f(x+h) - T_\varphi f(x)| \leq (\|f\|_\infty + \|\varphi\|_1)\varepsilon, \quad |h| < \delta.$$

Da für jedes ε und solches δ existiert, ist $T_\varphi f$ im Punkt x stetig.

Wir zeigen nun, dass $T_\varphi f$ auch beschränkt ist. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|T_\varphi f(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)\varphi(t)| dt \leq \|f\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| dt = \|f\|_\infty \|\varphi\|_1.$$

Also gilt auch

$$\|T_\varphi f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |T_\varphi f(x)| \leq \|f\|_\infty \|\varphi\|_1.$$

Da dies für jedes $f \in C_b(\mathbb{R})$ gilt, ist $T_\varphi f$ auch beschränkt. – Die Linearität von T_φ schließlich ist offensichtlich. »»»»

Das Interessante am Operator T_φ ist, dass sich viele Eigenschaften von der Funktion φ auf die gefaltete Funktion $T_\varphi f$ vererben, unabhängig von den Eigenschaften von f selbst. Ist zum Beispiel φ stetig differenzierbar und die Ableitung φ' ebenfalls auf ganz \mathbb{R} integrierbar, so darf man in der folgenden Rechnung Differenziation und Integration vertauschen – was wir allerdings erst später beweisen werden – und erhält

$$\begin{aligned}(T_\varphi f)' &= (f * \varphi)' = \partial_x \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-t)f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x \varphi(x-t)f(t) dt \\ &= f * \varphi' \\ &= T_{\varphi'} f,\end{aligned}$$

wobei ∂_x die Ableitung nach x bezeichnet. Die Ableitung ∂_x operiert also auf φ und nicht auf f .

Entsprechendes gilt per Induktion auch für höhere Ableitungen. Sei dafür

$$C_b^r(\mathbb{R}) := \{\varphi \in C^r(\mathbb{R}) : \varphi^{(r)} \in C_b(\mathbb{R})\}.$$

6 Satz Sei $\varphi \in C^r(\mathbb{R})$ mit $\varphi^{(r)} \in C_b(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$T_\varphi : C_b(\mathbb{R}) \rightarrow C_b^r(\mathbb{R}),$$

und es ist

$$\partial^k T_\varphi f = T_{\partial^k \varphi} f, \quad k = 0, \dots, r. \quad \times$$

Die Voraussetzung dieses Satzes ist zum Beispiel für jedes $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ für alle $r \geq 0$ erfüllt. Denn jede Ableitung von φ ist stetig, hat kompakten Träger wie φ und ist somit integrierbar. Wir erhalten damit folgendes

7 Korollar Ist $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, so gilt

$$T_\varphi : C_b(\mathbb{R}) \rightarrow C_b^\infty(\mathbb{R}). \quad \times$$

Wir werden diese beiden Sätze im Folgenden nicht benötigen – und daher auch nicht beweisen –, da wir mit dem Weierstraßschen Approximationssatz ⁹ eine noch stärkere Aussage beweisen werden.

12.4

Diracfolgen

Mithilfe von Faltungen lässt sich die Aufgabe elegant lösen, stetige Funktionen durch *glatte*, das heißt, unendlich oft differenzierbare Funktionen zu approximieren. Benötigt werden dazu Funktionen, die die Faltungsoperation auf immer kleinere Umgebungen eines Punktes konzentrieren.

Definition Eine Folge (φ_n) von Funktionen in $C_s(\mathbb{R})$ heißt *Diracfolge*, wenn sie folgende Bedingungen erfüllt.

$$(D-1) \quad \varphi_n \geq 0 \quad \text{für alle } n,$$

$$(D-2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) dt = 1 \quad \text{für alle } n, \text{ und}$$

$$(D-3) \quad \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(t) dt \rightarrow 1 \quad \text{für jedes } \delta > 0. \quad \times$$

Die ersten beiden Bedingungen bewirken, dass die Faltung mit jedem φ_n eine Mittelwertbildung darstellt. Die dritte Bedingung bringt zum Ausdruck, dass diese Mittelwertbildungen gegen eine Punktauswertung konvergieren. Denn aus (D-2) und (D-3) folgt für jedes $\delta > 0$ auch

$$\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \varphi_n(t) dt \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Alles außerhalb von $[-\delta, \delta]$ wird somit asymptotisch mit 0 gewichtet.

Diracfolgen sind leicht zu beschaffen:

Lemma Ist ψ eine stetige, nichtnegative Funktion mit kompaktem Träger und $\|\psi\|_1 = 1$, so wird durch

$$\varphi_n(t) := n\psi(nt), \quad n \geq 1,$$

eine Diracfolge (φ_n) definiert. Ist ψ eine glatte Funktion, so sind auch alle φ_n glatt. \times

⟨⟨⟨ Offensichtlich ist $\varphi_n \geq 0$, und mit der Substitution $t = ns$ erhält man

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) dt = n \int_{-\infty}^{\infty} \psi(nt) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(s) ds = 1.$$

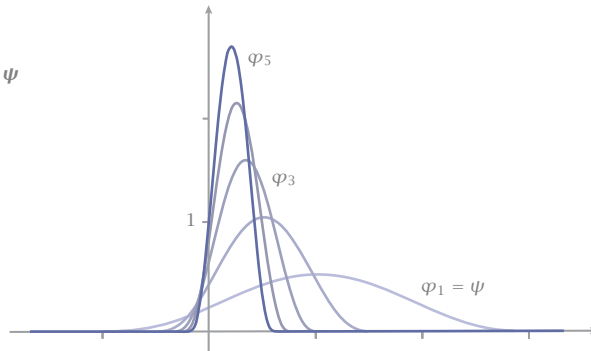
Ist $\text{supp } \psi \subset [-r, r]$, so ist $\text{supp } \varphi_n \subset [-r/n, r/n]$ und deshalb

$$\int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) dt = 1, \quad n \geq r/\delta.$$

Die letzte Behauptung ist offensichtlich richtig. ⟩⟩⟩

Abb 5

Eine Diracfolge mit
einer Startfunktion ψ
mit Träger $[-1, 3]$



■ Ein allgemeiner Approximationssatz

Faltungen einer *gleichmäßig* stetigen Funktion f mit den Funktionen einer beliebigen Diracfolge führen zu stetigen Funktionen f_n , die gleichmäßig gegen die Ausgangsfunktion f konvergieren.

- 8 **Approximationssatz** Ist $f \in C_b(\mathbb{R})$ *gleichmäßig stetig* und (φ_n) eine Diracfolge, so gilt

$$f * \varphi_n \Rightarrow f. \quad \times$$

⟨⟨⟨⟨ Sei $f_n = f * \varphi_n$. Wegen (D-2) ist

$$f(x) = f(x) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi_n(t) dt.$$

Mit (D-1) ist dann

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x-t)| \varphi_n(t) dt. \quad (3)$$

Dieses Integral zerlegen wir in einen Anteil über ein kleines Mittelstück $[-\delta, \delta]$ und den Rest.

Sei $\varepsilon > 0$. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle x gleichmäßig

$$|f(x-t) - f(x)| < \varepsilon, \quad |t| < \delta.$$

Für das Mittelstück des Integrals erhalten wir damit

$$\int_{-\delta}^{\delta} |f(x) - f(x-t)| \varphi_n(t) dt < \varepsilon \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(t) dt < \varepsilon, \quad (4)$$

denn es wird ja nur über $|t| \leq \delta$ integriert.

Wegen (D-2) können wir den Integralanteil über das Komplement von $[-\delta, \delta]$ beschränken durch

$$2 \|f\|_\infty \left\{ \int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} \varphi_n(t) dt \right\} = 2 \|f\|_\infty \left\{ 1 - \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(t) dt \right\}.$$

Der letzte Ausdruck konvergiert wegen (D-3) für $n \rightarrow \infty$ gegen 0. Es gibt somit ein $N \geq 1$, so dass

$$\int_{-\infty}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\infty} |f(x) - f(x-t)| \varphi_n(t) dt < \varepsilon, \quad n \geq N. \quad (5)$$

Die Abschätzungen (3), (4) und (5) ergeben zusammen $\|f_n - f\|_\infty < 2\varepsilon$ für $n \geq N$. Das war zu zeigen. \gggg

■ Approximation durch Polynome

Von den Funktionen einer Diracfolge wird nur verlangt, dass sie stetig sind. Sind sie aber glatt, so sind auch die Faltungen $f * \varphi_n$ glatt. Eine gleichmäßig stetige Funktion f ist daher auch gleichmäßiger Limes glatter Funktionen. Die glattesten Funktionen sind die analytischen Funktionen, und unter diesen sind die Polynome die einfachsten. Dies führt zu der Frage, ob man eine beliebige stetige Funktion gleichmäßig durch *Polynome* approximieren kann. Auf einem unbeschränkten Intervall ist dies sicher nicht möglich, da dort jedes nicht konstante Polynom unbeschränkt ist. Für *kompakte* Intervalle dagegen gilt der

- 9 **Approximationssatz von Weierstraß** Sei I ein kompaktes Intervall. Dann ist jede stetige Funktion auf I gleichmäßiger Limes von Polynomen. \times

⟨⟨⟨⟨ Zunächst bemerken wir, dass wir uns auf den Fall

$$I = [0, 1], \quad f(0) = 0 = f(1) \quad (6)$$

zurückziehen können. Denn ist f stetig auf $I = [a, b]$, so ist $g = f \circ u$ mit

$$u(t) = (1-t)a + tb$$

stetig auf $[0, 1]$, und die Funktion $h = g - v$ mit

$$v(t) = (1-t)g(0) + tg(1)$$

verschwindet bei 0 und 1. Existieren nun Polynome q_n , die auf $[0, 1]$ gleichmäßig gegen h konvergieren, so sind $p_n = (q_n + v) \circ u^{-1}$ ebenfalls Polynome, die auf I gleichmäßig gegen $(h + v) \circ u^{-1} = f$ konvergieren. Somit können wir von (6) ausgehen.

Durch

$$F := \begin{cases} f & \text{auf } [0, 1], \\ 0 & \text{auf } \mathbb{R} \setminus [0, 1], \end{cases}$$

setzen wir zuerst f zu einer gleichmäßig stetigen Funktion F auf \mathbb{R} fort. Als Diracfolge wählen wir geeignete Polynome auf $[-1, 1]$, nämlich

$$\varphi_n = \lambda_n^{-1} (1 - t^2)^n, \quad |t| \leq 1. \quad (7)$$

Diese setzen wir ebenfalls durch 0 auf die restliche reelle Gerade stetig fort und bezeichnen sie dort mit Φ_n . Wählen wir

$$\lambda_n := \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt > 0,$$

so sind die Eigenschaften (D-1) und (D-2) offensichtlich erfüllt. Eigenschaft (D-3) zeigen wir im anschließenden Lemma 10.

Betrachte nun die Funktionen

$$p_n = F * \Phi_n.$$

Diese konvergieren gleichmäßig gegen F 8. Also konvergieren sie auf $[0, 1]$ gleichmäßig gegen f . Für $x \in [0, 1]$ gilt außerdem

$$\begin{aligned} (F * \Phi_n)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(t) \Phi_n(x - t) dt \\ &= \int_0^1 f(t) \Phi_n(x - t) dt \\ &= \lambda_n^{-1} \int_0^1 f(t) (1 - (x - t)^2)^n dt, \end{aligned}$$

denn im Integral in der zweiten Zeile ist $|x - t| \leq 1$, und dort ist Φ_n durch (7) gegeben. Aufgrund der binomischen Formel 3.22 ist $(1 - (x - t)^2)^n$ ein Polynom in x mit Koeffizienten, die von t abhängen. Nach Integration bezüglich t bleibt somit ein polynomialer Ausdruck in x . Mit anderen Worten, die p_n sind *Polynome*, und der Satz bis auf das folgende Lemma damit bewiesen. — Man beachte, dass der Beweis keinen Gebrauch macht von Satz 6. >>>>

10 **Lemma** Für die Polynome (7) gilt

$$\int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(t) dt \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

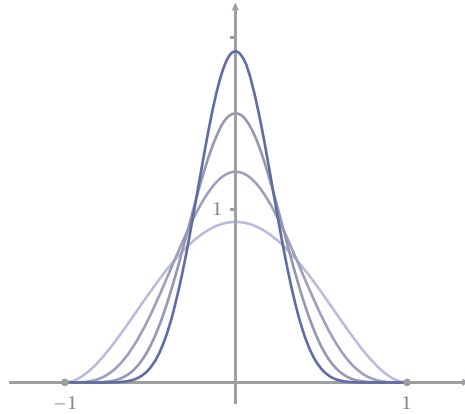
für jedes $\delta \in (0, 1)$. ✕

⟨⟨⟨ Da $1 - t^2$ auf $[0, 1]$ monoton fällt, gilt

$$\int_{\delta}^1 (1 - t^2)^n dt \leq (1 - \delta^2)^n.$$

Abb 6

Polynomiale Diracfunktionen auf $[-1, 1]$



Für den Normierungsfaktor λ_n haben wir andererseits

$$\lambda_n \geq \int_0^1 (1-t^2)^n dt = \int_0^1 (1-t)^n (1+t)^n dt \geq \int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{1}{n+1},$$

also

$$\frac{1}{\lambda_n} \leq n+1.$$

Für jedes $\delta \in (0, 1)$ gilt somit

$$\int_{\delta}^1 \varphi_n(t) dt \leq (n+1)(1-\delta^2)^n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Dasselbe gilt natürlich für das Integral über $[-1, -\delta]$. Da das Integral über das gesamte Intervall $[-1, 1]$ gleich 1 ist, folgt hieraus die Behauptung. \gggg

Aufgaben

- 1 **Abschneidefunktion** Man konstruiere zu jedem $\varepsilon > 0$ eine C^∞ -Funktion

$$\varphi_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad \varphi_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1, \\ 0, & |t| \geq 1 + \varepsilon. \end{cases}$$

- 2 Zu jeder Funktion $f \in C^1([a, b])$ existiert eine Folge von Polynomen p_n , so dass (p_n) gleichmäßig gegen f und (p'_n) gleichmäßig gegen f' konvergiert.
- 3 Zu *jeder* reellen Folge $(a_n)_{n \geq 0}$ konstruiere man eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit

$$\frac{1}{n!} f^{(n)}(0) = a_n, \quad n \geq 0.$$

Setze dazu

$$f = \sum_{n \geq 0} a_n \varphi((1 + a_n^2)t) t^n$$

mit einer geeigneten Abschneidefunktion φ .

- 4 Sei I ein kompaktes Intervall und (f_n) eine gleichgradig stetige Folge in $C(I)$. Dann ist (f_n) gleichmäßig - und damit auch punktweise - beschränkt genau dann, wenn $(f_n(a))$ für wenigstens ein $a \in I$ beschränkt ist.
- 5 Sei I ein beliebiges Intervall und (f_n) eine Cauchyfolge in $C(I)$ bezüglich der Supremumsnorm. Dann ist (f_n) gleichgradig stetig.

13

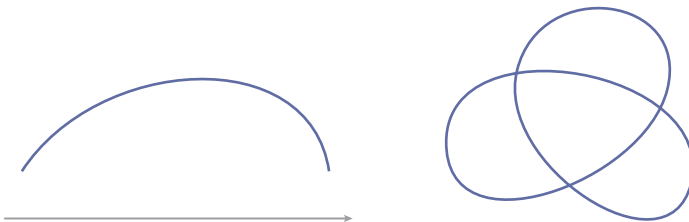
Kurven und Wege

Bisher kennen wir Kurven vor allem als Graphen reellwertiger Funktionen. Schreibt man aber eine Koordinate als Funktion einer anderen Koordinate, so sind die Darstellungsmöglichkeiten begrenzt. So lässt sich bereits ein Kreis nicht als Graph einer einzigen Funktion darstellen.

Wesentlich flexibler sind *parametrisierte Kurven*. Hier werden *alle* Koordinaten der Kurvenpunkte als Funktionen eines unabhängigen reellen *Parameters* dargestellt. Interpretieren wir diesen Parameter als Zeit, so können wir uns eine parametrisierte Kurve vorstellen als Reiseverlauf eines Punktes, der zu jedem Zeitpunkt angibt, an welchem Raumpunkt er sich befindet. Auf diese Weise lassen sich auch geschlossene oder mehrfach durchlaufene Kurven einfach beschreiben.

Parametrisierte Kurven bilden den ersten Schritt in Richtung der mehrdimensionalen Differenzialrechnung. Dabei können wir auch gleich Kurven in einem beliebigen Banachraum betrachten, denn eine Beschränkung auf endlich dimensionale Räume vereinfacht die Diskussion in keiner Weise.

Abb 1 Graph und Kurve



13.1

Kurven

Definition Eine *parametrisierte Kurve* oder kurz *Kurve* in einem Banachraum E ist eine stetige Abbildung $\gamma: I \rightarrow E$ eines nichtleeren Intervalls I in den Raum E , also ein Element des Raumes $C(I, E)$. Ihr Bild, also die Menge

$$\gamma(I) := \{\gamma(t) : t \in I\} \subset E,$$

heißt die *Spur* der Kurve γ in E . \times

Wir betrachten vor allem kompakte Intervalle $I = [a, b]$. Durchläuft t dieses Intervall von a nach b , so durchläuft der Punkt $\gamma(t)$ die Spur $\gamma(I)$ der Kurve von ihrem *Anfangspunkt* $\gamma(a)$ zu ihrem *Endpunkt* $\gamma(b)$. Die Abbildung γ selbst stellt eine *Parametrisierung* ihrer Spur dar. Im Allgemeinen erlaubt jede Spur unendlich viele verschiedene Parametrisierungen, da sie als reine Punktmenge keine Information über ihre Parametrisierung enthält.

Bemerkung In der Literatur wird allerdings auch die Spur gerne als Kurve bezeichnet, was auch dem allgemeinen Sprachgebrauch näher kommt. Im Bereich der Kurven ist die Terminologie überhaupt recht uneinheitlich. \rightarrow

Definition Eine Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow E$ heißt *geschlossen*, wenn ihr Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen, also $\gamma(a) = \gamma(b)$ gilt. Sie heißt *einfach* oder *doppelpunktfrei*, wenn sie auf $[a, b)$ und $(a, b]$ injektiv ist. \times

Eine geschlossene Kurve ist also doppelpunktfrei, wenn Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen, aber alle anderen Punkte ihrer Spur genau einmal durchlaufen werden. Der *Spur* allein sieht man allerdings nicht an, ob sie doppelpunktfrei ist oder nicht, da sie auch mehrfach durchlaufen sein kann.

► A. Jeder Punkt $p \in E$ ist die Spur einer *konstanten Kurve*

$$\gamma: I \rightarrow E, \quad \gamma(t) \equiv p.$$

Diese ist geschlossen, aber nicht doppelpunktfrei, falls $|I| > 0$.

Abb 2

Kurve in der Ebene

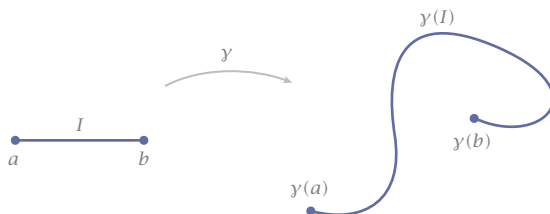
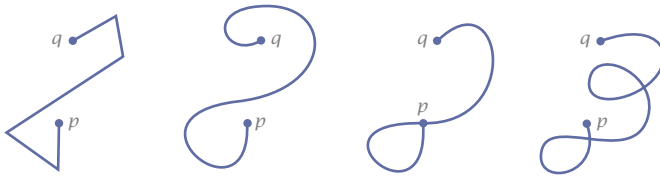


Abb 3 Nichtgeschlossene Kurven



B. Die *Strecke* mit Anfangspunkt p und Endpunkt q ist die Spur der Kurve

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow E, \quad \gamma(t) = (1 - t)p + tq.$$

Für $p \neq q$ ist diese Kurve doppelpunktfrei und nicht geschlossen. Für $p = q$ ist die Kurve konstant, geschlossen, aber nicht doppelpunktfrei.

C. Der Graph einer Funktion $f \in C(I)$ wird durch die Kurve

$$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, f(t))$$

parametrisiert. Diese ist immer doppelpunktfrei und nicht geschlossen.

D. Der Einheitskreis in der Ebene ist die Spur der geschlossenen, doppelpunktfreien Kurve ^{9,12}

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t).$$

E. Der n -mal durchlaufene Einheitskreis wird parametrisiert durch

$$\gamma_n: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_n(t) = (\cos nt, \sin nt), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Er ist geschlossen, aber für $|n| \neq 1$ nicht doppelpunktfrei. Für $n < 0$ wird er im mathematisch negativen Sinn - also im Uhrzeigersinn - durchlaufen. Für $n = 0$ degeneriert zu einem Punkt. ◀

Abb 4 Geschlossene Kurven

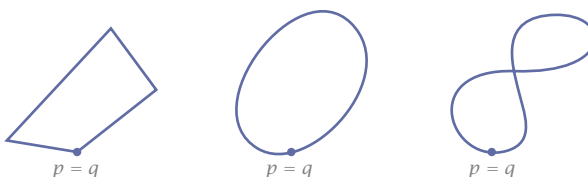
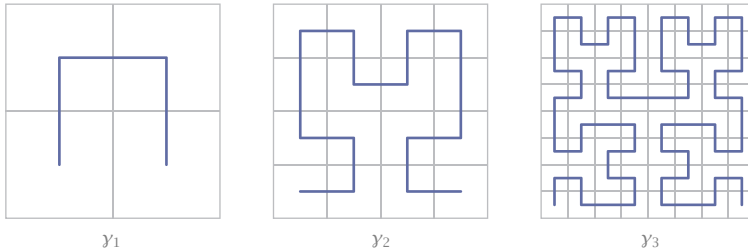


Abb 5 Konstruktion einer Peanokurve



■ Peano- und Jordankurven

Mit dem Begriff der Kurve als stetiger Abbildung eines Intervalls verbindet sich unwillkürlich die Anschauung einer Linie, die man ›ohne abzusetzen‹ von ihrem Anfangs- bis zu ihrem Endpunkt zeichnen kann. Man sollte meinen, ihre Stetigkeit verhindert ein allzu wildes Verhalten. Dem ist jedoch nicht so. Auf Peano geht zum Beispiel folgende Entdeckung zurück.

Satz von Peano Es gibt Kurven $\gamma: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$, die surjektiv sind. \times

Es gibt also Kurven, genannt *Peanokurven*, die ein Quadrat vollständig überdecken. Das stetige Bild einer *eindimensionalen* Menge kann somit *zweidimensional* sein. Somit ist die *Dimension* eines geometrischen Objektes nicht invariant unter *beliebigen* stetigen Abbildungen!

⟨⟨⟨⟨ *Beweisskizze* Die folgende Konstruktion geht auf Hilbert¹ zurück. Dabei wird induktiv eine Folge von Kurven $\gamma_n: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$ wie in Abbildung 5 konstruiert. Die Kurve γ_n bildet dabei jedes Teilintervall des in 4^n gleichlange Teile zerlegten Einheitsintervalls $[0, 1]$ in genau eines der 4^n gleichgroßen Teilquadrate von $[0, 1]^2$ mit Kantenlänge 2^{-n} ab. Beim Übergang von γ_n zu γ_{n+1} wird dabei in jedem dieser Quadrate der Verlauf so verändert, dass jedes Viertel dieses Quadrates in der in Abbildung 5 ersichtlichen Weise durchlaufen wird. Somit gilt auf jeden Fall

$$\|\gamma_n - \gamma_{n+1}\|_{[0,1]} = \max_{t \in [0,1]} \|\gamma_n(t) - \gamma_{n+1}(t)\|_E \leq \frac{2}{2^n}, \quad n \geq 1.$$

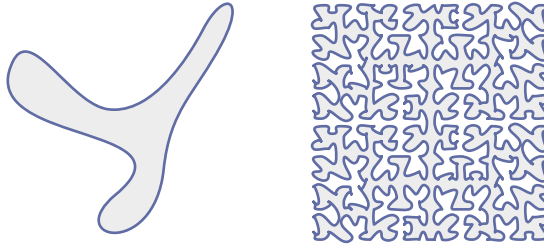
Für alle $m > n$ gilt somit auch

$$\|\gamma_n - \gamma_m\|_{[0,1]} \leq \sum_{k=n}^{m-1} \|\gamma_k - \gamma_{k+1}\|_{[0,1]} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{2}{2^k} = \frac{4}{2^n}.$$

¹ Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück. *Math. Ann.* **38** (1891), 459–460.

Abb 6

Zwei
Jordankurven



Somit konvergieren die Kurven γ_n auf $[0, 1]$ *gleichmäßig* gegen eine Abbildung $\gamma: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$, die aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz wiederum stetig ist ^{7.33}, also eine Kurve darstellt.

Andererseits durchläuft jede Kurve γ_m mit $m \geq n$ jedes Teilquadrat der n -ten Teilung von $[0, 1]^2$. Da die Feinheit dieser Teilung gegen Null strebt, liegt die Spur der Grenzkurve γ dicht in $[0, 1]^2$. Als stetiges Bild der kompakten Menge $[0, 1]$ ist sie aber auch kompakt ^{7.28}. Also gilt $\gamma([0, 1]) = [0, 1]^2$. \gggg

Eine »explizite« Darstellung einer Peanokurve wird in Aufgabe 18 gegeben.

Bei genauem Hinsehen stellt man fest, dass Peanokurven zwar surjektiv, aber nicht injektiv sind. Fordert man zusätzlich noch die Injektivität, so ergibt sich ein Bild, dass der Anschauung schon eher entspricht.

Jordanscher Kurvensatz *Ist Γ die Spur einer geschlossenen, doppel­punkt­frei­en Kurve in der euklidischen Ebene, so besteht ihr Komplement aus genau zwei disjunkten und zusammenhängenden Komponenten, genannt das Innere und das Äußere der Kurve. Dabei ist das Innere beschränkt, das Äußere unbeschränkt, und der Rand beider Komponenten ist genau Γ .* \times

Geschlossene und doppel­punkt­freie Kurven werden daher auch *Jordankurven* genannt. Der Satz scheint anschaulich klar, doch stellt sich heraus, dass der Beweis schwierig ist, wenn man beliebige *stetige* Kurven betrachtet. — Stetige Kurven können also durchaus »wild« sein. Wir werden deshalb vor allem differenzierbare Kurven betrachten.

13.2

Differenzierbare Kurven

Wir erklären nun, wann eine Kurve in einem Punkt differenzierbar ist. Wir gehen dabei wieder von der geometrischen Vorstellung aus, dass es in einem

solchen Punkt eine eindeutige Gerade gibt – die *Tangente* – welche die Kurve besser als jede andere Gerade approximiert. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Approximationsfehler bei Annäherung an den Berührungspunkt schneller als eine lineare Funktion gegen Null strebt.

Sei I ein nichtentartetes Intervall, $\gamma: I \rightarrow E$ eine Kurve, und $a \in I$. Eine Gerade α durch den Kurvenpunkt $\gamma(a)$ hat die Parameterdarstellung

$$\alpha(t) = \gamma(a) + v(t - a)$$

mit einem Vektor $v \in E$. Dabei lassen wir auch $v = 0$ zu. Ihr Approximationsfehler zur Kurve γ an der Stelle t ist $\|\gamma(t) - \alpha(t)\|_E$, und für diesen fordern wir

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{\|\gamma(t) - \alpha(t)\|_E}{|t - a|} = 0.$$

Wie im Fall reeller Funktionen einer Variablen ist dies höchstens für eine Wahl des Vektors v möglich $_{A-3}$. Das heißt, wenn es ein solches v gibt, so ist es eindeutig bestimmt.

Definition Sei I ein nichtentartetes Intervall. Eine Abbildung $\gamma: I \rightarrow E$ heißt *differenzierbar* im Punkt $a \in I$, wenn es einen Vektor $v \in E$ gibt, so dass

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{\|\gamma(t) - \gamma(a) - v(t - a)\|_E}{|t - a|} = 0. \quad (1)$$

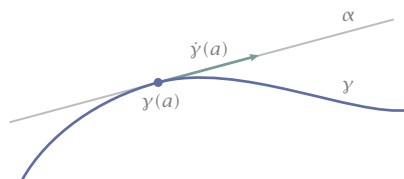
In diesem Fall heißt v die *erste Ableitung* von γ im Punkt a und wird mit $\dot{\gamma}(a)$ oder $\gamma'(a)$ bezeichnet. \times

Diese Differenzierbarkeit lässt sich wiederum mithilfe von Differenzenquotienten charakterisieren. Diese sind in einem Banachraum wohldefiniert, da es sich dabei um nichts anderes als Linearkombinationen handelt.

- 1 **Differenzierbarkeitssatz** Für eine Abbildung $\gamma: I \rightarrow E$ und einen Punkt $a \in I$ sind äquivalent:
- (i) γ ist differenzierbar in a mit $\dot{\gamma}(a) = v$.
 - (ii) Es gibt einen Vektor $v \in E$ und eine im Punkt a stetige und verschwindende Abbildung $\varepsilon: I \rightarrow E$, so dass

Abb 7

Kurve mit Tangentialvektor
und Tangente



$$y(t) = y(a) + v(t-a) + \varepsilon(t)(t-a). \quad (2)$$

(iii) Es existiert der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(a+h) - y(a)}{h} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t) - y(a)}{t-a} = v.$$

(iv) Es gilt

$$\lim_{t \rightarrow a} \frac{\|y(t) - y(a) - v(t-a)\|_E}{|t-a|} = 0. \quad \times$$

⟨⟨⟨ (i) ⇔ (ii) Setzen wir

$$\varepsilon(t) = \frac{y(t) - y(a) - v(t-a)}{t-a}, \quad t \neq a,$$

so ist ε wegen (1) stetig im Punkt a durch den Wert 0 fortsetzbar. Es gilt dann (2). Umgekehrt folgt aus (2) unmittelbar (1).

(ii) ⇔ (iii) Mit den Bezeichnungen von (2) ist

$$\frac{y(t) - y(a)}{t-a} = v + \varepsilon(t), \quad t \neq a.$$

Verschwindet ε stetig im Punkt a , so ist

$$\lim_{t \rightarrow a} (v + \varepsilon(t)) = \lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t) - y(a)}{t-a} = v.$$

Existiert umgekehrt der Grenzwert auf der rechten Seite, so ist ε stetig fortsetzbar im Punkt a mit dem Wert 0, und es gilt (2).

(iii) ⇔ (iv) Das ist nur eine Umformulierung. ⟩⟩⟩

Der Vektor

$$v = \dot{y}(a)$$

heißt *Tangential-* oder *Geschwindigkeitsvektor* der Kurve im Punkt $y(a)$, seine Länge $\|\dot{y}(a)\|_E$ ihre (*momentane*) *Geschwindigkeit*. Ist $\dot{y}(a) \neq 0$, so ist die *Tangente* an y im Punkt $y(a)$ gegeben durch die parametrisierte Gerade

$$\alpha(t) = y(a) + \dot{y}(a)t.$$

Ist dagegen $\dot{y}(a) = 0$, so ist die Tangente nicht definiert. Die Kurve kann in diesem Fall eine Ecke oder Spitze bilden.

2 ▶ A. Die Neilsche Parabel

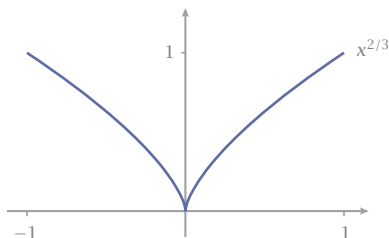
$$y: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad y(t) = (t^3, t^2)$$

ist in jedem Punkt differenzierbar mit Ableitung und Geschwindigkeit

$$\dot{y}(t) = (3t^2, 2t), \quad \|\dot{y}(t)\|_2 = \sqrt{9t^4 + 4t^2},$$

Abb 8

Die Neilsche Parabel



hat aber im Nullpunkt eine Spitze.

B. Die Spur der Kurve

$$\gamma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t^3, t^6)$$

ist ein glatter Parabelbogen, aber es ist $\dot{\gamma}(0) = 0$. ◀

Bemerkung Beschreiben wir die Neilsche Parabel als *Graphen* der Funktion $x \mapsto x^{2/3}$, so ist diese im Punkt 0 *nicht* differenzierbar. Beschreiben wir sie jedoch wie im vorangehenden Beispiel als *parametrisierte Kurve*, so ist diese Parametrisierung überall differenzierbar, auch wenn der Tangentialvektor an einer Stelle verschwindet. Letzteres ist unvermeidlich, da die Neilsche Parabel dort eine Spitze ausbildet. Der Graph einer *differenzierbaren* Funktion besitzt dagegen in jedem Punkt eine Tangente A-4. ◻

Die Differenzierbarkeit einer Kurve auf ganz I wird wie erwartet definiert.

Definition Eine Kurve $\gamma: I \rightarrow E$ heißt *differenzierbar*, wenn sie in jedem Punkt von I differenzierbar ist. In diesem Fall heißt

$$\dot{\gamma}: I \rightarrow E, \quad t \mapsto \dot{\gamma}(t)$$

die *Ableitung* von γ . Ist $\dot{\gamma}$ stetig, so heißt γ *stetig differenzierbar* oder C^1 . ✕

Die Ableitung einer C^1 -Kurve ist somit wieder eine Kurve. Induktiv können wir daher wie bei den reellwertigen Funktionen die Klassen

$$C^r(I, E), \quad 0 \leq r \leq \infty,$$

aller r -mal stetig differenzierbaren Kurven $I \rightarrow E$ definieren. Dabei steht $C^0(I, E)$ für $C(I, E)$. — Wir notieren die beiden wichtigsten Rechenregeln.

Satz Seien $\gamma, \eta \in C^r(I, E)$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $\alpha\gamma + \beta\eta \in C^r(I, E)$, und es gilt

$$(\alpha\gamma + \beta\eta)' = \alpha\dot{\gamma} + \beta\dot{\eta}.$$

Ist außerdem $\varphi: J \rightarrow I$ eine C^r -Abbildung, so ist $\gamma \circ \varphi \in C^r(J, E)$ und

$$(\gamma \circ \varphi)' = (\dot{\gamma} \circ \varphi)\dot{\varphi}. \quad \times$$

Die Beweise verlaufen wie bei den differenzierbaren Funktionen 8.1 und sind als Übung überlassen. Beide Aussagen sind ohnehin Spezialfälle allgemeinerer Sätze, die im nächsten Kapitel bewiesen werden.

■ Kurven im \mathbb{R}^m

Im \mathbb{R}^m werden Kurven durch m Komponentenfunktionen beschrieben, die wir aus Platzgründen meist als Zeilenvektor

$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m)$$

darstellen. Die Kurve γ ist stetig genau dann, wenn jede Komponente γ_i stetig ist 5.35. Betrachten wir Differenzenquotienten, so gilt Entsprechendes auch für die Differenzierbarkeit 1.

- 3 **Satz** Eine Kurve $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist im Punkt $a \in I$ differenzierbar genau dann, wenn jede Komponentenfunktion in a differenzierbar ist. Es gilt dann

$$\dot{\gamma}(a) = (\dot{\gamma}_1(a), \dots, \dot{\gamma}_m(a)).$$

Sie ist C^r für $1 \leq r \leq \infty$ genau dann, wenn jede Komponente C^r ist. \times

- A. Die Standardparametrisierung des Einheitskreises,

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos t, \sin t),$$

ist eine C^∞ -Kurve mit Ableitung und Geschwindigkeit

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t), \quad \|\dot{\gamma}(t)\|_2 = 1.$$

- B. Die übliche Parametrisierung des Graphen einer C^r -Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, f(t)),$$

ist C^r und hat Ableitung und Geschwindigkeit

$$\dot{\gamma}(t) = (1, f'(t)), \quad \|\dot{\gamma}(t)\|_2 = \sqrt{1 + (f'(t))^2} > 0. \quad \blacktriangleleft$$

■ Der Hauptsatz

Die Ableitung einer stetig differenzierbaren Kurve ist wieder eine Kurve. Wie bei den reellen Funktionen können wir daher die Frage stellen, ob umgekehrt jede Kurve die Ableitung einer anderen Kurve ist. In der Tat gilt der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung 10.16 auch hier, wir müssen nur das Integral im \mathbb{R}^m beziehungsweise dem Banachraum E bilden.

Das geschieht wieder über Treppenfunktionen. Das Integral einer Treppenfunktion ist nichts anderes als eine Linearkombination seiner Funktionswerte. Es lässt sich daher ebenso gut definieren, wenn diese Werte Vektoren, Matrizen oder Elemente irgendeines Banachraums E sind.

Definition Eine Funktion $\varphi: I \rightarrow E$ heißt *E -wertige Treppenfunktion*, wenn es eine Zerlegung (t_0, \dots, t_n) des Intervalls I und Elemente w_1, \dots, w_n in E gibt, so dass

$$\varphi|_{(t_{k-1}, t_k)} = w_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Das Integral einer solchen Treppenfunktion ist

$$J_I(\varphi) := \sum_{k=1}^n w_k (t_k - t_{k-1}).$$

Dieses hängt nicht von der Darstellung von φ ab. \times

Jede stetige Kurve $\gamma: I \rightarrow E$ mit einem kompakten Intervall I ist der gleichmäßige Limes solcher Treppenfunktionen. Dessen Integral können wir also wie zuvor definieren durch

$$\int_I \gamma := J_I(\gamma) := \lim_{\varphi_n \Rightarrow \gamma} J_I(\varphi_n).$$

Dieses ist wieder linear und lipschitz, denn

$$\|J_I(\varphi)\| \leq \sum_{k=1}^n \|w_k\|_E (t_k - t_{k-1}) \leq \sup_{t \in E} \|\varphi(t)\|_E |I|.$$

Auch alle anderen Eigenschaften des Integrals bleiben erhalten, wie zum Beispiel die Dreiecksungleichung $\|J_I(\gamma)\|_E \leq J_I(\|\gamma\|_E)$ und das Riemannsche Lemma. Nur die Monotonieeigenschaft entfällt, da es in höheren Dimensionen keine natürliche Anordnung gibt. — Im \mathbb{R}^m wird dieses Integral einfach komponentenweise gebildet:

Notiz Das Integral einer stetigen Kurve $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit Komponenten $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ erhält man komponentenweise:

$$J_I(\gamma) = (J_I(\gamma_1), \dots, J_I(\gamma_m)). \quad \times$$

► Für $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) = (2t, 3t^2, 4t^3)$ ist

$$\Phi(t) = \int_0^t (2s, 3s^2, 4s^3) \, ds = (t^2, t^3, t^4). \quad \blacktriangleleft$$

4 **Stammfunktionensatz** Sei $\gamma \in C(I, \mathbb{R}^m)$ und $c \in I$ beliebig. Dann definiert

$$\Phi(t) := \int_c^t \gamma$$

eine Stammfunktion $\Phi \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$ zu γ . \times

⟨⟨⟨ Jede stetige Kurve $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist integrierbar. Die Abbildung Φ ist daher für jedes $t \in I$ definiert. Aus der Additivität des Integrals folgt

$$\Phi(t+h) = \int_c^t \gamma + \int_t^{t+h} \gamma = \Phi(t) + \left[\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \gamma \right] h.$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern besitzt aufgrund des Riemannschen Lemmas_{10.15} für $h \rightarrow 0$ den Grenzwert $\gamma(t)$. Somit ist Φ im Punkt t differenzierbar, und es ist $\dot{\Phi}(t) = \gamma(t)$. Da dies in jedem Punkt $t \in I$ gilt, ist Φ eine Stammfunktion von γ . $\rangle\rangle\rangle$

Wir müssen noch zeigen, dass sich zwei Stammfunktionen derselben Kurve nur durch eine additive Konstante unterscheiden. Dies ist der einzige Punkt, wo wir für allgemeine Banachräume ein Hilfsmittel aus der Funktionalanalysis benötigen. Im \mathbb{R}^m ergeben sich keine Probleme.

5 **Lemma** Zwei verschiedene Stammfunktionen einer Kurve $\gamma \in C(I, \mathbb{R}^m)$ unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante in E . \times

⟨⟨⟨ Betrachten wir zwei beliebige Stammfunktionen einer Kurve γ , so ist deren Differenz eine stetig differenzierbare Kurve mit überall verschwindender Ableitung. Es genügt daher zu zeigen, dass eine solche Kurve konstant ist.

Sei also $\varphi: I \rightarrow E$ eine C^1 -Kurve mit $\dot{\varphi} = 0$. Angenommen, es gibt zwei Punkte $u, v \in I$ mit $\varphi(u) \neq \varphi(v)$. Dann gibt es auch ein lineares Funktional $L \in E^*$ mit $L\varphi(u) \neq L\varphi(v)$. Im \mathbb{R}^m ist dies leicht einzusehen, indem man L als Skalarprodukt mit einem geeignet gewählten festen Vektor wählt_{14.1}. In einem beliebigen Banachraum ist dies eine Konsequenz des Satzes von Hahn-Banach. Damit gilt dann

$$L\varphi(v) - L\varphi(u) = \int_u^v (L\varphi)' = \int_u^v L\dot{\varphi} = 0,$$

und wir erhalten einen Widerspruch. $\rangle\rangle\rangle$

Damit gilt auch der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung_{10.16} ebenso für Kurven.

6 Hauptsatz Sei $\gamma \in C(I, \mathbb{R}^m)$. Für jede Stammfunktion Γ von γ und jedes Intervall $[a, b] \subset I$ gilt dann

$$\int_a^b \gamma = \Gamma \Big|_a^b = \Gamma(b) - \Gamma(a).$$

Für jede C^1 -Kurve γ gilt insbesondere

$$\int_a^b \dot{\gamma} = \gamma(b) - \gamma(a). \quad \times$$

⟨⟨⟨ Der Beweis verläuft wie im klassischen eindimensionalen Fall _{10.16}. Die Funktion Φ des Stammfunktionensatzes ₄ ist eine Stammfunktion von γ . Jede andere Stammfunktion Γ von γ unterscheidet sich von ihr nur durch eine additive Konstante ₅. Also gilt

$$\Gamma(b) - \Gamma(a) = \Phi(b) - \Phi(a) = \int_c^b \gamma - \int_c^a \gamma = \int_a^b \gamma.$$

Ist insbesondere γ eine C^1 -Kurve, so ist γ Stammfunktion von $\dot{\gamma}$. Damit folgt die zweite Identität. ⟩⟩⟩

7 Schrankensatz Ist $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$, so gilt für alle $u, v \in I$ die Ungleichung

$$\|\gamma(v) - \gamma(u)\|_E \leq |v - u| \max_{u \leq t \leq v} \|\dot{\gamma}(t)\|_E.$$

Insbesondere ist jede C^1 -Kurve γ auf einem kompakten Intervall I lipschitz mit Konstante $L = \max_{t \in I} \|\dot{\gamma}(t)\|_E < \infty$. \times

⟨⟨⟨ Ist $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$, so gilt für beliebige $u < v$ in I aufgrund des Hauptsatzes ₆ und der Dreiecksungleichung für Integrale

$$\begin{aligned} \|\gamma(v) - \gamma(u)\|_E &= \left\| \int_u^v \dot{\gamma} \right\|_E \leq \int_u^v \|\dot{\gamma}(t)\|_E dt \\ &\leq \int_u^v \max_{u \leq t \leq v} \|\dot{\gamma}(t)\|_E dt \\ &= (v - u) \max_{u \leq t \leq v} \|\dot{\gamma}(t)\|_E. \end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von $t \mapsto \|\dot{\gamma}(t)\|_E$ ist das Maximum endlich. Der allgemeine Fall $u, v \in I$ folgt hieraus, ebenso die Lipschitzstetigkeit von γ . ⟩⟩⟩

Bemerkung Den Schrankensatz für C^1 -Funktionen hatten wir mithilfe des Zwischenwertsatzes bewiesen _{8.2}. Dieser gilt für Kurven im \mathbb{R}^m mit $m \geq 2$ jedoch nicht mehr _{A-5}. Mithilfe einer Integraldarstellung von $\gamma(b) - \gamma(a)$ gelangen wir aber zu demselben Ergebnis. Ein weiteres Beispiel für diese Art der Argumentation ist die Hadamardsche Ungleichung _{14.15}. \rightarrow

13.3 Rektifizierbare Kurven

Die Länge einer Kurve wird über einen Approximationsprozess erklärt. Die Länge eines *Polygonzugs* ist sinnvollerweise definiert als die Summe der Längen der Polygonabschnitte, gemessen in der Norm des Banachraums. Eine *beliebige* Kurve γ können wir immer durch einbeschriebene Polygonzüge approximieren. Jede Verfeinerung eines solchen Polygonzugs wird aufgrund der Dreiecksungleichung dessen Länge vergrößern oder unverändert lassen, aber keinesfalls verringern. Dies erlaubt es, die Länge von γ als das *Supremum* der Längen aller einbeschriebene Polygonzüge zu definieren. Es ist also nicht erforderlich, den Approximationsprozess näher zu spezifizieren.

Nun die Formalitäten. Sei $I = [a, b]$ ein nichtleeres kompaktes Intervall, sei $\gamma \in C(I, E)$ eine Kurve in E , und $T = (t_0, \dots, t_n)$ mit $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ eine Teilung von I . Dann ist

$$\Sigma_T(\gamma) := \sum_{k=1}^n \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|_E$$

die *Länge* des Polygonzuges mit den Eckpunkten $\gamma(t_0), \dots, \gamma(t_n)$, der der Kurve γ einbeschrieben ist Abb 9.

Definition Die *Länge* einer Kurve $\gamma \in C(I, E)$ ist definiert als

$$L_I(\gamma) := \sup_T \Sigma_T(\gamma),$$

wobei sich das Supremum über alle Teilungen T von I erstreckt. Die Kurve γ heißt *rektifizierbar*, falls $L_I(\gamma) < \infty$. \times

Bemerkung Wir erhalten damit eine Funktion

$$L_I : C(I, E) \rightarrow [0, \infty], \quad \gamma \mapsto L_I(\gamma).$$

Diese ist allerdings *nicht stetig* bezüglich der Supremumsnorm auf $C(I, E)$. So konvergieren die sukzessive feiner werdenden Sägezahnkurven γ_n in Abbildung 11 gleichmäßig gegen γ_* , aber für ihre Längen gilt A-15

$$L(\gamma_n) = L(\gamma_0) = \sqrt{2} \cdot L(\gamma_*). \quad \rightarrow$$

Abb 9

Kurve und
einbeschriebener
Polygonzug

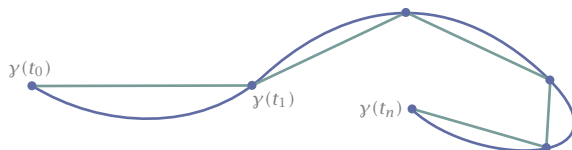
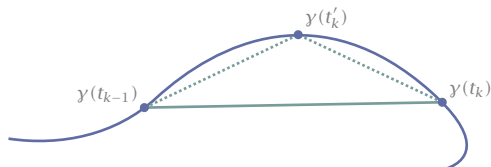


Abb 10

Verfeinerung eines
Polygonzugs



Satz Ist die Kurve $\gamma \in C(I, E)$ M -lipschitz, so ist sie rektifizierbar, und

$$L_I(\gamma) \leq M |I|.$$

Insbesondere ist jede C^1 -Kurve rektifizierbar. \times

««« Für jede Teilung $T = (t_0, \dots, t_n)$ von I gilt aufgrund der Lipschitz-eigenschaft

$$\Sigma_T(\gamma) = \sum_{k=1}^n \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|_E \leq \sum_{k=1}^n M(t_k - t_{k-1}) = M |I|.$$

Da die rechte Seite nicht von T abhängt, folgt

$$L_I(\gamma) = \sup_T \Sigma_T(\gamma) \leq M |I|.$$

C^1 -Kurven sind rektifizierbar, da sie lipschitzstetig sind. »»»

Wie bestimmt man aber die Länge einer Kurve? Um diese Frage zu beantworten, zeigen wir zunächst die *Additivität* der Längenfunktion: Zerlegt man eine Kurve in zwei Abschnitte, so ist die Gesamtlänge der Kurve gleich der Summe der Längen der beiden Kurvenabschnitte - wie es auch sein sollte.

8 Lemma Sei $\gamma \in C(I, E)$ mit $I = [a, b]$. Für jedes $c \in I$ gilt dann

$$L_{[a,b]}(\gamma) = L_{[a,c]}(\gamma) + L_{[c,b]}(\gamma). \quad \times$$

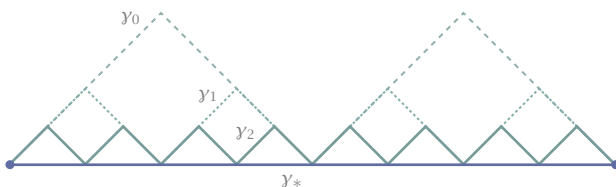
««« Sei $c \in I$ und $I_1 = [a, c]$ sowie $I_2 = [c, b]$. Zu zeigen ist, dass

$$L_I = L_{I_1} + L_{I_2},$$

wobei wir das Argument γ der Kürze halber weglassen.

Abb 11

Sägezahnkurven



Ist $T = (t_0, \dots, t_n)$ eine beliebige Teilung von I , so seien $T_c = T \cup \{c\}$ und

$$T_k = T_c \cap I_k, \quad k = 1, 2,$$

die zugehörigen Teilungen von I_1 und I_2 . Aufgrund der Dreiecksungleichung und der Definition von L_{I_1} und L_{I_2} ist dann

$$\Sigma_T \leq \Sigma_{T_c} = \Sigma_{T_1} + \Sigma_{T_2} \leq L_{I_1} + L_{I_2}.$$

Da dies für jede Teilung T von I gilt, folgt hieraus $L_I \leq L_{I_1} + L_{I_2}$.

Um auch die umgekehrte Ungleichung zu erhalten, sei zuerst $L_{I_1} + L_{I_2} < \infty$ und $\varepsilon > 0$. Dann existieren Teilungen T_1 von I_1 und T_2 von I_2 , so dass

$$\Sigma_{T_k} \geq L_{I_k} - \varepsilon/2, \quad k = 1, 2.$$

Für die Teilung $T = T_1 \cup T_2$ von I folgt hieraus

$$\Sigma_T = \Sigma_{T_1} + \Sigma_{T_2} \geq L_{I_1} + L_{I_2} - \varepsilon.$$

Also ist auch $L_I \geq L_{I_1} + L_{I_2} - \varepsilon$. Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $L_I \geq L_{I_1} + L_{I_2}$. Dies gilt aber auch, wenn einer der Terme rechts unbeschränkt ist, da dann auch L_I unbeschränkt ist. Zusammen mit $L_I \leq L_{I_1} + L_{I_2}$ ergibt dies die Behauptung. \gggg

Der vorangehende Satz gilt für alle stetigen Kurven. Von nun an beschränken wir uns jedoch auf C^1 -Kurven.

9 Lemma Sei $\gamma \in C^1(I, E)$ mit $I = [a, b]$. Dann ist die *Längenfunktion*

$$\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda(t) = L_{[a,t]}(\gamma)$$

stetig differenzierbar, mit

$$\lambda'(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|_E, \quad t \in I. \quad \times$$

\lllll Für je zwei Punkte $u < v$ in I gilt \circ

$$\|\gamma(v) - \gamma(u)\|_E = \left\| \int_u^v \dot{\gamma} \right\|_E \leq \int_u^v \|\dot{\gamma}\|_E.$$

Für ein beliebiges abgeschlossenes Intervall $J \subset I$ und eine beliebige Teilung $T = (t_0, \dots, t_n)$ von J gilt daher auch

$$\Sigma_T(\gamma) = \sum_{k=1}^n \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|_E \leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot{\gamma}\|_E = \int_J \|\dot{\gamma}\|_E.$$

Nehmen wir das Supremum über alle Teilungen von J , so folgt

$$L_J(\gamma) \leq \int_J \|\dot{\gamma}\|_E.$$

Dies gilt also für jedes abgeschlossene Intervall $J \subset I$.

Sei nun $t \in [a, b)$ und $h > 0$ so klein, dass $t + h \leq b$. Dann gilt also

$$\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|_E \leq L_{[t, t+h]}(\gamma) \leq \int_t^{t+h} \|\dot{\gamma}\|_E$$

aufgrund der letzten Abschätzung. Hierbei ist

$$L_{[t, t+h]}(\gamma) = L_{[a, t+h]}(\gamma) - L_{[a, t]}(\gamma) = \lambda(t+h) - \lambda(t).$$

Einsetzen und dividieren durch $h > 0$ ergibt die Ungleichung

$$\left\| \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} \right\|_E \leq \frac{\lambda(t+h) - \lambda(t)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|\dot{\gamma}\|_E.$$

Da γ stetig differenzierbar ist, konvergieren die äußeren Terme für $h \searrow 0$ gegen $\|\dot{\gamma}(t)\|_E$. Also konvergiert auch der mittlere Term, und es gilt

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{\lambda(t+h) - \lambda(t)}{h} = \|\dot{\gamma}(t)\|_E.$$

Ein analoges Argument für $t \in (a, b]$ und $h < 0$ liefert dasselbe Ergebnis. Also ist λ in jedem Punkt t differenzierbar, und es gilt $\lambda'(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|_E$. \gggg

10 Satz Für $\gamma \in C^1(I, E)$ gilt

$$L_I(\gamma) = \int_I \|\dot{\gamma}(t)\|_E dt.$$

Insbesondere ist die euklidische Länge einer Kurve $\gamma \in C^1(I, \mathbb{R}^m)$

$$L_I(\gamma) = \int_I \|\dot{\gamma}\|_2 = \int_I \sqrt{\dot{\gamma}_1^2(t) + \dots + \dot{\gamma}_m^2(t)} dt. \quad \times$$

\llll Sei $I = [a, b]$. Mit den Bezeichnungen des letzten Lemmas und dem Hauptsatz 10.14 ist dann

$$L_I(\gamma) = \lambda(b) - \lambda(a) = \int_a^b \lambda'(t) dt = \int_I \|\dot{\gamma}\|_E. \quad \gggg$$

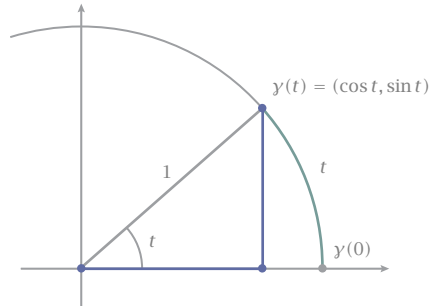
Die Länge einer C^1 -Kurve ist also das Integral über ihre Geschwindigkeit. Ist die Geschwindigkeit konstant, so ist die Länge gerade das Produkt aus Geschwindigkeit und verstrichener Zeit - wie es auch sein sollte.

\blacktriangleright A. Für die Parametrisierung des Einheitskreises $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ gilt $\|\dot{\gamma}(t)\|_2 = 1$ und damit

$$L_{[0, t]}(\gamma) = \int_0^t 1 = t.$$

Die Länge des Kreisbogens vom Punkt $\gamma(0) = (1, 0)$ bis zum Punkt $\gamma(t)$ ist also t . Dieses Ergebnis hatten wir in Abschnitt 9.3 vorweggenommen.

Abb 12

Bogenmaß des Winkels t 

B. Der Graph Γ einer C^1 -Funktion $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ hat die euklidische Länge

$$L_I(\Gamma) = \int_I \sqrt{1 + (f')^2(t)} dt.$$

Dieses Integral ist allerdings meist nicht elementar integrierbar.

C. Für die Neilschen Parabel als Graph der Funktion $x \mapsto x^{2/3}$ über $[0, 1]$ erhalten wir die Länge

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{4}{9x^{2/3}}} dx.$$

Mit der Substitution $x = t^3$ und $dx = 3t^2 dt$ ergibt sich

$$L = \int_0^1 t^2 \sqrt{9 + 4/t^2} dt = \int_0^1 t \sqrt{9t^2 + 4} dt = \frac{1}{27} (4 + 9t^2)^{3/2} \Big|_0^1.$$

Die Neilsche Parabel soll nach dem Kreis die erste Kurve gewesen sein, deren Bogenlänge man berechnen konnte. Dasselbe Ergebnis erhalten wir - natürlich - mit der Parametrisierung $y(t) = (t^3, t^2)$ über $[0, 1]$. ◀

13.4 Wege

Die Spur einer Kurve γ lässt sich auf unterschiedlichste Weisen parametrisieren. Es stellt sich daher die Frage, ob die Länge einer Kurve von ihrer Parametrisierung abhängt. Oder anders gefragt: Ist es möglich, der *Spur* einer Kurve eine Länge zuzuordnen, ohne auf *irgendeine Parametrisierung* Bezug zu nehmen?

In dieser Allgemeinheit ist die Beantwortung dieser Frage schwierig. Sie ist Gegenstand der geometrischen Maßtheorie und erfordert zum Beispiel den Begriff des Hausdorffmaßes. Wir machen es uns etwas einfacher. Wir gehen davon aus,

dass bereits eine Parametrisierung vorliegt, und fragen, welche *Änderungen* der Parametrisierung die Länge unverändert lassen. Dazu brauchen wir den Begriff der *Parametertransformation*, wobei wir wieder *stetige* Kurven betrachten.

Definition Eine *Parametertransformation* ist eine bijektive stetige Abbildung $\varphi: J \rightarrow I$ eines Intervalls J auf ein Intervall I . Sie heißt *orientierungstreu*, wenn sie den Anfangspunkt von J auf den Anfangspunkt von I abbildet. Andernfalls heißt sie *orientierungsumkehrend*. \times

Aufgrund des Satzes über Umkehrfunktionen_{7.13} ist $\varphi^{-1}: I \rightarrow J$ ebenfalls bijektiv *und stetig*, also ebenfalls eine Parametertransformation. Außerdem ist die Komposition zweier Parametertransformationen wieder eine solche. Parametertransformationen bilden somit eine *Gruppe*.

Bijektive Abbildungen, wo Abbildung *und* Umkehrabbildung stetig sind, werden übrigens *Homöomorphismen* genannt. Eine Parametertransformation ist somit ein *Homöomorphismus* zweier Intervalle.

- 11 **Definition** Zwei Kurven $\gamma \in C(I, E)$ und $\tilde{\gamma} \in C(\tilde{I}, E)$ heißen *topologisch äquivalent*, geschrieben $\tilde{\gamma} \sim \gamma$, wenn es eine orientierungstreu Parametertransformation $\varphi: \tilde{I} \rightarrow I$ gibt, so dass

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi. \quad \times$$

Topologische Äquivalenz definiert eine *Äquivalenzrelation* im Raum aller Kurven in E . Für Kurven γ, η, χ in E haben wir also_{A-10} die

- (i) *Reflexivität*: $\gamma \sim \gamma$,
- (ii) *Symmetrie*: $\gamma \sim \eta \Leftrightarrow \eta \sim \gamma$,
- (iii) *Transitivität*: $\gamma \sim \eta \wedge \eta \sim \chi \Rightarrow \gamma \sim \chi$.

Definition Die zu einer Kurve $\gamma \in C(I, E)$ gehörende Klasse

$$\omega = [\gamma]$$

aller zu γ topologisch äquivalenten Kurven wird *stetiger Weg* oder kurz *Weg* in E genannt. Jedes Element $\eta \in \omega$ heißt eine *Parametrisierung* des Weges ω . \times

In der Literatur gibt es allerdings auch die umgekehrte Konvention, wo eine *Kurve* als Klasse äquivalenter Wege definiert wird. Was Kurven und Wege betrifft, muss man sich daher immer über die verwendete Terminologie informieren.

Für zwei verschiedene Parametrisierungen η und χ eines Weges ω gilt offensichtlich:

- (i) Hat η Anfangspunkt p , so auch χ . Ditto für Endpunkte.
- (ii) Ist η geschlossen, so auch χ .

(iii) Ist η doppelpunktfrei, so auch χ .

Diese Eigenschaften hängen somit nicht von der Parametrisierung ab und sind daher eine Eigenschaft der Äqui vlanezklasse, also des zugehörigen Weges.

Definition Ein Weg $\omega = [\gamma]$ heißt *einfach*, wenn γ einfach ist, *geschlossen*, wenn γ geschlossen ist, und *Jordanweg*, wenn γ eine Jordankurve ist. Der *Anfangs-* und *Endpunkt* von ω sind der Anfangs- und Endpunkt von γ , und die *Spur* des Weges ω ist die Spur von γ . ✕

► Der n -mal durchlaufene Einheitskreis

$$\gamma_n: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_n(t) = (\cos nt, \sin nt),$$

repräsentiert für jedes $n \in \mathbb{Z}$ einen anderen geschlossenen Weg $\omega_n = [\gamma_n]$. Es gilt also

$$\omega_n = \omega_m \Leftrightarrow m = n.$$

Für $|n| = 1$ ist er einfach, sonst nicht. ◀

Wie verhält es sich mit der Länge äquivalenter Kurven? Diese Frage beantwortet der folgende

Satz Topologisch äquivalente Kurven haben dieselbe Länge. Insbesondere sind beide rektifizierbar oder nicht rektifizierbar. ✕

◀◀◀ Seien $\gamma \in C(I, E)$, $\tilde{\gamma} \in C(\tilde{I}, E)$ und $\varphi: I \rightarrow \tilde{I}$ eine Parametertransformation, so dass $\gamma = \tilde{\gamma} \circ \varphi$. Ist $T = (t_0, \dots, t_n)$ eine Teilung von I , so ist

$$\tilde{T} = \varphi \circ T := (\varphi(t_0), \dots, \varphi(t_n))$$

eine Teilung von \tilde{I} . Wegen

$$\tilde{\gamma}(\varphi(t_k)) - \tilde{\gamma}(\varphi(t_{k-1})) = \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})$$

gilt hierfür

$$\Sigma_{\tilde{T}}(\tilde{\gamma}) = \Sigma_{\varphi \circ T}(\tilde{\gamma}) = \Sigma_T(\tilde{\gamma} \circ \varphi) = \Sigma_T(\gamma).$$

Gehen wir nun zuerst rechts zum Supremum über alle Teilungen von I , und danach zum Supremum über alle Teilungen von \tilde{I} über, so folgt

$$L_{\tilde{I}}(\tilde{\gamma}) \leq L_I(\gamma).$$

Vertauschen wir die Reihenfolge der Supremumbildung so erhalten wir auch die umgekehrte Ungleichung $L_I(\gamma) \leq L_{\tilde{I}}(\tilde{\gamma})$. Das ergibt die Behauptung. ▶▶▶

Ist also *eine* Parametrisierung rektifizierbar, dann auch *jede* dazu äquivalente, und alle Längen sind gleich. Somit ist folgende Definition sinnvoll.

Definition Ein Weg ω heißt *rektifizierbar*, wenn er eine rektifizierbare Parametrisierung $\gamma \in C(I, E)$ besitzt. Seine *Länge* ist dann die Länge einer beliebigen Parametrisierung. \times

► Für den n -mal durchlaufenen Einheitskreis ω_n gilt

$$L(\omega_n) = 2\pi |n|, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad \blacktriangleleft$$

Bemerkungen a. Für C^1 -Kurven und -Parameterwechsel ergibt sich die Invarianz der Länge aus der Substitutionsregel für das Längenintegral A_7 und erfordert keinen eigenen Beweis.

b. Jede Spur, die aus mehr als einem Punkt besteht, erlaubt verschiedene Parametrisierungen mit verschiedenen Längen. Diese sind notgedrungen nicht äquivalent und repräsentieren daher verschiedene Wege! \rightarrow

■ Glatte Wege

Bisher haben wir an die Parametrisierung einer Kurve nur die Forderung der Stetigkeit gestellt. Dies erlaubt, Teile der Spur mehrmals zu durchlaufen. Um dieses – in vielen Fällen unerwünschte – Verhalten auszuschließen, betrachten wir nun stetig differenzierbare Kurven und Wege, die *regulär* sind.

12 **Definition** Eine C^1 -Kurve $\gamma: I \rightarrow E$ heißt *regulär*, wenn ihre Ableitung nirgends verschwindet, also $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt. \times

Um diesen Begriff auch für Wege zu erklären, müssen wir berücksichtigen, dass ein Weg *immer* auch nichtreguläre Parametrisierungen besitzt. Es genügt aber, wenn wenigstens *eine* regulär ist.

Definition Ein Weg heißt *glatt*, falls er wenigstens eine reguläre Parametrisierung besitzt. \times

Ein glatter Weg besitzt also *wenigstens eine* Parametrisierung $\gamma \in C^1(I, E)$ mit $\dot{\gamma} \neq 0$ auf ganz I . Er besitzt daher in jedem Punkt eine Tangente und somit keinerlei Spitzen oder Ecken. Daher auch die Bezeichnung. — Glatte Wege besitzen immer eine besonders schöne und nützliche Parametrisierung.

Satz und Definition Jeder glatte Weg ω in E besitzt eine eindeutige reguläre *Parametrisierung nach der Bogenlänge* $\eta: [0, l] \rightarrow E$, wobei $l = L(\omega)$. Das heißt, es gilt

$$L_{[0,t]}(\eta) = t, \quad t \in [0, l],$$

oder, was äquivalent ist, $\|\dot{\eta}(t)\|_E = 1$ für alle $t \in [0, l]$. \times

⟨⟨⟨ Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow E$ eine reguläre Parametrisierung von ω . Dann ist ϱ

$$\lambda: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda(s) = L_{[a, s]}(\gamma)$$

stetig differenzierbar, und $\lambda'(s) = \|\dot{\gamma}(s)\|_E > 0$ für alle $s \in [a, b]$. Folglich bildet λ das Intervall $[a, b]$ streng monoton auf das Intervall $[\lambda(a), \lambda(b)] = [0, l]$ ab. Die Umkehrfunktion

$$\varphi: [0, l] \rightarrow [a, b], \quad \varphi(t) = \lambda^{-1}(t)$$

ist ebenfalls stetig differenzierbar, und es gilt $_{7.13}$

$$\varphi'(t) = \frac{1}{\lambda'(\varphi(t))} = \frac{1}{\|\dot{\gamma}(\varphi(t))\|_E} > 0, \quad t \in [0, l].$$

Somit bildet $\eta = \gamma \circ \varphi: [0, l] \rightarrow E$ eine C^1 -Parametrisierung von ω , mit

$$\|\dot{\eta}(t)\|_E = \|\dot{\gamma}(\varphi(t))\|_E |\varphi'(t)| = 1, \quad t \in [0, l].$$

Dann aber ist auch

$$L_{[0, t]}(\eta) = \int_0^t \|\dot{\eta}\|_E = \int_0^t 1 = t.$$

Damit ist die Existenz einer Bogenlängenparametrisierung gezeigt.

Um noch die Eindeutigkeit zu zeigen, sei $\chi: [0, l] \rightarrow E$ eine weitere solche Parametrisierung. Da η und χ denselben Weg parametrisieren, sind sie topologisch äquivalent, es existiert also eine *stetige* Parametertransformation $\varphi: [0, l] \rightarrow [0, l]$ mit $\eta = \chi \circ \varphi$. Für $s \in [0, l]$ und $t = \varphi(s)$ gilt dann – vergleiche den Beweis des letzten Lemmas –

$$\begin{aligned} s &= L_{[0, s]}(\eta) = L_{[0, s]}(\chi \circ \varphi) \\ &= L_{[\varphi(0), \varphi(s)]}(\chi) = L_{[0, t]}(\chi) = t. \end{aligned}$$

Also ist φ die Identität und damit $\eta = \chi$. \gggg

Eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve wird also mit konstanter Geschwindigkeit 1 durchlaufen, und es gilt *Weglänge = Geschwindigkeit \times Zeit*. Diese Parametrisierungen sind für viele theoretische Untersuchungen nützlich. Bezüglich dem Standardskalarprodukt gilt dann zum Beispiel in jedem Punkt

$$\dot{\gamma}(t) \perp \ddot{\gamma}(t),$$

das heißt, der Beschleunigungsvektor steht immer orthogonal zum Geschwindigkeitsvektor A_{-14} .

13.5

Ergänzungen

■ Spur als Graph

Der Graph einer C^r -Funktion ist eine C^r -Kurve. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, zum Beispiel wenn die Kurve eine Spitze aufweist wie im Fall der Neilschen Parabel₂. Für reguläre ebene Kurven gilt jedoch eine *lokale* Umkehrung. Diese Tatsache werden wir später als *Satz über implizite Funktionen* auf höhere Dimensionen verallgemeinern.

Satz Sei $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre C^r -Kurve, mit $r \geq 1$. Dann existiert um jeden Punkt in I ein Intervall $J \subset I$, so dass die Spur von $\gamma|_J$ als Graph einer C^r -Funktion dargestellt werden kann. ✕

⟨⟨⟨ Sei $\gamma = (x, y)$ die Koordinatendarstellung der Kurve und $c \in I$ beliebig. Wegen der Regularität von γ ist

$$\dot{\gamma}(c) = (\dot{x}(c), \dot{y}(c)) \neq 0.$$

Angenommen, es ist $\dot{x}(c) \neq 0$. Aus Stetigkeitsgründen hat dann \dot{x} auf einem hinreichend kleinen abgeschlossenen Intervall $I_c \subset I$ um c festes Vorzeichen. Somit ist die Koordinate x dort eine streng monotone Funktion von t , und

$$x: I_c \rightarrow [a, b], \quad t \mapsto x(t)$$

definiert eine Parametertransformation auf ein gewisses Intervall $[a, b]$. Für ihre Umkehrabbildung $\varphi: [a, b] \rightarrow I_c$ gilt dann $x \circ \varphi = id$. Also ist auch

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \tilde{\gamma}(t) = (t, y \circ \varphi(t)).$$

Das bedeutet aber, dass die Spur von γ lokal um c der Graph der Funktion $f = y \circ \varphi$ auf $[a, b]$ ist. Ist γ von der Klasse C^r , so sind es auch y und φ und damit auch f .

Ist dagegen $\dot{x}(c) = 0$, so muss $\dot{y}(c) \neq 0$ gelten. Wir müssen dann nur die Rollen von x und y vertauschen, und erhalten lokal die Spur von γ als Graphen einer Funktion auf der y -Achse. ⟩⟩⟩

■ Stückweise glatte Kurven und Wege

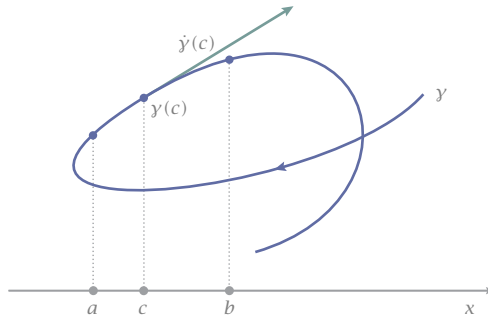
Viele Kurven sind glatt mit Ausnahme endlich vieler Ecken. Dies ist in den meisten Fällen jedoch unerheblich.

Definition Sei $1 \leq r \leq \infty$. Eine Kurve $\gamma \in C(I, E)$ heißt *stückweise C^r* , wenn es eine Teilung $T = (t_0, \dots, t_n)$ von I in Intervalle $I_k = [t_{k-1}, t_k]$ gibt, so dass

$$\gamma|_{I_k} \in C^r(I_k, E), \quad 1 \leq k \leq n.$$

Abb 13

Spur als lokaler Graph



Die Klasse dieser Kurven wird mit $D^r(I, E)$ bezeichnet. \times

Eine D^1 -Kurve besitzt in den inneren Teilungspunkten t_1, \dots, t_{n-1} links- und rechtsseitige Ableitungen, also Geschwindigkeitsvektoren

$$\dot{y}^-(t_k) = \lim_{t \nearrow t_k} \dot{y}(t), \quad \dot{y}^+(t_k) = \lim_{t \searrow t_k} \dot{y}(t).$$

Im Allgemeinen stimmen diese nicht überein, und die Kurve bildet eine Ecke oder Spitze – sonst wäre der Teilungspunkt auch nicht nötig. Außerdem existieren die einseitigen Ableitungen an den Intervallenden von I .

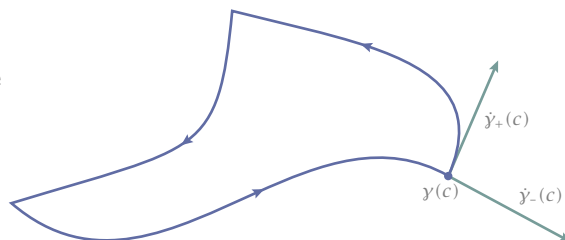
- **Beispiele**
- A. Jede C^r -Kurve ist auch eine D^r -Kurve.
 - B. Die Neilsche Parabel $_2$ ist D^∞ .
 - C. Der Rand jedes Polygons besitzt eine D^∞ -Parametrisierung.
 - D. Die Funktion

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} |t| \sin(1/t), & t > 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

ist stetig, ihr Graph also eine Kurve. Diese ist aber nicht D^1 A-17. ◀

Abb 14

Stückweise glatte geschlossene Kurve



Eine stückweise C^1 -Kurve ist lipschitzstetig und damit rektifizierbar. Auch die Längenformel gilt unverändert.

Satz Jede D^1 -Kurve $\gamma: I \rightarrow E$ ist rektifizierbar, und es gilt

$$L_I(\gamma) = \int_I \|\dot{\gamma}(t)\|_E dt. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Ist $T = (t_0, \dots, t_n)$ eine passende Teilung von I und $I_k = [t_{k-1}, t_k]$ ein Teilungsintervall, so ist aufgrund der Additivität der Längenfunktion g und der Längenformel $_{10}$

$$L_I(\gamma) = \sum_{k=1}^n L_{I_k}(\gamma) = \sum_{k=1}^n \int_{I_k} \|\dot{\gamma}(t)\|_E dt = \int_I \|\dot{\gamma}(t)\|_E dt. \quad \rangle\rangle\rangle$$

Eine D^r -Kurve γ heißt *stückweise regulär*, wenn alle ihre C^r -Abschnitte regulär sind. Entsprechend heißt ein Weg ω *stückweise C^r* respektive *stückweise regulär*, wenn er wenigstens eine Parametrisierung γ mit entsprechenden Eigenschaften besitzt. Ein stückweise regulärer Weg besitzt eine stückweise reguläre Parametrisierung nach der Bogenlänge, $\eta: [0, l] \rightarrow E$, so dass $\|\dot{\eta}(t)\|_E = 1$ mit Ausnahme endlich vieler Punkte.

Aufgaben

- 1 Skizzieren sie die folgenden Kurven.
 - a. $[0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (e^{-t/4} \cos t, e^{-t/4} \sin t)$,
 - b. $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^3, t^2)$,
 - c. $[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (\cos t + (t/2) \sin t, \sin t - (t/2) \cos t)$,
 - d. $[-3\pi, 3\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (t \cos t, t \sin t, t^2/8)$.
- 2 a. Skizzieren sie die geschlossene ebene Kurve

$$\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t).$$
 - b. Ist γ regulär, und besitzt sie im gemeinsamen Anfangs- und Endpunkt eine eindeutige Tangente?
 - c. Bestimmen sie eine Spurgleichung, also eine Funktion $F(x, y)$, deren Nullstellenmenge genau die Spur von γ ist.
- 3 Die erste Ableitung einer Kurve ist eindeutig bestimmt ist, wenn sie existiert.
- 4 Erläutern sie, warum der Graph einer C^1 -Funktion in jedem Punkt eine Tangente besitzt, eine C^1 -Kurve dagegen nicht unbedingt.
- 5 Zeigen sie anhand der Kreiskurve $\gamma: [0, 2\pi]$, $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, dass für Kurven im Allgemeinen der Mittelwertsatz *nicht* gilt. Woran liegt das?
- 6 Bestimmen sie die Länge der folgenden Kurven.
 - a. $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (t^3, 3t^2/2)$,
 - b. $[-3\pi, 3\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto t(\cos t, \sin t, t)$.
- 7 Sei $\gamma: [a, b] \rightarrow E$ eine C^1 -Kurve, $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine C^1 -Parametertransformation und $\gamma_* = \gamma \circ \varphi$. Dann gilt

$$\int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_E dt = \int_c^d \|\dot{\gamma}_*(t)\|_E dt.$$
- 8 Konstruieren sie eine nicht rektifizierbare Kurve mit Spur $[0, 1]$.
- 9 Eine Peanokurve ist nicht rektifizierbar.
- 10 Die topologische Äquivalenz von Kurven $\mathbb{11}$ stellt eine Äquivalenzrelation dar.
- 11 Besitzt ein Weg ω eine stückweise stetig differenzierbare Parametrisierung, so besitzt er auch eine stetig differenzierbare Parametrisierung. Gilt dies auch für ›stückweise regulär‹? *Hinweis:* Es genügt, eine aus zwei Stücken bestehende Parametrisierung zu betrachten.
- 12 Sei $\gamma: I \rightarrow E$ stetig und rektifizierbar. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine C^1 -Kurve $\gamma_\varepsilon: I \rightarrow E$ mit $\|\gamma - \gamma_\varepsilon\|_{[0, 1]} < \varepsilon$.
- 13 Man gebe Beispiele für Kurven $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit folgenden Eigenschaften:
 - a. Injektiv auf $[0, 1)$, aber nicht doppeltpunktfrei.
 - b. Der zugehörige Weg ist regulär, diese Parametrisierung jedoch nicht.
 - c. Differenzierbar, aber nicht rektifizierbar.
 - d. Keine äquivalente Parametrisierung ist lipschitz.

- 14 Sei $\gamma: I \rightarrow E$ eine C^2 -Kurve in einem Hilbertraum E . Ist γ nach der Bogenlänge parametrisiert, so gilt

$$\dot{\gamma}(t) \perp \ddot{\gamma}(t).$$

- 15 Sei I ein kompaktes Intervall und (γ_n) eine gleichmäßig konvergente Folge in $C^0(I, \mathbb{R}^n)$ mit Grenzkurve γ .
- a. Sind die γ_n rektifizierbar und ihre Längen $L(\gamma_n)$ gleichmäßig beschränkt, so ist auch γ rektifizierbar, und es gilt

$$L(\gamma) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} L(\gamma_n).$$

- b. Es gilt nicht notwendigerweise Gleichheit.
- c. Die Behauptung gilt im Allgemeinen nicht mehr, wenn die Längen nicht gleichmäßig beschränkt sind.
- 16 Eine Kreisscheibe vom Radius 1 rollt ohne Schlupf auf der x -Achse gen Unendlich. Parametrisieren sie die Bahnkurve eines beliebigen festen Punktes auf dieser Scheibe und bestimmen sie ihre Länge bei einer Umdrehung der Kreisscheibe.
- 17 Zeigen sie, dass der Graph der Funktion

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} |t \sin(1/t)|, & t > 0, \\ 0, & t = 0, \end{cases}$$

nicht D^1 ist.

- 18 *Peanokurve* Sei $u: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ eine stetige Funktion mit

$$u(t+2) = u(t), \quad u(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1/3, \\ 1, & 2/3 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Definiere

$$\gamma(t) = \sum_{k \geq 0} 2^{-k-1} \gamma_0(9^k t), \quad \gamma_0(t) = (u(t), u(3t)).$$

Dann bildet γ das Intervall $[0, 1]$ surjektiv auf $[0, 1]^2$ ab.

14

Mehrdimensionale Differenziation

Bisher haben wir, was Differenzierbarkeit betrifft, nur Funktionen *einer* reellen Variablen betrachtet. Im einfachsten Fall handelt es sich um *reellwertige Funktionen einer Variablen*, also Funktionen von der Form $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Im vorangehenden Kapitel betrachteten wir allgemeiner *Kurven*, also Abbildungen der Form $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, wobei anstelle von \mathbb{R}^m auch ein beliebiger Banachraum stehen kann. Dies ist adäquat, wenn wir Größen betrachten, die nur von einer Variablen abhängen, wie zum Beispiel der Zeit t .

Mindestens ebenso oft hat man es jedoch auch mit Abbildungen des Typs $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zu tun, wo eine skalare Größe von mehreren Variablen abhängt, und noch allgemeiner mit Abbildungen des Typs $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, wo m »abhängige Variablen« durch n »unabhängigen Variablen« bestimmt werden. Ein bereits bekanntes Beispiel sind lineare Gleichungssysteme. Für solche Abbildungen können wir die Ableitung allerdings nicht mehr mithilfe von Differenzenquotienten erklären, da die Division durch einen Vektor nicht sinnvoll definiert werden kann – es existiert nur eine Vektorraum-, aber keine Körperstruktur.¹

Statt dessen charakterisieren wir *Differenzierbarkeit* durch *Approximierbarkeit* durch eine affine Abbildung. Begriffe der linearen Algebra werden dabei eine wesentliche Rolle spielen. Diese enge Verzahnung der infinitesimalen Analysis mit der linearen Algebra ist es auch, was die mehrdimensionale Differenzialrechnung bei der ersten Begegnung schwierig macht.

¹ Eine Ausnahme gibt es – der \mathbb{R}^2 kann durch Identifikation mit \mathbb{C} mit einer Körperstruktur versehen werden. Der daraus resultierende Ableitungsbegriff führt jedoch zu einer wesentlichen anderen Theorie, der sogenannten *Funktionentheorie*. Eine *einmal komplex differenzierbare* Funktion ist immer *unendlich oft differenzierbar* und lokal durch ihre Potenzreihe darstellbar, also eine *analytische* Funktion.

14.1

Elemente der Linearen Algebra

■ Beschränkte lineare Abbildungen

Wir betrachten zunächst lineare Abbildungen zwischen beliebigen Banachräumen V und W . Deren Normen bezeichnen wir mit $\|\cdot\|_V$ und $\|\cdot\|_W$ oder nur $\|\cdot\|$, wenn der Bezug aus dem Zusammenhang klar ist.

Definition Eine lineare Abbildung $A: V \rightarrow W$ heißt *beschränkt*, falls

$$\|A\|_{V,W} := \sup_{\|x\|_V=1} \|Ax\|_W < \infty. \quad \times$$

Aufgrund der positiven Homogenität jeder Norm gilt auch A^{-1}

$$\|A\|_{V,W} = \sup_{0 \neq x \in V} \frac{\|Ax\|_W}{\|x\|_V}.$$

Daher gilt auch *immer*

$$\|Ax\|_W \leq \|A\|_{V,W} \|x\|_V, \quad x \in V.$$

Dies werden wir im Folgenden kommentarlos verwenden.

1 **Satz** Für eine lineare Abbildung $A: V \rightarrow W$ sind äquivalent:

- (i) A ist Lipschitz auf V .
- (ii) A ist stetig auf V .
- (iii) A ist stetig im Nullpunkt.
- (iv) A ist beschränkt. \times

⟨⟨⟨ (i) \Rightarrow (ii) und (ii) \Rightarrow (iii) sind trivial.

(iii) \Rightarrow (iv) Zu $\varepsilon = 1$ existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\|Ax\|_W \leq 1, \quad \|x\|_V \leq \delta.$$

Für $x \in V$ mit $\|x\|_V = 1$ gilt dann

$$\|Ax\|_W = \delta^{-1} \|A(\delta x)\|_W \leq \delta^{-1}.$$

Also ist A beschränkt, genauer $\|A\|_{V,W} \leq \delta^{-1}$.

(iv) \Rightarrow (i) Folgt aus $\|Au - Av\|_W = \|A(u - v)\|_W \leq \|A\|_{V,W} \|u - v\|_V$. Dies ist übrigens auch die bestmögliche Lipschitzkonstante. \gggg

Wir betrachten nun den Raum $L(V, W)$ aller stetigen, oder was dasselbe ist, aller beschränkten linearen Abbildungen $A: V \rightarrow W$.

2 **Satz** Auf dem Raum $L(V, W)$ definiert $\|A\|_{V,W}$ eine Norm, die von den Normen auf V und W *induzierte Operatornorm*. Mit ihr wird $L(V, W)$ zu einem Banachraum. \times

Im Folgenden schreiben wir $\|A\|$ statt $\|A\|_{V,W}$, wenn die beteiligten Räume aus dem Zusammenhang klar sind.

««« Die Definitheit und positive Homogenität von $\|\cdot\|$ sind leicht zu sehen. Die Dreiecksungleichung ergibt sich mit

$$\begin{aligned} \|A + B\| &= \sup_{\|x\|=1} \|Ax + Bx\| \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \\ &\leq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| + \sup_{\|x\|=1} \|Bx\| = \|A\| + \|B\|. \end{aligned}$$

Um die Vollständigkeit zu zeigen, sei (A_k) eine Cauchyfolge in $L(V, W)$. Zu zeigen ist die Existenz einer linearen Abbildung $A \in L(V, W)$, so dass

$$\|A_k - A\|_{V,W} \rightarrow 0.$$

Für jedes $x \in V$ ist wegen $\|A_k x - A_l x\| \leq \|A_k - A_l\| \|x\|$ dann $(A_k x)$ eine Cauchyfolge in W . Aufgrund der Vollständigkeit von W konvergiert also $(A_k x)$, und wir können eine Abbildung $A: V \rightarrow W$ punktweise definieren durch

$$Ax := \lim_{k \rightarrow \infty} A_k x.$$

Diese Abbildung ist linear, denn

$$\begin{aligned} A(\lambda x + \mu y) &= \lim (A_k(\lambda x + \mu y)) \\ &= \lim (\lambda A_k x + \mu A_k y) \\ &= \lambda \lim A_k x + \mu \lim A_k y = \lambda Ax + \mu Ay. \end{aligned}$$

Sie ist beschränkt, denn es existiert $M = \sup \|A_k\|_{5.33}$, und damit gilt

$$\|Ax\| = \lim \|A_k x\| \leq \lim \|A_k\| \|x\| \leq M \|x\|, \quad x \in V.$$

Bleibt noch zu zeigen, dass $A_k \rightarrow A$ in der Operatornorm. Da

$$\|(A_k - A)x\| = \lim_{l \rightarrow \infty} \|(A_k - A_l)x\| \leq \lim_{l \rightarrow \infty} \|A_k - A_l\| \|x\|$$

für jedes $x \in V$, gilt auch

$$\|A_k - A\| \leq \lim_{l \rightarrow \infty} \|A_k - A_l\| \leq \sup_{l \geq k} \|A_k - A_l\|.$$

Letzteres konvergiert gegen Null für $k \rightarrow \infty$. »»»»

Der Beweis verwendet an keiner Stelle die Vollständigkeit des Urbildraumes V . Tatsächlich muss nur der Bildraum W vollständig sein. Es gilt somit folgender

Zusatz Der Satz gilt auch, wenn V nur ein normierter Raum ist. Insbesondere gilt er für den **Dualraum**

$$V^* := L(V, \mathbb{R})$$

eines normierten Raums V . \times

■ Hilberträume

Unter den Banachräumen spielen die Hilberträume eine besondere Rolle. Diese sind – siehe Abschnitt 5.7 – charakterisiert durch die Existenz eines *Skalarprodukts*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R},$$

so dass die Norm gegeben ist durch $_{5.30} \|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Für ein Skalarprodukt gilt immer die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung $_{5.29}$

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|.$$

Daher definiert jeder Vektor $v \in V$ ein lineares Funktional $L_v \in V^*$ durch

$$L_v : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \langle v, x \rangle,$$

denn wegen $|\langle v, x \rangle| \leq \|v\| \|x\|$ ist es beschränkt. Das Besondere an Hilberträumen ist unter anderem, dass umgekehrt *jedes* lineare Funktional in V^* auch auf diese Weise dargestellt werden kann.

- 3 **Rieszscher Darstellungssatz** Sei V ein Hilbertraum. Dann existiert zu jedem $L \in V^*$ ein eindeutiger Vektor $v \in V$, so dass

$$L = L_v = \langle v, \cdot \rangle. \quad \times$$

◀◀◀◀ Wir können $\|L\| = 1$ annehmen. Dann existiert in V eine Folge (v_k) mit $\|v_k\| = 1$ und $Lv_k \rightarrow 1$. Wir zeigen zunächst, dass dies eine Cauchyfolge ist.

Für jedes $0 < \varepsilon < 8$ existiert ein K , so dass

$$Lv_k > 1 - \varepsilon/8 > 0, \quad k \geq K.$$

Wegen $\|L\| = 1$ ist dann

$$\|v_k + v_l\| \geq |L(v_k + v_l)| = Lv_k + Lv_l > 2 - \varepsilon/4, \quad k, l \geq K.$$

Mit der Parallelogrammgleichung $_{A-5.41}$ folgt hiermit

$$\begin{aligned} \|v_k - v_l\|^2 &= 2\|v_k\|^2 + \|v_l\|^2 - \|v_k + v_l\|^2 \\ &\leq 4 - (2 - \varepsilon/4)^2 = \varepsilon - \varepsilon^2/16 < \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit ist (v_k) eine Cauchyfolge und aufgrund der Vollständigkeit von V konvergent. Für den Grenzwert $v = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k$ gilt dann

$$\|v\| = 1, \quad Lv = 1.$$

Wir zeigen, dass $L = L_v$.

Sei $x \neq 0$ mit $Lx \geq 0$. Wegen $\|L\| = 1$ und $Lv = \|v\|$ gilt für $t > 0$

$$Lx = \frac{L(v + tx) - L(v)}{t} \leq \frac{\|v + tx\| - \|v\|}{t}$$

und

$$Lx = \frac{L(v - tx) - L(v)}{-t} \geq -\frac{\|v - tx\| - \|v\|}{t}.$$

Also ist

$$-\frac{\|v - tx\| - \|v\|}{t} \leq Lx \leq \frac{\|v + tx\| - \|v\|}{t}.$$

Für $t \rightarrow 0$ haben beide Seiten aufgrund der Regel von l'Hospital 8.20 denselben Grenzwert

$$\frac{d}{dt} \|v + tx\| \Big|_{t=0} = \frac{\langle v, x \rangle}{\|v\|} = \langle v, x \rangle.$$

Somit folgt durch Grenzübergang auf beiden Seiten, dass $Lx = \langle v, x \rangle$.

Die Eindeutigkeit des darstellenden Vektors v ist eine leichte Übung. >>>>

■ Endlich dimensionale Räume

Alles bisher Gesagte gilt unabhängig von der Dimension der betrachteten Räume. In einem unendlich-dimensionalen Raum ist es jedoch möglich, dass eine lineare Abbildung *unbeschränkt* und damit *unstetig* ist A-7. Dies ist auf einem endlich-dimensionalen Raum *nicht möglich*, da die Einheitskugel dort kompakt ist 7.27, 7.29. Außerdem lassen sich lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Räumen bequem durch *Matrizen* darstellen. Aus diesen Gründen werden wir uns jetzt auf lineare Abbildungen zwischen endlich-dimensionalen Räumen beschränken.

Zunächst ein Wort zur Notation. Im Matrizenkalkül ist es üblich, Vektoren als *Spaltenvektoren*

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

zu schreiben. Dabei verzichten wir auf einen Vektorpfeil oder sonstige Auszeichnungen. In einem horizontal laufenden Text ist dies natürlich platzraubend.

Deshalb verwenden wir die Schreibweise

$$x = (x_1, \dots, x_n)^\top,$$

wobei \top die Matrizen-Transposition bezeichnet. Umgekehrt ist

$$x^\top = (x_1, \dots, x_n)$$

ein Zeilenvektor. Ein Zeilenvektor ist zudem nichts anderes als eine $1 \times n$ -Matrix, ein Spaltenvektor eine $n \times 1$ -Matrix, und die Transposition überführt das eine in das andere.

■ Matrizendarstellung

Seien V und W Vektorräume der Dimension n und m , respektive. Sind Basisvektoren v_1, \dots, v_n in V und w_1, \dots, w_m in W gewählt, so wird eine lineare Abbildung $A: V \rightarrow W$ durch eine $m \times n$ -Matrix wie folgt dargestellt. — Für jeden Basisvektor v_j gilt

$$Av_j = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten a_{ij} . Für $x = \sum_{j=1}^n x_j v_j$ gilt dann

$$\begin{aligned} Ax &= \sum_{j=1}^n x_j Av_j = \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) w_i = \sum_{i=1}^m y_i w_i \end{aligned}$$

mit

$$y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j.$$

Diesen Zusammenhang zwischen den Koeffizienten in der Gleichung

$$y = Ax$$

schreibt man im Matrizenkalkül bekanntlich als

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Man nennt dann

$$(a_{ij})_{mn} := (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

die *Matrixdarstellung* von A bezüglich der gewählten Basen in V und W . Deren j -te Spalte $(a_{1j} \dots a_{mj})^\top$ besteht aus den Koeffizienten des Vektors Av_j bezüglich der Basis w_1, \dots, w_m .

Eine Matrix ist somit immer eine *Darstellung* einer linearen Abbildung bezüglich einer bestimmten Basis. Wählen wir eine andere Basis, ändert sich auch die Matrix. Die entsprechenden Transformationen werden ausführlich in der Linearen Algebra diskutiert.

Ein wichtiger Spezialfall ist ein *lineares Funktional* $L: V \rightarrow \mathbb{R}$. Hier ist $m = 1$, und L wird durch eine $1 \times n$ -Matrix, sprich einen n -dimensionalen Zeilenvektor

$$l = (l_1, \dots, l_n)$$

dargestellt, wobei $l_j = Lv_j$. Für $x = \sum_{j=1}^n x_j v_j$ ist dann

$$Lx = \sum_{j=1}^n x_j Lv_j = \sum_{j=1}^n l_j x_j = (l_1, \dots, l_n)(x_1, \dots, x_n)^\top.$$

Die rechte Seite ist das Produkt eines Zeilenvektors mit einem Spaltenvektor, oder, was dasselbe ist, einer $1 \times n$ -Matrix mit einer $n \times 1$ -Matrix. Das Ergebnis ist ein Skalar.

Ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wird bezüglich einer Basis v_1, \dots, v_n dargestellt durch die *symmetrische* $n \times n$ -Matrix

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}, \quad a_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle.$$

Denn für $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$ und $y = \sum_{j=1}^n y_j v_j$ wird ja

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i, j=1}^n x_i \langle v_i, v_j \rangle y_j = (x_1, \dots, x_n)(a_{ij})(y_1, \dots, y_n)^\top = x^\top A y.$$

Die $1 \times n$ -Matrix x^\top wird also mit der $n \times 1$ -Matrix Ay multipliziert.

■ Der Standardfall

Der *Standardvektorraum* der Dimension n ist der \mathbb{R}^n , und jeder andere n -dimensionale Vektorraum ist zu diesem isomorph. Die *Standardbasis* des \mathbb{R}^n besteht aus den *Standardeinheitsvektoren*

$$e_j := (0, \dots, 1, \dots, 0)^\top, \quad 1 \leq j \leq n,$$

mit der 1 an der j -ten Stelle. Jeder Vektor hat dann die eindeutige Darstellung

$$x = \sum_{j=1}^n x_j e_j = (x_1, \dots, x_n)^\top.$$

Das *Standardskalarprodukt* auf dem \mathbb{R}^n ist erklärt durch

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

wobei man δ_{ij} als *Kronecker-Delta* bezeichnet. Damit wird e_1, \dots, e_n zu einer *Orthonormalbasis* des \mathbb{R}^n , und die Koeffizienten eines Vektors x erhält man als

$$x_i = \langle e_i, x \rangle, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Ist $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear und auch der \mathbb{R}^m mit der Standardbasis versehen, so erhält man die Koeffizienten der Matrixdarstellung von A als

$$a_{ij} = \langle e_i, Ae_j \rangle,$$

denn die j -te Spalte von A enthält ja gerade die Koeffizienten des Vektors Ae_j bezüglich der Standardbasis.

Die vom Standardskalarprodukt induzierte Norm ist die euklidische Norm,

$$\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

Falls Verwechslungsgefahr mit anderen Normen und Skalarprodukten besteht, schreiben wir hierfür genauer $\|\cdot\|_e$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle_e$.

Diese Situation bezeichnen wir im Folgenden als den *Standardfall*.

14.2

Totale Ableitung

Wir betrachten zunächst weiterhin Abbildungen zwischen beliebigen Banachräumen. Da es vorerst nur um lokale Aspekte geht, verzichten wir auf eine explizite Bezeichnung des Definitionsbereichs und schreiben

$$f: V \hookrightarrow W,$$

wenn es eine nichtleere offene Teilmenge $\Omega \subset V$ gibt, so dass $f: \Omega \rightarrow W$. Zu jedem Punkt im Definitionsbereich von f existiert also eine offene Umgebung, auf der f definiert ist. Dies ist die für uns zur Zeit wesentliche Eigenschaft des Definitionsbereiches einer Abbildung.

Die Normen auf V und W bezeichnen wir nun kürzer mit $|\cdot|_V$ und $|\cdot|_W$, oder noch einfacher $|\cdot|$, wenn der Bezug aus dem Zusammenhang klar ist. Die Doppelstriche $\|\cdot\|$ reservieren wir für die Operatornorm.

- 4 **Definition** Eine Abbildung $f: V \rightarrow W$ heißt im Punkt a *total differenzierbar* oder kurz *differenzierbar*, wenn es eine stetige lineare Abbildung $L: V \rightarrow W$ gibt, so dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - Lh|_W}{|h|_V} = 0.$$

In diesem Fall heißt L die *totale Ableitung* von f im Punkt a und wird mit $Df(a)$ bezeichnet. \times

Bemerkungen a. Die Eindeutigkeit dieser Ableitung und damit die Berechtigung der Bezeichnung $Df(a)$ zeigen wir gleich \S .

b. Diese Definition beinhaltet unsere früheren Definitionen der Differenzierbarkeit. Im Fall *einer* unabhängigen Variablen, also $V = \mathbb{R}$, ist f eine Kurve in W . Eine lineare Abbildung $L: \mathbb{R} \rightarrow W$ wird durch einen Vektor $v \in W$ dargestellt, und wir erhalten die Charakterisierung der Ableitung $Df(a) = \dot{f}(a)$ entsprechend dem zweiten Differenzierbarkeitssatz $_{13.1}$. Ist auch $W = \mathbb{R}$, so wird dieser Vektor durch eine reelle Zahl dargestellt, und wir erhalten die Ableitung einer reellen Funktion, $Df(a) = f'(a)$, einer Variable wie im ersten Differenzierbarkeitssatz $_{8.1}$.

c. Ist V von endlicher Dimension, so ist *jede* lineare Abbildung $A: V \rightarrow W$ stetig und diese Forderung redundant. Dies ist der einzige, aber wesentliche Unterschied zwischen dem endlich- und unendlich-dimensionalen Fall, was die Definition der totalen Ableitung angeht. \rightarrow

■ Die Landausymbole

Das Arbeiten mit Grenzwerten wie in der letzten Definition lässt sich mithilfe der *Landausymbole* erheblich vereinfachen.

Definition Sei $\dot{\Omega}$ eine punktierte Umgebung von $0 \in V$, und $f, g: \dot{\Omega} \rightarrow W$ seien zwei Abbildungen mit $g \neq 0$ auf $\dot{\Omega}$. Dann ist

$$f(h) = O(g(h)) \quad :\Leftrightarrow \quad \sup_{h \in \dot{\Omega}} \frac{|f(h)|}{|g(h)|} < \infty,$$

und man sagt, f ist von der Ordnung *groß-O* von g auf Ω . Ferner ist

$$f(h) = o(g(h)) \quad :\Leftrightarrow \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(h)|}{|g(h)|} = 0,$$

und man sagt, f ist von der Ordnung *klein-o* von g für $h \rightarrow 0$. \times

Es ist also f groß-O von g auf $\dot{\Omega}$, wenn es eine Konstante M gibt, so dass

$$|f(h)| \leq M |g(h)|, \quad h \in \dot{\Omega}.$$

Sie ist klein- o von g , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|f(h)| \leq \varepsilon |g(h)|, \quad 0 < |h| < \delta.$$

Die Landausymbole stehen übrigens nicht für eine bestimmte Funktion, sondern für *Klassen* von Funktionen. Eine Formulierung wie $O(h) + O(h) = O(h)$ ist daher zulässig und korrekt.

Rechenregeln Für das Rechnen mit den Landausymbolen gilt:

- (i) Eine $o(h)$ -Abbildung ist auch $O(h)$.
- (ii) Eine Linearkombination von $O(h)$ -Abbildungen ist wieder $O(h)$.
- (iii) Dasselbe gilt mit $o(h)$ anstelle von $O(h)$.
- (iv) Sind f und g beide $O(h)$, so ist auch $(f \circ g)(h) = O(h)$.
- (v) Ist sogar $f(h) = o(h)$ oder $g(h) = o(h)$, so ist $(f \circ g)(h) = o(h)$. ✕

⟨⟨⟨ Der Beweis ist als Übung überlassen. ⟩⟩⟩

- ▶ A. Es ist $\sin t = O(t)$ und $1 - \cos t = O(t^2)$.
- B. Für lineare Abbildung A ist beschränkt genau dann, wenn $Ah = O(h)$.
- C. Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine bilineare Form auf V und $A \in L(V)$, so ist

$$\langle Ah, h \rangle = O(\langle h, h \rangle) = o(h).$$

- D. Für $f \in C^{n+1}(I)$ ist aufgrund der Restgliedformeln

$$f(a+h) = T_a^n f(h) + O(h^{n+1}). \quad \blacktriangleleft$$

Mit den Landausymbolen können wir Differenzierbarkeit in einem Punkt auf folgende handliche Art charakterisieren.

- 5 **Satz** Eine Abbildung $f: V \rightarrow W$ ist im Punkt a differenzierbar genau dann, wenn es ein $L \in L(V, W)$ gibt, so dass

$$f(a+h) = f(a) + Lh + o(h).$$

Die Ableitung ist dann $Df(a) = L$, und sie ist eindeutig bestimmt. ✕

⟨⟨⟨ Die erste Behauptung folgt aus den Definitionen der Differenzierbarkeit und des Landausymbols. Ist $\Lambda: V \rightarrow W$ eine weitere lineare Abbildung mit der geforderten Eigenschaft, also

$$f(a+h) = f(a) + \Lambda h + o(h),$$

so ergibt die Subtraktion beider Gleichungen $(L - \Lambda)(h) = o(h)$. Dies ist für eine lineare Abbildung nur möglich, wenn $L - \Lambda = 0$ A-6. ⟩⟩⟩

Nun definieren wir Differenzierbarkeit *in jedem Punkt* wie üblich.

Definition Eine Abbildung $f: V \hookrightarrow W$ heißt *total differenzierbar*, wenn sie in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches total differenzierbar ist. ✕

Die Ableitung von f definiert in diesem Fall eine Abbildung

$$Df: V \hookrightarrow L(V, W), \quad x \mapsto Df(x)$$

in den Vektorraum $L(V, W)$ aller linearen Abbildungen von V nach W . Ist $\dim V = 1$, also f eine Kurve, so ist $L(V, W) \simeq W$ und $Df: V \hookrightarrow W$ wiederum eine Kurve wie f . Ist dagegen $\dim V > 1$, so ist eine solche Identifikation nicht mehr möglich, und Df ist von einem wesentlich anderen Typ als die Abbildung f selbst. Mehr dazu am Ende von Abschnitt 6.

6 ▶ A. *Affine Abbildungen:* Eine affine Abbildung

$$f: V \rightarrow W, \quad f(x) = Ax + b$$

mit $A \in L(V, W)$ und $b \in W$ ist in jedem Punkt differenzierbar. Denn es gilt

$$f(a + h) = A(a + h) = f(a) + Ah,$$

der o -Term ist also gar nicht erst vorhanden, und wir erhalten $Df(a) = A$ in jedem Punkt a . Die Ableitung als *Abbildung*

$$Df: V \rightarrow L(V, W), \quad a \mapsto Df(a) = A,$$

ist somit *konstant*.

B. *Quadratische Formen:* Ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine bilineare Form auf V und $A \in L(V)$, so nennt man

$$f: V \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \langle Ax, x \rangle$$

eine *quadratische Form* auf V . Dabei kann man ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass A *symmetrisch* ist, also

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle, \quad x, y \in V,$$

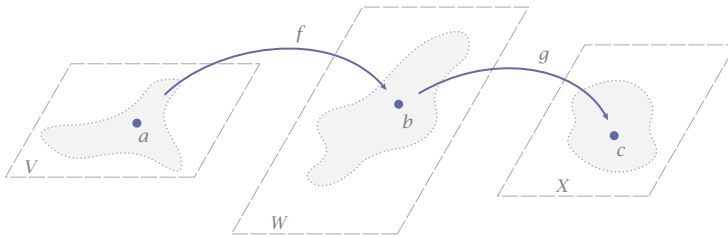
gilt _{A-8}. Dann folgt

$$\begin{aligned} f(x + h) &= \langle A(x + h), x + h \rangle \\ &= \langle Ax, x \rangle + \langle Ax, h \rangle + \langle Ah, x \rangle + \langle Ah, h \rangle \\ &= f(x) + 2 \langle Ax, h \rangle + o(h). \end{aligned}$$

Also ist f differenzierbar, und $Df(x)$ ist die lineare Abbildung $h \mapsto 2 \langle Ax, h \rangle$. Die Ableitung selbst ist die Abbildung

$$Df: V \rightarrow L(V, \mathbb{R}), \quad x \mapsto Df(x) = 2 \langle Ax, \cdot \rangle. \quad \blacktriangleleft$$

Abb 1 Zur Kettenregel



■ Kettenregel

Man sieht sofort, dass Differenziation eine lineare Operation ist. Sind also $f, g: V \rightarrow W$ im Punkt a differenzierbar, so auch $\lambda f + \mu g: V \rightarrow W$, und es gilt

$$D(\lambda f + \mu g)(a) = \lambda Df(a) + \mu Dg(a).$$

Interessanter ist die Verknüpfung zweier differenzierbarer Abbildungen. Für diese gilt die allgemeine

- 7 **Kettenregel** Ist $f: V \rightarrow W$ im Punkt a und $g: W \rightarrow X$ im Punkt $f(a)$ differenzierbar, so ist auch $g \circ f: V \rightarrow X$ im Punkt a differenzierbar, und es gilt

$$D(g \circ f)(a) = Dg(f(a))Df(a). \quad \times$$

Die Ableitung von $g \circ f$ ist also die Verknüpfung der beiden linearen Abbildungen

$$Dg(b): W \rightarrow X, \quad Df(a): V \rightarrow W,$$

wobei $b = f(a)$. Offensichtlich kommt es hierbei auf die Reihenfolge der Faktoren an, denn für $V \neq X$ wäre eine umgekehrte Verknüpfung der linearen Abbildungen erst gar nicht definiert.

⟨⟨⟨ Der Beweis verläuft genau wie im eindimensionalen Fall 8.5. Nach Voraussetzung ist f in einer Umgebung von a , und g in einer Umgebung von $b = f(a)$ definiert. Für hinreichend kleine h und k gilt somit

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + Ah + o(h), & A &= Df(a), \\ g(b+k) &= g(b) + Bk + o(k), & B &= Dg(b). \end{aligned}$$

Wir setzen $k = Ah + o(h)$. Ist h hinreichend klein, so ist auch $Ah + o(h) = O(h)$ hinreichend klein, und g ist für k wohldefiniert. Mit dieser Wahl von k erhalten

wir

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a + h) &= g(f(a) + Ah + o(h)) \\ &= g(f(a)) + B(Ah + o(h)) + o(Ah + o(h)) \\ &= (g \circ f)(a) + BAh + o(h), \end{aligned}$$

denn

$$Bo(h) = o(h), \quad o(Ah + o(h)) = o(h).$$

Somit $g \circ f$ ist im Punkt a differenzierbar mit Ableitung BA , was der Behauptung entspricht. \gggg

- 8 \blacktriangleright A. *Lineare Abbildung:* Ist $f: V \rightarrow W$ differenzierbar und $A: W \rightarrow X$ eine stetige lineare Abbildung, so ist auch

$$Af: V \rightarrow X$$

differenzierbar, und für jeden Punkt x im Definitionsbereich ist ${}_6$

$$D(Af)(x) = (DA)(f(x)) Df(x) = ADf(x).$$

B. *Abbildung einer Kurve:* Ist $\varphi: I \rightarrow V$ eine differenzierbare Kurve in V und $f: V \rightarrow W$ differenzierbar, so ist

$$f \circ \varphi: I \rightarrow W$$

eine differenzierbare Kurve in W mit Ableitung

$$(f \circ \varphi)'(t) = Df(\varphi(t))\dot{\varphi}(t), \quad t \in I.$$

Im Falle einer Geraden φ , mit $\varphi(t) = x + t\nu$, ist insbesondere

$$(f \circ \varphi)'(t) \Big|_{t=0} = f(x + t\nu)' \Big|_{t=0} = Df(x)\nu.$$

C. *Quadratische Form entlang einer Kurve:* Ist $\varphi: I \rightarrow V$ eine differenzierbare Kurve in V und

$$f: V \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \langle Ax, x \rangle$$

eine quadratische Form auf V ${}_6$ mit symmetrischem, beschränktem A , so ist

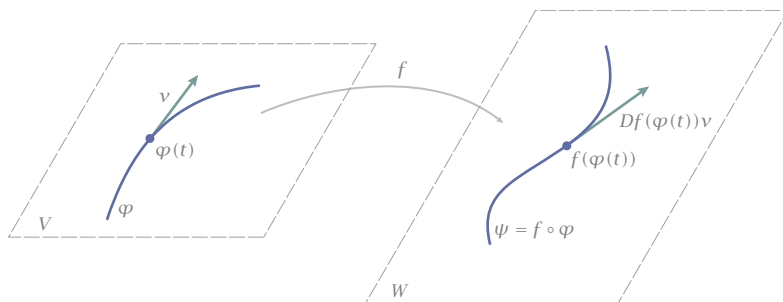
$$\Phi = f \circ \varphi: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(t) = \langle A\varphi(t), \varphi(t) \rangle$$

eine differenzierbare reelle Funktion einer Variablen. Ihre Ableitung ist

$$\Phi'(t) = Df(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) = 2 \langle A\varphi(t), \dot{\varphi}(t) \rangle.$$

Speziell für eine Gerade φ mit $\varphi(t) = x + t\nu$ ist

$$\Phi'(0) = 2 \langle Ax, \nu \rangle. \quad \blacktriangleleft$$

Abb 2 Die Kurve $f \circ \varphi$ und ihre Ableitung

Es sei nochmals betont, dass alles bisher Gesagte unabhängig von der Dimension der beteiligten Räume gilt. Im unendlich-dimensionalen Fall kommt einzig noch die Forderung hinzu, dass alle beteiligten linearen Abbildungen auch beschränkt sind.

14.3

Richtungsableitungen und Jacobimatrix

Neben dem Begriff der totalen Ableitung gibt es noch einen schwächeren Ableitungsbegriff, den der *Richtungsableitung*. Ist a ein Punkt im Definitionsbereich von $f: V \rightarrow W$ und $v \in V$, so ist die Abbildung

$$\mathbb{R} \rightarrow W, \quad t \mapsto f(a + tv)$$

in einer Umgebung von 0 wohldefiniert und stetig und definiert somit eine *Kurve in W*. Hierfür haben wir die Ableitung bereits ohne Rückgriff auf die totale Ableitung im vorangehenden Kapitel erklärt.

Definition Sei $f: V \rightarrow W$ im Punkt a definiert und $v \in V$. Dann heißt

$$\partial_v f(a) := f(a + tv)' \Big|_{t=0} \in W,$$

falls diese Ableitung existiert, die *Richtungsableitung* von f im Punkt a in Richtung v . \times

► A. Für eine affine Abbildung erhält man

$$\begin{aligned} \partial_v (Ax + b) &= (A(x + tv) + b)' \Big|_{t=0} \\ &= (Ax + b + tAv)' \Big|_{t=0} = Av. \end{aligned}$$

B. Für eine quadratische Form gilt

$$\begin{aligned}\partial_v \langle Ax, x \rangle &= \langle A(x + tv), x + tv \rangle' \Big|_{t=0} \\ &= (\langle Ax, x \rangle + 2t \langle Ax, v \rangle + t^2 \langle Av, v \rangle)' \Big|_{t=0} = 2 \langle Ax, v \rangle.\end{aligned}$$

Totale Differenzierbarkeit in einem Punkt impliziert die Existenz aller Richtungsableitungen in diesem Punkt. Denn die Gerade $t \mapsto a + tv$ ist differenzierbar, und die Kettenregel \dagger ergibt

$$\partial_v f(a) = f(a + tv)' \Big|_{t=0} = Df(a)(a + tv)' \Big|_{t=0} = Df(a)v.$$

Somit gilt folgender

- 9 **Satz** Ist $f: V \rightarrow W$ im Punkt a total differenzierbar, so existieren dort auch alle Richtungsableitungen, und es gilt

$$\partial_v f(a) = Df(a)v. \quad \times$$

Aus der Existenz aller Richtungsableitungen folgt allerdings nicht die totale Differenzierbarkeit, wie das folgende Beispiel zeigt.

- 10 \triangleright Betrachte

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) \doteq \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}.$$

Für jeden Vektor v gilt $f(tv) = tf(v)$, wie man sofort nachrechnet. Daher ist

$$\partial_v f(0) = f(tv)' \Big|_{t=0} = f(v).$$

Diese Abbildung ist aber *nicht linear* in v . Dies müsste sie aber sein, wenn f im Punkt 0 total differenzierbar wäre. Also ist f in 0 nicht total differenzierbar. \blacktriangleleft

■ Partielle Ableitungen

Im Standardraum \mathbb{R}^n mit der Standardbasis e_1, \dots, e_n spielen die Ableitungen in Richtung der Einheitsvektoren eine besondere Rolle.

Definition Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow W$ im Punkt a definiert. Dann heißt

$$\partial_j f(a) \doteq \partial_{e_j} f(a) = f(a + te_j)' \Big|_{t=0} = f(a_1, \dots, a_j + t, \dots, a_n)' \Big|_{t=0},$$

falls diese Ableitung existiert, die *j-te partielle Ableitung* von f im Punkt a . \times

Man betrachtet also f als Funktion *nur der j-ten Koordinate*, während alle anderen Koordinaten fixiert sind, und bildet hiervon die Ableitung wie im Fall einer Kurve. Andere übliche Bezeichnungen hierfür sind

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a), \quad \partial_{x_j} f(a), \quad f_{x_j}(a).$$

Aus der Existenz aller partiellen Ableitungen in einem Punkt folgt allerdings nicht einmal die Stetigkeit der Abbildung an dieser Stelle:

11 ▶ Betrachte

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) \doteq \frac{2xy}{x^2 + y^2}.$$

Aus $f(x, 0) = 0$ und $f(0, y) = 0$ folgt sofort

$$\partial_x f(0, 0) = 0, \quad \partial_y f(0, 0) = 0.$$

Die Funktion ist im Nullpunkt aber nicht einmal stetig, denn entlang einer Nullpunktsgerechten $t \mapsto (t \cos \varphi, t \sin \varphi)$ gilt

$$f(t \cos \varphi, t \sin \varphi) = \frac{2 \cos \varphi \sin \varphi}{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = \sin 2\varphi, \quad t \neq 0.$$

Also gilt auch

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t \cos \varphi, t \sin \varphi) = \sin 2\varphi.$$

Der Grenzwert hängt somit von der Richtung ab und nimmt alle Werte im Intervall $[-1, 1]$ an. Also ist f im Nullpunkt nicht stetig und damit auch nicht differenzierbar. ◀

■ Jacobimatrix

Im Standardfall haben wir es mit einer Abbildung der Gestalt

$$f: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m, \quad f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

zu tun. Ihre totale Ableitung im Punkt a ist eine lineare Abbildung

$$Df(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Ihre Matrixdarstellung bezüglich der Standardbasen heißt die *Jacobimatrix* oder *Funktionalmatrix* von f im Punkt a .

Satz Ist $f: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ im Punkt a total differenzierbar, so wird ihre totale Ableitung $Df(a)$ dargestellt durch die *Jacobi-* oder *Funktionalmatrix*

$$Jf(a) := (\partial_j f_i(a))_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}. \quad \times$$

◀◀◀ Die ij -te Komponente a_{ij} dieser Matrix ist gegeben durch

$$a_{ij} = \langle e_i, Df(a)e_j \rangle = \langle e_i, \partial_j f(a) \rangle = \partial_j \langle e_i, f(a) \rangle,$$

und $\langle e_i, f(a) \rangle = f_i(a)$ ist die i -te Komponente von f . Das ergibt die Behauptung. ▶▶▶

Andere Schreibweisen für die Jacobimatrix sind

$$Jf(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{mn} = (f_{i,x_j}(a))_{mn} = \begin{pmatrix} f_{1,1}(a) & \cdots & f_{1,n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{m,1}(a) & \cdots & f_{m,n}(a) \end{pmatrix}.$$

► **A. Affine Abbildung in Koordinaten:** Im Standardfall besitzt eine affine Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ die Darstellung

$$f(x) = Ax + b = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + b_i \right)_{1 \leq i \leq m}.$$

Dann ist in jedem Punkt

$$\partial_j f_i(x) = a_{ij},$$

die Jacobimatrix von f ist somit

$$Jf(x) = (a_{ij})_{mn} = A.$$

B. Quadratische Form in Koordinaten: Eine quadratische Form $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt im Standardfall die Darstellung

$$f(x) = \langle Ax, x \rangle = \sum_{1 \leq k, l \leq n} a_{kl} x_k x_l$$

mit symmetrischen Koeffizienten $a_{kl} = a_{lk}$. Die Jacobimatrix einer solchen skalaren Funktion ist ein $1 \times n$ -Zeilenvektor mit Komponenten $\partial_j f(x)$. Für diese finden wir mit der Produktregel für Funktionen einer Variablen

$$\partial_j f(x) = \sum_{k=1}^n a_{kj} x_k + \sum_{l=1}^n a_{jl} x_l = 2 \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k = 2 \langle Ax, e_j \rangle.$$

Somit ist

$$Jf(x) = 2(Ax)^\top. \quad \blacktriangleleft$$

Die Jacobimatrix der Verknüpfung zweier linearer Abbildungen ist das Matrixprodukt ihrer Jacobimatrizen. Die Kettenregel erhält damit im Standardfall die folgende Form.

- 12 Kettenregel im Standardfall** Ist $f: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ im Punkt a und $g: \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^s$ im Punkt $f(a)$ differenzierbar, so ist auch $g \circ f: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^s$ im Punkt a differenzierbar, und es gilt

$$J(g \circ f)(a) = Jg(f(a)) Jf(a). \quad \blacktimes$$

► A. Wendet man diese Formel auf die Standard-Einheitsvektoren an, so erhält man für die partiellen Ableitungen

$$\partial_j(g \circ f)(a) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a)) \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a), \quad 1 \leq j \leq n.$$

Schreibt man f einfacher als $y = y(x)$ und $b = f(a)$, so erhält man die leicht zu merkende Formel

$$\partial_j(g \circ f)(a) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_k}(b) \frac{\partial y_k}{\partial x_j}(a), \quad 1 \leq j \leq n.$$

B. Betrachte

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |x|_e.$$

Für $x \neq 0$ ist dann

$$\partial_j f(x) = \frac{x_j}{|x|_e}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

und damit

$$Jf(x) = \frac{x^\top}{|x|_e}. \quad \blacktriangleleft$$

■ Ein Differenzierbarkeitskriterium

Wir kennen nun die Begriffe der totalen Ableitung, der Richtungsableitung und der partiellen Ableitung. Dabei zieht die Existenz der totalen Ableitung diejenige aller anderen Ableitungen nach sich \circ . Wie aber verifiziert man die Existenz der totalen Ableitung? Die Existenz aller partiellen oder aller Richtungsableitungen reicht offensichtlich nicht aus $_{10 \text{ \& } 11}$.

Es stellt sich heraus, dass die *Stetigkeit* aller partiellen Ableitungen eine hinreichende Bedingung darstellt. Dabei beschränken wir uns auf den Standardfall und die Annahme, dass die partiellen Ableitungen auf dem *ganzen* Definitionsbereich stetig sind.

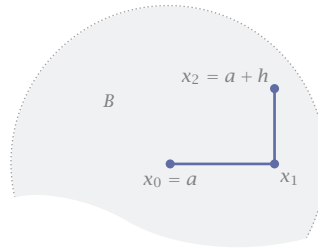
- 13 **Differenzierbarkeitskriterium** Existieren sämtliche partiellen Ableitungen von $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und sind diese stetig, so ist f total differenzierbar, und die Abbildung $Df: \mathbb{R}^n \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ist ebenfalls stetig. \blacktriangleright

⟨⟨⟨⟨ Betrachte f auf einer nichtleeren Kugel $B = \{|x - a| < r\}$ in seinem Definitionsbereich. Ist $a + h \in B$, so liegen auch die Punkte

$$x_k = a + h_1 e_1 + \dots + h_k e_k, \quad 0 \leq k \leq n,$$

Abb 3

Zum Beweis des Differenzierbarkeitskriteriums



sämtlich in B , wobei $x_0 = a$ und $x_n = a + h$. Es gilt dann

$$f(a + h) - f(a) = f(x_n) - f(x_0) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})).$$

Für jeden Summanden gilt

$$\begin{aligned} f(x_i) - f(x_{i-1}) &= f(x_{i-1} + th_i e_i) \Big|_0^1 \\ &= \int_0^1 f'(x_{i-1} + th_i e_i) dt \\ &= \int_0^1 \partial_i f(x_{i-1} + th_i e_i) h_i dt \\ &= \partial_i f(a) h_i + h_i \int_0^1 (\partial_i f(x_{i-1} + th_i e_i) - \partial_i f(a)) dt. \end{aligned}$$

Aufgrund der Definition der x_i und der Stetigkeit der partiellen Ableitungen gilt

$$\partial_i f(x_{i-1} + th_i e_i) - \partial_i f(a) \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0,$$

gleichmäßig für $0 \leq t \leq 1$. Das letzte Integral ist daher $o(1)$, und damit

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = \partial_i f(a) h_i + o(h_i).$$

Insgesamt erhalten wir

$$f(a + h) - f(a) = \sum_{i=1}^n (\partial_i f(a) h_i + o(h_i)) = \sum_{i=1}^n \partial_i f(a) h_i + o(h).$$

Da die Summe eine lineare Abbildung in h darstellt, ist f in a total differenzierbar mit

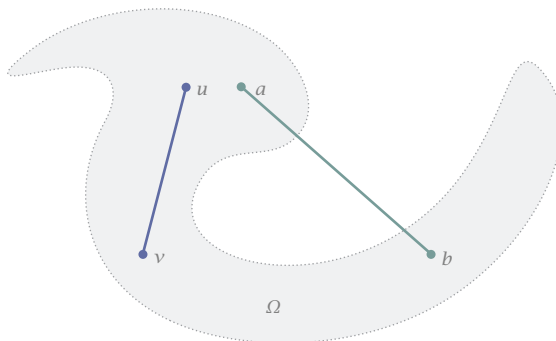
$$Df(a)h = \sum_{i=1}^n \partial_i f(a) h_i.$$

Die Stetigkeit der Ableitung folgt aus der Stetigkeit der $\partial_i f$. \gggg

Die Differenzierbarkeit einer Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ stellt man somit fest, indem man die Existenz sämtlicher partiellen Ableitungen und deren Stetigkeit nachweist. Solche Abbildungen nennt man *von der Klasse C^1* 6.

Abb 4

$[u, v] \subset \Omega$,
 $[a, b] \not\subset \Omega$



14.4 Der Mittelwertsatz

Der Mittelwertsatz der eindimensionalen Differenzialrechnung 8.10 gilt in höheren Dimensionen nur für *skalare Funktionen*. Voraussetzung hierfür ist, dass mit zwei Punkten u und v auch die gesamte *Verbindungsstrecke*

$$[u, v] := \{(1-t)u + tv : 0 \leq t \leq 1\}$$

zum Definitionsbereich gehört. Dann gilt der folgende

- 14 **Mittelwertsatz für skalare Funktionen** Sei $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Gehört $[u, v]$ zum Definitionsbereich von f , so gilt

$$f(v) - f(u) = Df(x)(v - u)$$

mit einem $x \in [u, v]$. ✕

«»» Man bilde die Hilfsfunktion $\phi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\phi(t) = f((1-t)u + tv)$ und wende den klassischen Mittelwertsatz 8.10 an A-16. »»»

Ist der Zielraum dagegen höherdimensional, so gilt der Mittelwertsatz nicht mehr. Für die Kreiskurve $\gamma: t \mapsto (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$ ist zum Beispiel

$$\gamma(1) - \gamma(0) = 0 \neq \dot{\gamma}(t), \quad t \in [0, 1],$$

da Sinus und Cosinus keine gemeinsamen Nullstellen besitzen. Es gibt aber eine etwas schwächere, ebenfalls sehr nützliche Identität, die in beliebigen Dimensionen gilt.

- 15 **Lemma von Hadamard** Sei $f: V \rightarrow W$ stetig differenzierbar. Gehört $[u, v]$ zum Definitionsbereich von f , so gilt

$$f(v) - f(u) = \Lambda(v - u)$$

mit der linearen Abbildung $\Lambda = \int_0^1 Df((1-t)u + tv) dt$. \times

Hierbei ist $t \mapsto Df((1-t)u + tv)$ eine stetige Kurve im Vektorraum $L(V, W)$, dessen Integral $_{10.7}$ ebenfalls ein Element von $L(V, W)$ ergibt. Im Standardfall ist dies eine von t abhängende $m \times n$ -Matrix, deren Integral komponentenweise gebildet wird.

⟨⟨⟨ Betrachte die Streckenparametrisierung

$$\varphi: [0, 1] \rightarrow [u, v], \quad \varphi(t) = (1-t)u + tv,$$

mit Anfangspunkt u und Endpunkt v . Nach Voraussetzung ist $f \circ \varphi$ wohldefiniert und aufgrund der Kettenregel $_7$ stetig differenzierbar. Mit dem Hauptsatz für Kurven $_{13.6}$ ergibt sich

$$f(v) - f(u) = f \circ \varphi \Big|_0^1 = \int_0^1 (f \circ \varphi)'(t) dt = \int_0^1 Df(\varphi(t))\dot{\varphi}(t) dt.$$

Hierbei ist $\dot{\varphi}(t) = v - u$ unabhängig von t , so dass wir diesen Term *hinter* das Integral ziehen können $_{A-10.29}$ ². Das ergibt die Behauptung. $\rangle\rangle\rangle$

Aus dem Lemma von Hadamard folgt nun der klassische Schrankensatz auch in höheren Dimensionen.

- 16 **Schränkensatz** Sei $f: V \rightarrow W$ stetig differenzierbar. Gehört $[u, v]$ zum Definitionsbereich von f , so gilt

$$|f(v) - f(u)| \leq \max_{x \in [u, v]} \|Df(x)\| |v - u|$$

mit der durch die Vektorraumnormen induzierten Operatornorm $\|\cdot\|$. \times

⟨⟨⟨ Setze $\varphi(t) = (1-t)u + tv$ wie zuvor. Aufgrund des Hadamardschen Lemmas ist dann

$$|f(v) - f(u)| \leq \|\Lambda\| |v - u|$$

mit

$$\begin{aligned} \|\Lambda\| &= \left\| \int_0^1 Df(\varphi(t)) dt \right\| \leq \int_0^1 \|Df(\varphi(t))\| dt \\ &\leq \max_{t \in [0, 1]} \|Df(\varphi(t))\| = \max_{x \in [u, v]} \|Df(x)\|. \quad \rangle\rangle\rangle \end{aligned}$$

² Wir dürfen $v - u$ nicht nach vorne ziehen, da es das Argument von Λ ist.

Korollar Ist $f: V \rightarrow W$ von der Klasse C^1 , so ist f lokal lipschitz. \times

Dabei heißt eine Abbildung *lokal lipschitz*, wenn jeder Punkt ihres Definitionsbereiches eine Umgebung besitzt, auf der die Abbildung lipschitz ist. Die L -Konstanten dürfen dabei von der Umgebung abhängen.

««« Nach Voraussetzung ist $Df: V \rightarrow L(V, W)$ stetig. Also ist auch

$$\|Df\| : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|Df(x)\|$$

stetig. Um jedem Punkt existiert daher eine Kugel B im Definitionsbereich von f , so dass

$$\sup_{x \in B} \|Df(x)\| = M < \infty.$$

Sind nun $u, v \in B$, so ist auch $[u, v] \subset B$ wegen der Konvexität jeder Kugel A-5.42, und aufgrund des Schrankensatzes 16 gilt

$$|f(v) - f(u)| \leq M |v - u|.$$

Somit ist f auf B M -lipschitz. »»»

14.5

Gradient

Für *skalare* Funktionen gibt es schließlich noch einen dritten Ableitungsbegriff, den des *Gradienten*. Ist $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt a differenzierbar, so definiert die totale Ableitung

$$Df(a) : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad h \mapsto Df(a)h$$

ein *lineares Funktional* auf V . Ist V nun ein *Hilbertraum* mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, so existiert aufgrund des Rieszschen Darstellungssatzes 3 genau ein Vektor $\phi \in V$ mit der Eigenschaft, dass

$$Df(a)h = \langle \phi, h \rangle, \quad h \in V.$$

Man sagt, ϕ stellt $Df(a)$ bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dar. Dieser Vektor ist der *Gradient* von f im Punkt a .

Definition Sei V ein Hilbertraum. Ist $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt a differenzierbar, so ist der *Gradient* von f an der Stelle a der eindeutig bestimmte und mit $\nabla f(a)$ bezeichnete Vektor in V mit der Eigenschaft, dass

$$Df(a) = \langle \nabla f(a), \cdot \rangle. \quad \times$$

17 ▶ A. Für jedes $v \in V$ ist

$$L_v : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad L_v(x) = \langle v, x \rangle$$

differenzierbar mit $DL_v(x)h = \langle v, h \rangle$. Also ist

$$\nabla L_v = v$$

in jedem Punkt von V .

B. Ist $A : V \rightarrow V$ linear und symmetrisch, so ist

$$f : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \langle Ax, x \rangle$$

differenzierbar mit Ableitung $Df(x)h = 2 \langle Ax, h \rangle$. Somit ist

$$\nabla f(x) = 2Ax, \quad x \in V. \quad \blacktriangleleft$$

Der Gradient ist also die *Darstellung* der totalen Ableitung einer skalaren Funktion bezüglich eines Skalarproduktes. Ohne Bezug auf ein Skalarprodukt macht es keinen Sinn, von einem Gradienten zu sprechen. Besonders wichtig ist natürlich der Standardraum \mathbb{R}^n mit dem Standardskalarprodukt.

Satz Im Standardraum \mathbb{R}^n mit dem Standardskalarprodukt ist der Gradient einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ der Spaltenvektor

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \vdots \\ \partial_n f \end{pmatrix} = Df^T. \quad \times$$

««« Die j -te Komponente von ∇f ist ja

$$\langle \nabla f, e_j \rangle = Df e_j = \partial_j f,$$

während $Df = (\partial_1 f, \dots, \partial_n f)$. »»»

▶ Für $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = x^2 y^4 \sin z$ ist

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2xy^4 \sin z \\ 4x^2 y^3 \sin z \\ x^2 y^4 \cos z \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleleft$$

Der Gradient ∇f ist also ein *Spaltenvektor*, während die Ableitung Df einer skalaren Funktion durch einen *Zeilenvektor* dargestellt wird. Dies ist ein wichtiger Unterschied, der zum Beispiel Folgen hat für deren Verhalten unter Koordinatentransformationen.

Bemerkung Das Symbol ∇ selbst wird *Nablaoperator* genannt und bezeichnet in der klassischen Vektoranalysis den vektoriellen Differenzialoperator

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix}.$$

Der *Gradient* von f kann damit – rein formal interpretiert – verstanden werden als das Produkt des Vektors ∇ mit dem Skalar f :

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix} f = \begin{pmatrix} \partial_1 f \\ \vdots \\ \partial_n f \end{pmatrix}.$$

Skalarprodukte und Kreuzprodukte von ∇ mit Vektorfunktionen sind ebenfalls erklärt, sie werden uns später – im dritten Band – als *Rotation* und *Divergenz* begegnen. Das Skalarprodukt von ∇ mit sich selbst ergibt den *Laplaceoperator*

$$\nabla \cdot \nabla = \sum_{j=1}^n \partial_j^2 =: \Delta. \quad \rightarrow$$

■ Richtung des steilsten An- und Abstiegs

Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ um den Punkt a definiert. Für jeden Einheitsvektor $e \in \mathbb{R}^n$ ist dann

$$f_e: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(a + te)$$

in einer Umgebung von 0 definiert und stetig differenzierbar. Die Ableitung $f'_e(0)$ beschreibt dann die *Anstiegsrate* von f im Punkt a in Richtung e . Wird diese für einen Vektor e *maximal* respektive *minimal*, so nennen wir e eine *Richtung des steilsten Anstiegs* respektive eine *Richtung des steilsten Abstiegs*. Diese Richtungen müssen existieren, da die Einheitssphäre im \mathbb{R}^n kompakt ist.

Satz Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt a differenzierbar. Ist $\nabla f(a) \neq 0$, so bezeichnen $\nabla f(a)$ und $-\nabla f(a)$ die in diesem Falle eindeutigen Richtungen des steilsten An- respektive Abstiegs von f im Punkt a . \times

⟨⟨⟨ Es ist

$$f'_e(0) = f(a + te)'|_{t=0} = Df(a)e = \langle \nabla f(a), e \rangle.$$

Aufgrund der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung gilt

$$|f'_e(0)| = |\langle \nabla f(a), e \rangle| \leq |\nabla f(a)| |e| = |\nabla f(a)|.$$

Ist $\nabla f(a) \neq 0$, so tritt Gleichheit hierbei *genau dann* ein, wenn die Vektoren $\nabla f(a)$ und e kollinear sind_{5,29}. Somit wird $f'_e(0)$ maximal genau für $e \uparrow \nabla f(a)$,

und minimal genau für $e \parallel \nabla f(a)$. In allen anderen Richtungen ist die Ableitung nicht extremal. Das ist gerade die Behauptung. \gggg

Zu beachten ist, dass ∇f in die Richtung des steilsten Anstiegs im *Definitionsbereich* von f weist, und nicht am Graphen von f .

14.6 Höhere Ableitungen

Wir betrachten nun höhere partielle Ableitungen. Existiert die partielle Ableitung einer Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow W$ nach einer Koordinate x_k auf dem ganzen Definitionsbereich von f , so erhalten wir wieder eine Abbildung $\partial_k f: \mathbb{R}^n \rightarrow W$. Man kann also eventuell ein weiteres Mal partiell differenzieren, sagen wir nach x_l . Dann erhalten wir eine *zweite partielle Ableitung*

$$\partial_l \partial_k f := \partial_l(\partial_k f) = (f_{x_k})_{x_l} = f_{x_k x_l} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}: \mathbb{R}^n \rightarrow W,$$

wobei wir hier verschiedene Schreibweisen für dieselbe Sache aufführen. Und so weiter ... Zum Beispiel ist

$$\partial_m \partial_l \partial_k f = \partial_m(\partial_l \partial_k f) = f_{x_k x_l x_m} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_l \partial x_m}.$$

Definition Für eine Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow W$ ist die *r-te partielle Ableitung*

$$\partial_{k_r} \dots \partial_{k_2} \partial_{k_1} f = f_{x_{k_1} x_{k_2} \dots x_{k_r}} = \frac{\partial^r f}{\partial x_{k_1} \dots \partial x_{k_r}}$$

rekursiv erklärt durch

$$\partial_{k_r} \dots \partial_{k_2} \partial_{k_1} f := \partial_{k_r}(\partial_{k_{r-1}} \dots \partial_{k_1} f),$$

sofern alle Zwischenableitungen existieren. \times

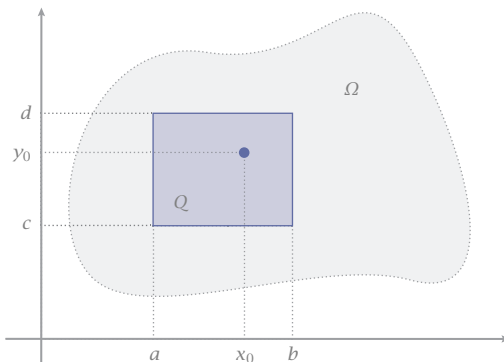
► Für $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = x^2 y^4 \sin z$ ist beispielsweise

$$\begin{aligned} f_x &= 2xy^4 \sin z, & f_z &= x^2 y^4 \cos z, \\ f_{xy} &= 8xy^3 \sin z, & f_{zy} &= 4x^2 y^3 \cos z, \\ f_{xyz} &= 8xy^3 \cos z, & f_{zyx} &= 8xy^3 \cos z. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

In diesem Beispiel kommt es auf die Reihenfolge der partiellen Ableitungen *nicht an*, es ist $f_{xyz} = f_{zyx}$. Das ist aber nicht immer so.

Abb 5

Zum Lemma von Schwarz



► Betrachte

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) \doteq \frac{x^3 y - x y^3}{x^2 + y^2}.$$

Wegen $f(0, \cdot) \equiv 0$ und $f(\cdot, 0) \equiv 0$ gilt

$$f_x(0, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, y)}{h} = -y, \quad f_y(x, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, h)}{h} = x.$$

Somit ist

$$f_{xy}(0, y) = -1, \quad f_{yx}(x, 0) = 1,$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und damit $f_{xy}(0, 0) \neq f_{yx}(0, 0)$. ◀

Zum Glück reicht die *Stetigkeit* der partiellen Ableitungen, um sie unabhängig von deren Reihenfolge zu machen. Die Quintessenz ist das

- 18 **Lemma von Schwarz** Sei $f: \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar, und seien x und y zwei beliebige Koordinaten in Ω . Existiert die zweite Ableitung f_{xy} auf Ω und ist sie dort stetig, so existiert auch f_{yx} auf Ω , und es gilt

$$f_{xy} = f_{yx}. \quad \times$$

◀◀◀ Da nur die beiden Koordinaten x und y involviert sind und alle anderen fixiert werden können, beschränken wir uns auf den Fall $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Fixiere einen Punkt $(x_0, y_0) \in \Omega$ und wähle Intervalle $[a, b]$ um x_0 und $[c, d]$ um y_0 so, dass

$$Q := [a, b] \times [c, d] \subset \Omega.$$

Da f stetig differenzierbar in x ist, gilt

$$f(x, y) - f(a, y) = \int_a^x f_x(t, y) dt, \quad (x, y) \in Q.$$

Nach Voraussetzung ist f_{xy} auf Q stetig. Aufgrund des anschließend bewiesenen Lemmas ₁₉ definiert das Integral daher eine in y differenzierbare Funktion, deren Ableitung man durch Differenzieren »unter dem Integral« erhält. Es gilt also

$$f_y(x, y) - f_y(a, y) = \int_a^x f_{xy}(t, y) dt.$$

Ebenfalls wegen der Stetigkeit von f_{xy} definiert dieses Integral für festes y eine nach x differenzierbare Funktion. Somit ist auch $f_y(x, y)$ nach x differenzierbar, und es gilt

$$\partial_x f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \int_a^x f_{xy}(t, y) dt = f_{xy}(x, y).$$

Das war zu zeigen. »»»

Das folgende Lemma macht eine Aussage darüber, wann ein sogenanntes *parameterabhängiges Integral* eine differenzierbare Funktion definiert, deren Ableitung man durch »Differenziation unter dem Integral« erhält.

- 19 Lemma** Sei $Q = [a, b] \times [c, d]$ mit Koordinaten (x, y) . Ist $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, nach y partiell differenzierbar und f_y ebenfalls stetig auf Q , so ist auch die Funktion

$$\phi: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(y) = \int_a^b f(t, y) dt$$

differenzierbar, und es gilt

$$\phi'(y) = \int_a^b f_y(t, y) dt. \quad \times$$

««« Sei y ein innerer Punkt von $[c, d]$ — Randwerte gehen analog. Aufgrund des Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung _{10.16} ist

$$\begin{aligned} \phi(y+h) - \phi(y) &= \int_a^b f(t, y+sh) \Big|_0^1 dt \\ &= h \int_a^b \left(\int_0^1 f_y(t, y+sh) ds \right) dt. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} (\phi(y+h) - \phi(y)) &= \int_a^b f_y(t, y) dt \\ &= \int_a^b \int_0^1 f_y(t, y+sh) ds dt - \int_a^b \int_0^1 f_y(t, y) ds dt \\ &= \int_a^b \int_0^1 (f_y(t, y+sh) - f_y(t, y)) ds dt. \end{aligned}$$

Wegen der Kompaktheit von Q ist f_y auf Q *gleichmäßig stetig* 7.32. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert also ein $\delta > 0$, so dass für *alle* $t \in [a, b]$ und *alle* $s \in [0, 1]$

$$|f_y(t, y + sh) - f_y(t, y)| < \varepsilon, \quad |h| < \delta.$$

Für diese h erhalten wir

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{h} (\phi(y + h) - \phi(y)) - \int_a^b f_y(t, y) dt \right| \\ & \leq \int_a^b \int_0^1 |f_y(t, y + sh) - f_y(t, y)| ds dt \\ & \leq \int_a^b \int_0^1 \varepsilon ds dt = \varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

Also gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(y + h) - \phi(y)}{h} = \int_a^b f_y(t, y) dt. \quad \gggg$$

Ein entsprechender Satz gilt für die Vertauschbarkeit höherer partieller Ableitungen, wenn die entsprechenden Stetigkeitsbedingungen erfüllt sind. Auch aus diesem Grund sind Funktionen mit *stetigen* Ableitungen so wichtig.

Definition Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $r \geq 1$. Dann bezeichnet $C^r(\Omega, \mathbb{R}^m)$ den Raum aller Abbildungen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$, die auf Ω sämtliche partiellen Ableitungen bis zur Ordnung r besitzen und diese dort auch stetig sind. Eine Abbildung $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^m)$ heißt *von der Klasse C^r oder C^r -Abbildung*. \times

Weiter setzt man

$$C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^m) := \bigcap_{r \geq 1} C^r(\Omega, \mathbb{R}^m),$$

den Raum der unendlich oft partiell differenzierbaren Abbildungen $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$. Diese werden auch *glatt*. Alle diese Räume sind *lineare Vektorräume*. Im Fall skalarer Funktionen schreibt man noch kürzer

$$C^r(\Omega) := C^r(\Omega, \mathbb{R}).$$

Satz Ist $f \in C^r(\Omega, \mathbb{R}^m)$, so ist jede partielle Ableitung von f der Ordnung r *unabhängig von der Reihenfolge der Differenziationen*. \times

■ Totale Ableitungen

Wir haben partielle Ableitungen höherer Ordnung im Standardfall definiert, jedoch nicht die entsprechenden totalen Ableitungen D^2f , D^3f , ... *Dies werden wir hier auch nicht tun* - weil wir es nicht unmittelbar benötigen, und weil dies auch konzeptionell komplizierter ist.

Im Prinzip geht es um Folgendes. Ist $f: V \rightarrow W$ total differenzierbar, so ist

$$Df: V \rightarrow L(V, W).$$

Nun ist der Zielraum wieder ein Banachraum. Also ist auch die zweite totale Ableitung aufgrund unserer allgemeinen Definition erklärt - wenn sie existiert -, und es ist

$$D^2f = D(Df): V \rightarrow L(V, L(V, W)) \cong L(V \times V, W).$$

Somit ist D^2f eine *bilineare Abbildung* von V nach W .

Und so weiter ... Die r -te totale Ableitung von f kann identifiziert werden mit einer Abbildung

$$D^r f: V \rightarrow L(V \times \cdots \times V, W),$$

die jedem Punkt im Definitionsbereich eine r -lineare Abbildung von V nach W zuordnet. Auf die Details verzichten wir hier.

Aufgaben

- 1 Für eine lineare Abbildung $A: V \rightarrow W$ zwischen normierten Räumen gilt

$$\sup_{\|x\|_V=1} \|Ax\|_W = \sup_{0 \neq x \in V} \frac{\|Ax\|_W}{\|x\|_V}.$$

- 2 Für ein beliebiges Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf dem \mathbb{R}^n gilt

$$\langle u, v \rangle = \langle Au, v \rangle_e$$

mit der symmetrischen Darstellungsmatrix $A = (\langle e_i, e_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$.

- 3 Es sei $f: V \rightarrow W$ in einer Umgebung des Nullpunkts definiert und stetig. Gilt $f(h) = o(h)$, so ist f im Nullpunkt auch differenzierbar, und es gilt $Df(0) = 0$.
- 4 Eine Abbildung $f: V \rightarrow W$ ist im Punkt a in Richtung $v \in V$ differenzierbar genau dann, wenn es eine stetige Kurve $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow W$ gibt, so dass

$$f(a + tv) = f(a) + \varphi(t)t.$$

In diesem Fall ist $\partial_v f(a) = \varphi(0)$.

- 5 Sei $f: V \rightarrow W$ im Punkt a differenzierbar. Dann ist f auch differenzierbar in a mit derselben Ableitung, wenn man die Normen auf V und W durch äquivalente Normen ersetzt.
- 6 Sei $A: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei normierten Vektorräumen. Dann gilt $Ah = o(h)$ genau dann, wenn $A = 0$.
- 7 Für $a > 0$ sei

$$\ell_\infty^a := \{x \in \ell^\infty : \|x\|_{a,\infty} := \sup_{n \geq 1} e^{an} |x_n| < \infty\}.$$

Dieser Raum ist mit $\|\cdot\|_{a,\infty}$ ein Banachraum. Der Operator

$$D: \ell_\infty^a \rightarrow \ell_\infty^a, \quad Dx = D(x_n)_{n \geq 1} = (nx_n)_{n \geq 1}$$

ist linear und bijektiv, aber nicht beschränkt.

- 8 Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine Skalarprodukt auf V . Dann gibt es zu jedem $A \in L(V, W)$ ein symmetrisches $Q \in L(V, W)$, so dass $\langle A \cdot, \cdot \rangle = \langle Q \cdot, \cdot \rangle$.
- 9 Gegeben seien Funktionen $\varphi, f, g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Dabei sei φ stetig und

$$f(h) = O(h), \quad g(h) = o(h).$$

Bestimmen sie (natürlich mit Beweis) die Ordnung von

$$a. f \circ g \quad b. g \circ f \quad c. fg \quad d. g^2 \quad e. \varphi f$$

- 10 Bestimmen sie die partiellen Ableitungen der folgenden Funktionen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

a. $ax^2 + 2bxy + cy^2$

b. $\exp(x^2 + y^2)$

c. $\sin(xy) + \cos(xy) + \exp(x^2 y^2)$.

- 11 Sei $f: V \rightarrow W$ differenzierbar. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $v, w \in V$ gilt dann

$$\partial_{\alpha v} f(a) = \alpha \partial_v f(a), \quad \partial_{v+w} f(a) = \partial_v f(a) + \partial_w f(a).$$

- 12 Die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) \doteq \frac{2xy^2}{x^2 + y^4}$$

besitzt im Nullpunkt sämtliche Richtungsableitungen, ist dort aber nicht stetig.

- 13 Die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) \doteq \frac{xy^3}{x^2 + y^4}$$

ist stetig und ist partiell differenzierbar, aber bei 0 nicht differenzierbar.

- 14 Gegeben ist die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) \doteq \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2}.$$

Zeigen sie, dass f alle partiellen Ableitungen *zweiter* Ordnung besitzt. Bestimmen sie diese Ableitungen, insbesondere im Nullpunkt.

- 15 Zeigen sie, dass $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) \doteq |x|_e^2 \sin |x|_e^{-1}$$

überall differenzierbar ist. Besitzt f überall stetige partielle Ableitungen?

- 16 Man beweise den Mittelwertsatz für skalare Funktion 14.

- 17 Für $r > 0$ ist

$$\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq r \\ \exp((|x|_e - r)^{-1}), & |x| > r \end{cases}$$

stetig differenzierbar.

- 18 Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und $\lambda \in \mathbb{R}$. Gilt $f(tx) = t^\lambda f(x)$ für alle x und $t > 0$, so folgt

$$Df(x)x = \lambda f(x).$$

Hiervon gilt auch die Umkehrung. *Hinweis:* Bestimmen sie eine DGL für

$$\varphi = t^\lambda f(x) - f(tx).$$

- 19 Gegeben sei

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) \doteq \frac{x^3}{x^2 + y^2}.$$

- Beide partielle Ableitungen von f existieren und sind auf \mathbb{R}^2 beschränkt.
- Jede Richtungsableitung $\partial_h f(0, 0)$ für $h \neq 0$ existiert.
- Die Funktion f ist im Punkt $(0, 0)$ *nicht* differenzierbar.
- Für jede reguläre Kurve $\gamma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist $g = f \circ \gamma$ differenzierbar.

- 20 Seien $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \rightarrow \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt und $A: V \rightarrow V$ linear, aber *nicht* notwendigerweise symmetrisch. Zeigen sie, dass

$$f: V \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \langle Ax, x \rangle$$

differenzierbar ist, und bestimmen sie die Ableitung.

- 21 **Produktregel** Seien $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \rightarrow \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt und $f, g : V \rightarrow V$ differenzierbare Abbildungen. Zeigen sie, dass

$$\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \langle f(x), g(x) \rangle$$

differenzierbar ist, und bestimmen sie die Ableitung.

- 22 Bestimmen sie die Jacobimatrizen der folgenden Abbildungen.

a. $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ mit $f(x) = |x|_e^2$

b. $f : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(t) = (t^2 \cos t, t^2 \sin t, \sinh t)^\top$

c. $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(a, b, c, d) = (ab + cd, a^2c^2 - b^2d^2)^\top$

d. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \sin y \sin z \\ x \sin y \cos z \\ x \cos y \end{pmatrix}$

- 23 Seien $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und $\varphi = fg$.

a. Bestimmen sie $D\varphi(x)h$ für $h \in \mathbb{R}^n$.

b. Bestimmen sie $\nabla\varphi(x)$ bezüglich des Standardskalarprodukts.

- 24 Sei I ein kompaktes Intervall und $C(I)$ mit der Supremumsnorm versehen. Dann ist

$$\Phi : C(I) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(f) = \frac{1}{2} \int_I f^2(t) dt$$

differenzierbar mit

$$D\Phi(f)\eta = \int_I f(t)\eta(t) dt.$$

- 25 **Variante des Lemmas von Hadamard** Sei $f \in C^2(\Omega)$ und $0 \in \Omega$. Dann gibt es Funktionen $g_1, \dots, g_n \in C^1(\Omega)$ so dass

$$f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^n x_i g_i(x).$$

- 26 Ist $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und L -lipschitz, so ist Df gleichmäßig beschränkt in dem Sinne, dass in jedem Punkt

$$\|Df(x)\| := \sup_{0 \neq h \in \mathbb{R}^n} \frac{|Df(x)h|}{|h|} \leq L.$$

- 27 Die Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ erfülle die Differenzialgleichung $\gamma u_x = x u_y$. Dann ist $Du(0, 0) = 0$, und es existiert ein $\varphi \in C^1([0, \infty))$ derart, dass $u(x, y) = \varphi(x^2 + y^2)$. Gilt dies auch, wenn nur $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$ vorausgesetzt wird?

- 28 Konstruieren sie eine Kurve $\varphi \in C^0([0, 1], \mathbb{R}^2)$ und eine Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ so, dass

$$Df(\varphi(t)) \equiv 0,$$

aber $f(\varphi(t))$ nicht konstant ist. (H. WHITNEY, *Duke Math. J.* 1 (1935) 514-517)

- 29 **Kettenregel** Sind $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ im Punkt a und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $\varphi(a)$ differenzierbar, so ist auch $f \circ \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt a differenzierbar, und es gilt

$$\nabla(f \circ \varphi)(a) = D\varphi^\top(a) \nabla f(\varphi(a)).$$

15

Funktionen mehrerer Variablen

Wir untersuchen nun *skalare* Funktionen auf das Vorliegen von Extremalstellen. Der Satz von Fermat gilt auch hier, und eine Betrachtung der zweiten Ableitung in Form der Hessematrix ergibt hinreichende Bedingungen für das Vorliegen von Maxima und Minima. Daran schließt eine kurze Diskussion konvexer Funktionen an.

Ausgangspunkt ist die Taylorsche Formel in höheren Dimensionen.

15.1

Die Taylorsche Formel

Die Formel von Taylor in höheren Dimensionen ist eine direkte Folge der klassischen Formel in einer Dimension. Ist die Strecke $[a, a + h]$ im Definitionsbereich von $f: V \rightarrow W$ enthalten, so können wir bei entsprechender Differenzierbarkeit von f die Funktion

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow W, \quad t \mapsto f(a + th)$$

um 0 entwickeln und bei $t = 1$ auswerten, um $f(a + h)$ darzustellen. Dabei treten die höheren Richtungsableitungen

$$\partial_h^k f(a) := \partial_t^k f(a + th) \Big|_{t=0}, \quad k \geq 1,$$

auf, die wir anschließend durch die partiellen Ableitungen von f der Ordnung k darstellen werden.

- 1 **Satz von Taylor in höheren Dimensionen** Sei $f: V \rightarrow W$ eine C^{r+1} -Abbildung. Gehört $[a, a+h]$ zum Definitionsbereich von f , so gilt

$$f(a+h) = T_a^r f(h) + R_a^r f(h)$$

mit dem r -ten Taylorpolynom an der Stelle a ,

$$T_a^r f(h) := \sum_{k=0}^r \frac{1}{k!} \partial_h^k f(a),$$

und dem Restglied

$$R_a^r f(h) = \frac{1}{r!} \int_0^1 (1-t)^r \partial_h^{r+1} f(a+th) dt. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Nach Voraussetzung ist $\varphi: t \mapsto f(a+th)$ in einer Umgebung von $[0,1]$ wohldefiniert. Aufgrund der Kettenregel _{14.12} ist

$$\varphi'(t) = \partial_h f(a+th) = Df(a+th)h.$$

Mit Induktion folgt, dass

$$\varphi^{(k)}(t) = \partial_h^k f(a+th)$$

durch die totale Ableitung von f der Ordnung k dargestellt wird. Somit ist φ auf $[0,1]$ von der Klasse C^{r+1} , und die klassische Taylorformel mit Integralrest _{8.22} ergibt

$$\varphi(1) = \sum_{k=0}^r \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{1}{r!} \int_0^1 (1-t)^r \varphi^{(r+1)}(t) dt.$$

Ersetzen wir φ durch die entsprechenden Ausdrücke in f , so erhalten wir die Behauptung. ⟩⟩⟩

Bemerkungen a. Diese Formulierung des Satzes von Taylor ist *koordinatenunabhängig*, denn sie benötigt nur die Richtungsableitung ∂_h .

b. Für $n=1$ ist

$$\partial_h^k f(a) = f^{(k)}(a)h^k,$$

und wir erhalten wieder die klassische Taylorformel _{8.22}. \rightarrow

■ Multiindex-Notation

Um die Richtungsableitungen $\partial_h^k f$ im Standardfall durch die partiellen Ableitungen von f bequem darzustellen, führen wir nun die *Multiindex-Notation* ein. Ein *Multiindex* ist ein Tupel mit ganzzahligen, nichtnegativen Komponenten,

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n.$$

Diese bezeichnen wir im Allgemeinen mit griechische Buchstaben. *Potenzen* von $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ sind definiert als

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i},$$

wobei vereinbarungsgemäß $x_i^0 = 1$.

Entsprechend erklärt man die Ableitungsoperatoren

$$\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} = \prod_{i=1}^n \partial_i^{\alpha_i},$$

wobei vereinbarungsgemäß $\partial_i^0 = I$, die Identität. Es ist also

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} f.$$

Es wird α_1 -mal nach x_1 , α_2 -mal nach x_2 , .., α_n -mal nach x_n differenziert. Ist $\alpha_i = 0$, so wird *nicht* nach x_i differenziert. Wegen des Lemmas von Schwarz 14.18 kommt es für hinreichend oft differenzierbares f auf die *Reihenfolge* der partiellen Ableitungen nicht an, nur auf die jeweilige *Anzahl*. Genau diese Informationen beinhaltet der Multiindex.

Schließlich setzt man noch

$$\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!, \quad |\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

und nennt $|\alpha|$ die *Länge* von α . Da alle Komponenten von α nichtnegativ sind, sind Beträge nicht nötig.

► Für $f \in C^4(\mathbb{R}^3)$ und $\alpha = (3, 1, 0)$ sowie $\beta = (1, 0, 2)$ ist

$$\frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f = \frac{1}{6} f_{xxxxy}, \quad \frac{1}{\beta!} \partial^\beta f = \frac{1}{2} f_{xzz}. \quad \blacktriangleleft$$

Wir benötigen noch folgende Verallgemeinerung der binomischen Formel.

2 **Lemma** *In einem kommutativen Ring gilt*

$$\begin{aligned} (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)^m &= \sum_{i_1, \dots, i_m=1}^n \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_m} \\ &= \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} \lambda_1^{\alpha_1} \cdots \lambda_n^{\alpha_n} = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \lambda^\alpha, \quad m \geq 1, \end{aligned}$$

wobei $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. \times

⟨⟨⟨ Die erste Identität drückt aus, dass wir $(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)^m$ erhalten, indem wir sämtliche Produkte aus m Faktoren aus den Elementen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ bilden und diese aufsummieren. Dies beweist man durch Induktion.

Die zweite Identität folgt hieraus durch kombinatorische Überlegungen. Die Anzahl aller im ersten Schritt gebildeten Produkte, die wegen der Kommutativität der Multiplikation gleich dem Produkt $\lambda_1^{\alpha_1} \cdots \lambda_n^{\alpha_n}$ sind, ist

$$\frac{m!}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}.$$

Denn einerseits müssen wir alle Permutation der m Faktoren zählen, und deren Anzahl ist $m!$. Andererseits dürfen wir nicht die Permutationen der *identischen* Faktoren untereinander zählen, und deren Anzahl ist $\alpha_1! \cdots \alpha_n!$. Dies ergibt die zweite Identität.

Die dritte Identität verwendet lediglich die Multiindex-Notation. $\rangle\rangle\rangle$

3 **Korollar** *Ist das Lemma von Schwarz anwendbar, so gilt*

$$\frac{1}{m!} \partial_h^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} h^\alpha \partial^\alpha, \quad m \geq 0.$$

Insbesondere ist

$$\partial_h = \sum_{k=1}^n h_k \partial_k, \quad \partial_h^2 = \sum_{k,l=1}^n h_k h_l \partial_k \partial_l. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Für $m = 0$ ergeben beide Seiten vereinbarungsgemäß die Identität, und es nichts zu zeigen. Für $m = 1$ und $h = (h_1, \dots, h_n)$ ist

$$\partial_h = h_1 \partial_1 + \dots + h_n \partial_n = \sum_{|\alpha|=1} h^\alpha \partial^\alpha,$$

den α läuft hier über alle $(0, \dots, 1, \dots, 0)$. Die Behauptung gilt hier also ebenfalls. Und können wir sämtliche partiellen Ableitungen vertauschen, so gilt aufgrund des letzten Lemmas für $m \geq 2$

$$\frac{1}{m!} \partial_h^m = \frac{1}{m!} (h_1 \partial_1 + \dots + h_n \partial_n)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} h^\alpha \partial^\alpha. \quad \rangle\rangle\rangle$$

Die Taylorsche Formel können wir nun wie folgt schreiben.

- 4 **Satz von Taylor in Multiindex-Notation** Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow W$ eine C^{r+1} -Abbildung. Gehört $[a, a+h]$ zum Definitionsbereich von f , so gilt

$$f(a+h) = \sum_{|\alpha| \leq r} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a) h^\alpha + R_a^r f(h)$$

mit

$$R_a^r f(h) = (r+1) \int_0^1 (1-t)^r \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(a+th) dt.$$

Im Fall einer skalaren Funktion gilt sogar

$$R_a^r f(h) = \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(x)$$

mit einem $x \in [a, a+h] \ni$

⟨⟨⟨⟨ Aufgrund des Korollars zur binomischen Formel $_2$ ist

$$\frac{1}{k!} \partial_h^k f(a+th) = \sum_{|\alpha|=k} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(a+th).$$

Mit dem allgemeinen Formel von Taylor $_1$ folgt daher

$$\begin{aligned} R_a^r f(h) &= \frac{1}{r!} \int_0^1 (1-t)^r (r+1)! \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(a+th) dt \\ &= (r+1) \int_0^1 (1-t)^r \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(a+th) dt. \end{aligned}$$

Dies ist die erste Restgliedformel. Für eine *skalare* Funktion besteht der letzte Integrand aus dem Produkt einer auf $[0, 1]$ *stetigen* Funktion mit der auf $[0, 1]$ *nichtnegativen* Funktion $(1-t)^r$. Hierauf können wir den Mittelwertsatz der Integralrechnung $_{10.6}$ anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} R_a^r f(h) &= \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} \partial^\alpha f(a+\theta h) \cdot (r+1) \int_0^1 (1-t)^r dt \\ &= \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) h^\alpha \end{aligned}$$

mit einem $\theta \in [0, 1]$ und $x = a + \theta h \in [a, a+h]$, denn

$$\int_0^1 (1-t)^r dt = \frac{1}{r+1}$$

Dies ist die zweite Restgliedformel. ⟩⟩⟩⟩

Wir benötigen die Taylorformel vor allem bis zum quadratischen Restglied. Hierbei spielt die *Hessematrix* eine zentrale Rolle.

Definition Für eine C^2 -Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

$$Hf(a) := (f_{x_k x_l}(a))_{1 \leq k, l \leq n}$$

die **Hessematrix** oder **Hessische** von f an der Stelle a . \times

Wegen des Satzes von Schwarz ist die Hessische einer C^2 -Funktion immer eine **symmetrische** Matrix.

► A. Für $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = xy^2 \sin z$ ist

$$Hf = \begin{pmatrix} 0 & 2y \sin z & y^2 \cos z \\ 2y \sin z & 2x \sin z & 2xy \cos z \\ y^2 \cos z & 2xy \cos z & -xy \sin z \end{pmatrix}.$$

B. Für ein lineares Funktional $L: x \mapsto \langle v, x \rangle$ ist $HL \equiv 0$.

C. Für eine quadratische Form

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k, l=1}^n a_{kl} x_k x_l$$

mit einer symmetrischen Matrix $A = (a_{kl})$ und dem Standardskalarprodukt ist

$$f_{x_k x_l} = a_{kl}, \quad 1 \leq k, l \leq n.$$

Also ist

$$Hf = A. \quad \blacktriangleleft$$

5 **Quadratische Taylorformel** Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Gehört $[a, a+h]$ zum Definitionsbereich von f , so gilt

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(x)h, h \rangle \quad (1)$$

mit einem $x \in [a, a+h]$. \times

««« Dies folgt aus der Taylorformel in Multiindex-Notation $_4$ mit $r = 1$. Der Multiindex der Länge 0 ergibt den Term $f(a)$, die Multiindizes der Länge 1 den linearen Term

$$\sum_{k=1}^n f_{x_k}(a) h_k = \langle \nabla f(a), h \rangle.$$

Das Restglied für skalare Funktionen ergibt den Term

$$\sum_{|\alpha| \geq 2} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(\xi) h^\alpha = \frac{1}{2} \sum_{k, l=1}^n f_{x_k x_l}(x) h_k h_l = \frac{1}{2} \langle Hf(x)h, h \rangle$$

wobei die erste Identität auf dem Korollar zur binomischen Formel $_2$ beruht. »»»

Bemerkung Dieses Ergebnis ergibt sich auch direkt aus dem entsprechenden eindimensionalen Satz. Für $\varphi(t) = f(a + th)$ gilt

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t) dt.$$

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung 10.6 und

$$\varphi''(\theta) = \langle Hf(x)h, h \rangle$$

ergibt dies (1). Aber hier ging es ja auch in allgemeineren Betrachtungen. \rightarrow

■ Polynome und Taylorreihen

Definition Ist α ein Multiindex, so heißt die Funktion

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

ein *Monom in n Variablen vom Grad $|\alpha|$* . Eine Linearkombination

$$\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{|\alpha| \leq N} a_\alpha x^\alpha$$

mit reellen Koeffizienten a_α heißt *reelles Polynom in n Variablen*. Sein Grad ist $\max\{|\alpha| : a_\alpha \neq 0\}$. \times

► A. Es ist xy^2z^3 ein Monom vom Grad 6, und $1+x+xy^2+xy^2z^3$ ein Polynom vom Grad 6.

B. Das Nullpolynom hat Grad $-\infty$, da $\max \emptyset = -\infty$. \blacktriangleleft

Jede partielle Ableitung verringert den Grad eines Polynoms um 1, wenn es nicht das Nullpolynom ist. Nach endlich vielen Ableitungen erhält man somit das Nullpolynom. Hiervon gilt auch die Umkehrung.

Satz Ist $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ von der Klasse C^{r+1} und

$$\partial^\alpha f \equiv 0, \quad |\alpha| = r+1,$$

so ist f lokal ein Polynom vom Grad $\leq r$. \times

⟨⟨⟨ In einer Umgebung eines beliebigen Punktes a im Definitionsbereich von f gilt aufgrund des Satzes von Taylor 4

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \leq r} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a)(x-a)^\alpha + R_a^{r+1} f(x).$$

Nach Voraussetzung verschwindet das Restglied, und es bleibt ein Polynom vom Grad $\leq r$. $\rangle\rangle\rangle$

Der Satz macht nur eine *lokale* Aussage, da eine solche Funktion auf nicht zusammenhängenden Komponenten seines Definitionsbereichs durch verschiedene Polynome definiert sein kann.

Eine C^∞ -Funktion $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ können wir um einen Punkt a seines Definitionsbereiches *formal* in seine *Taylorreihe*

$$T_a f(x) := \sum_{\alpha} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(a) (x - a)^\alpha$$

entwickeln. Bereits im eindimensionalen Fall braucht diese jedoch in keinem Punkt $x \neq a$ zu konvergieren. Und selbst wenn sie konvergiert, muss sie nicht die Funktion f darstellen – siehe das Gegenbeispiel von Cauchy 12.3. Ist dies aber der Fall, so nennt man die Funktion f *reell analytisch* in n Variablen.

Es gilt zum Beispiel folgender Satz in einer wie in mehreren Dimensionen.

- 6 **Satz** Sei $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ von der Klasse C^∞ . Existiert zu einer Kugel $B_r(a)$ im Definitionsbereich von f ein $M > 0$, so dass

$$\frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in B_r(a)} |\partial^\alpha f(x)| \leq \frac{M}{r^{|\alpha|}}, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n,$$

so konvergiert die Taylorreihe $T_a f$ auf jeder abgeschlossenen Kugel in $B_r(a)$ absolut und gleichmäßig gegen f . \times

Da wir den Satz nicht benötigen, ist der Beweis als Übung überlassen A-18. Seine Voraussetzung ist zum Beispiel erfüllt für die in Kapitel 9 betrachteten elementaren Funktionen.

15.2

Kritische Punkte

Wir betrachten nun skalare Funktionen $f: V \rightarrow \mathbb{R}$. Den Graphen einer solchen Funktion kann man sich als Höhenprofil über ihrem Definitionsbereich vorstellen – zumindest wenn V zweidimensional ist. Ist f differenzierbar, so besitzt dieses Profil in jedem Punkt eine *Tangentialebene*. Diese ist eine direkte Verallgemeinerung des Begriffs der Tangente.

Definition Ist $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt a differenzierbar, so heißt der Graph der affinen Funktion

$$T: V \rightarrow \mathbb{R}, \quad z = f(a) + Df(a)(x - a)$$

die *Tangentialebene* an den Graphen von f im Punkt $(a, f(a))$. \times

► A. Sei V ein Hilbertraum und $v \in V$. Die Tangentialebene des linearen Funktionals $L_v: x \mapsto \langle v, x \rangle$ im Punkt a ist gegeben durch

$$z = \langle v, a \rangle + \langle v, x - a \rangle = \langle v, x \rangle,$$

ist also identisch mit dem Graphen der Funktion.

B. Die quadratische Form $x \mapsto \langle Ax, x \rangle$ hat in x_0 die Ableitung $\langle 2Ax_0, \cdot \rangle$ und damit die Tangentialebene

$$z = \langle Ax_0, x_0 \rangle + \langle 2Ax_0, x - x_0 \rangle = \langle 2Ax_0, x - x_0/2 \rangle. \quad \blacktriangleleft$$

Im Standardfall ist die Tangentialebene eine Hyperebene im Raum $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, die sich durch den Gradienten wie folgt beschreiben lässt.

Satz Ist $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt a differenzierbar, so ist

$$N(a) := (-\nabla f(a), 1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

der Normalenvektor der Tangentialebene an den Graphen von f über a . \times

⟨⟨⟨ Ausgedrückt mithilfe des Gradienten lautet die Gleichung der Tangentialebene $z = f(a) + \langle \nabla f(a), x - a \rangle$, was äquivalent ist zu

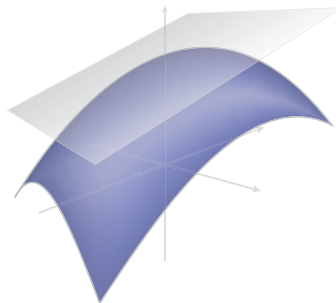
$$\begin{aligned} 0 &= \langle -\nabla f(a), x - a \rangle_n + \langle 1, z - f(a) \rangle_1 \\ &= \langle (-\nabla f(a), 1), (x - a, z - f(a)) \rangle_{n+1}. \end{aligned}$$

Dies ist genau die *Normalengleichung* dieser Ebene im Raum $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mit Koordinaten (x, z) und Standardskalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_{n+1}$, der Normalenvektor ist

$$N(a) = (-\nabla f(a), 1). \quad \gggg$$

Abb 1

Eine Tangentialebene



■ Extremalstellen

Für skalare Funktionen ist es sinnvoll, nach der Existenz lokaler Extrema zu fragen. Diese sind genau wie für Funktionen einer Variablen erklärt.

Definition Eine Funktion $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt im Punkt a ein *lokales Minimum*, wenn es eine Umgebung U von a gibt, so dass

$$f(a) \leq f(x), \quad x \in U.$$

Das lokale Minimum heißt *strikt*, wenn sogar

$$f(a) < f(x), \quad x \in U \setminus \{a\}.$$

Der Punkt a selbst heißt eine *Minimalstelle* von f . Entsprechend sind *lokales Maximum* und *Maximalstelle* erklärt. ✕

Minima und Maxima werden gemeinsam als *Extrema* bezeichnet, und Minimal- und Maximalstellen gemeinsam als *Extremalstellen*. Für diese gilt der Satz von Fermat 8.8 entsprechend auch hier.

7 **Satz von Fermat** Besitzt die Funktion $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt a eine Extremalstelle und ist sie dort total differenzierbar, so ist $Df(a) = 0$. ✕

⟨⟨⟨ Der Definitionsbereich von $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ ist vereinbarungsgemäß offen. Somit ist f auf einer offenen Umgebung von a erklärt. Für jeden Vektor $v \neq 0$ ist dann $\varphi: t \mapsto f(a + tv)$ auf einem offenen Intervall um 0 erklärt und besitzt in $t = 0$ ein lokales Extremum. Da aufgrund der Kettenregel φ dort auch differenzierbar ist, gilt nach dem klassischen Satz von Fermat 8.8 $\dot{\varphi}(0) = 0$, also

$$0 = f(a + tv) \Big|_{t=0} = Df(a)v.$$

Da dies für jeden Vektor v gilt, ist $Df(a) = 0$. ⟩⟩⟩

► In einem Hilbertraum V besitzt die Funktion

$$f: V \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2} \langle x, x \rangle$$

aufgrund der Definitheit des Skalarprodukts bei $x = 0$ ein striktes Minimum. Und in der Tat verschwindet genau dort auch $Df(x) = \langle x, \cdot \rangle$. ◀

Definition Ist $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt c total differenzierbar und $Df(c) = 0$, so heißt c ein *kritischer* oder *stationärer Punkt* von f . ✕

Der Satz von Fermat besagt also auch für differenzierbare skalare Funktionen in höheren Dimensionen, dass eine Extremalstelle im Innern *notwendig* ein kritischer Punkt ist. Die Tangentialebene an dieser Stelle ist dann horizontal, das heißt, von der Form $V \times \{w\}$.

■ Definite Matrizen

In der eindimensionalen Theorie haben wir *hinreichende* Bedingungen für die Existenz eines lokalen Extremums mithilfe der zweiten Ableitung formuliert 8.14. In höheren Dimensionen wird die zweite Ableitung aber nicht mehr durch eine reelle Zahl, sondern im Standardfall – den wir von nun an betrachten – durch die Hessematrix dargestellt. Es geht also darum, geeignete hinreichende Bedingungen bezüglich solcher Operatoren zu formulieren.

Sei $S(n)$ der Raum aller reellen symmetrischen $n \times n$ -Matrizen

$$A = (A_{kl})_{1 \leq k, l \leq n}, \quad A^\top = A.$$

Dies ist ein reeller Vektorraum der Dimension $n(n+1)/2$.

Definition Eine Matrix $A \in S(n)$ heißt

(i) *positiv definit*, geschrieben $A > 0$, falls

$$\langle Av, v \rangle > 0, \quad 0 \neq v \in \mathbb{R}^n,$$

(ii) *positiv semidefinit*, geschrieben $A \geq 0$, falls

$$\langle Av, v \rangle \geq 0, \quad v \in \mathbb{R}^n,$$

(iii) *negativ definit*, geschrieben $A < 0$, falls $-A > 0$,

(iv) *negativ semidefinit*, geschrieben $A \leq 0$, falls $-A \geq 0$,

(v) *indefinit*, geschrieben $A \not\geq 0$, im verbleibenden Fall. ✕

Eine Matrix $A \in S(n)$ ist also indefinit, wenn $\langle Av, v \rangle$ das Vorzeichen wechselt. Alle diese Fälle treten bereits bei Diagonalmatrizen auf.

► Im \mathbb{R}^2 gilt $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} > 0$, $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix} \geq 0$, $\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \not\geq 0$. ◀

Lemma Für eine Matrix $A \in S(n)$ sind äquivalent:

(i) Es ist $A > 0$.

(ii) Es gibt ein $\mu > 0$, so dass $\langle Av, v \rangle \geq \mu |v|^2$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$.

(iii) Es gibt ein $\mu > 0$, so dass $A - \mu E_n \geq 0$. ✕

⟨⟨⟨ (i) ⇒ (ii) Die quadratische Form

$$Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad Q(v) = \langle Av, v \rangle$$

ist stetig und nach Voraussetzung auf der Einheitskugel \mathbb{S}^{n-1} positiv. Wegen der Kompaktheit von \mathbb{S}^{n-1} nimmt sie ihr Minimum an, so dass

$$\mu := \inf_{|u|=1} Q(u) > 0.$$

Für ein beliebiges $0 \neq v \in \mathbb{R}^n$ gilt dann mit $u = v/|v|$ die Abschätzung

$$\langle Av, v \rangle = |v|^2 Q(u) \geq \mu |v|^2.$$

Dies bleibt auch für $v = 0$ gültig, womit (ii) gezeigt ist.

(ii) \Rightarrow (iii) Aus der Voraussetzung folgt

$$\langle (A - \mu E_n)v, v \rangle = \langle Av, v \rangle - \mu |v|^2 \geq 0, \quad v \in \mathbb{R}^n.$$

Somit ist $A - \mu E_n \geq 0$.

(iii) \Rightarrow (i) Mit der letzten Ungleichung gilt

$$\langle Av, v \rangle \geq \mu |v|^2 > 0, \quad v \neq 0,$$

also $A > 0$. \gggg

Die Definitheitseigenschaften einer symmetrischen Matrix lassen sich direkt aus ihrem Spektrum ablesen, das ja reell ist.

8 Lemma Sei $A \in S(n)$. Dann ist $A \begin{cases} > \\ \geq \\ < \\ \leq \end{cases} 0$ genau dann, wenn alle Eigenwerte von $A \begin{cases} \text{positiv} \\ \text{nicht negativ} \\ \text{negativ} \\ \text{nicht-positiv} \end{cases}$ sind. Und es ist $A \geq 0$, wenn wenigstens zwei

nichtverschwindende Eigenwerte entgegengesetztes Vorzeichen haben. \times

\llll Eine symmetrische Matrix A besitzt ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren w_1, \dots, w_n zu den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Es ist also

$$Aw_k = \lambda_k w_k, \quad \langle w_k, w_l \rangle = \delta_{kl}.$$

Für $v = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n$ ist dann $Av = \lambda_1 v_1 w_1 + \dots + \lambda_n v_n w_n$ und

$$\langle Av, v \rangle = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i v_i v_j \langle w_i, w_j \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^2.$$

Also ist

$$\min \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} |v|^2 \leq \langle Av, v \rangle \leq \max \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} |v|^2,$$

woraus sich alle Behauptungen ergeben. \gggg

Speziell für symmetrische 2×2 -Matrizen ergibt sich hieraus folgendes

- 9 **Korollar** Für eine reelle symmetrische Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ gilt:
- (i) $A > 0 \Leftrightarrow \det A > 0 \wedge a > 0$,
 - (ii) $A < 0 \Leftrightarrow \det A > 0 \wedge a < 0$,
 - (iii) $A \geq 0 \Leftrightarrow \det A < 0$. \times

⟨⟨⟨ Bezeichnen λ_1 und λ_2 die beiden Eigenwerte von A , so gilt bekanntlich $\det A = \lambda_1 \lambda_2$. Ist $\det A < 0$, so haben beide Eigenwerte entgegengesetztes Vorzeichen, und A ist indefinit $_8$. Ist $\det A > 0$, so ist A definit, und $a = \langle A e_1, e_1 \rangle$ entscheidet über das Vorzeichen. ⟩⟩⟩

Nun benötigen wir noch eine Stetigkeitsaussage für Matrizenfunktionen.

- 10 **Lemma** Die Matrixfunktion $A: V \rightarrow S(n)$ sei stetig und $A(c) > 0$. Dann existiert eine Umgebung U von c , so dass $A(x) > 0$ für alle $x \in U$. \times

⟨⟨⟨ Es existiert ein $\mu > 0$ $_8$, so dass

$$\langle A(c)v, v \rangle \geq 2\mu |v|^2, \quad v \in V.$$

Aufgrund der Stetigkeit von A existiert dazu eine Umgebung U von c , so dass

$$\|A(x) - A(c)\| \leq \mu, \quad x \in U.$$

bezüglich der induzierten Operatornorm $\|\cdot\|$. Mit der Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} & |\langle A(x)v, v \rangle - \langle A(c)v, v \rangle| \\ &= |\langle (A(x) - A(c))v, v \rangle| \\ &\leq |\langle A(x) - A(c)v, v \rangle| \leq \|A(x) - A(c)\| |v|^2 \leq \mu |v|^2. \end{aligned}$$

Also ist

$$|\langle A(x)v, v \rangle| \geq |\langle A(c)v, v \rangle| - \mu |v|^2 \geq 2\mu |v|^2 - \mu |v|^2 = \mu |v|^2.$$

Somit gilt $_8$ $A(x) > 0$ für $x \in U$. ⟩⟩⟩

Hinweis Das Lemma wird *falsch* mit \geq anstelle von $>$. \rightarrow

15.3 Lokale Extrema

Nun zurück zum eigentlichen Problem, der Charakterisierung von Extremalstellen. Wir formulieren die Ergebnisse für *Minimalstellen*, für Maximalstellen sind die Aussagen entsprechend abzuwandeln.

- 11 **Satz** Ist c eine lokale Minimalstelle einer C^2 -Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, so ist

$$Hf(c) \geq 0. \quad \times$$

«»» Für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ besitzt die Hilfsfunktion $\varphi: t \mapsto f(c + tv)$ in $t = 0$ ein lokales Minimum. Also gilt

$$\varphi''(0) = \partial_v^2 f(c) = \langle Hf(c)v, v \rangle \geq 0.$$

Da dies für alle $v \in \mathbb{R}^n$ gilt, folgt die Behauptung. »»»

Dieser Satz formuliert eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung, wie bereits die kubische Parabel $t \mapsto t^3$ zeigt. Um die Existenz einer Minimalstelle zu *garantieren*, braucht es etwas mehr.

- 12 **Satz** Sei c ein kritischer Punkt einer C^2 -Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Gilt

$$Hf(x) \geq 0$$

in einer Umgebung U von c , so ist c eine lokale Minimalstelle. Gilt sogar

$$Hf(c) > 0,$$

so ist c eine strikte lokale Minimalstelle. \times

«»» Da c ein kritischer Punkt ist, gilt $\nabla f(c) = 0$. Auf einer kleinen kugelförmigen Umgebung U von c gilt aufgrund der quadratischen Taylorformel ₅

$$f(c + h) = f(c) + \frac{1}{2} \langle Hf(x)h, h \rangle$$

mit einem $x \in [c, c + h]$. Ist U hinreichend klein, so ist nach Voraussetzung auch $\langle Hf(x)h, h \rangle \geq 0$ und somit

$$f(x) \geq f(c), \quad x \in U.$$

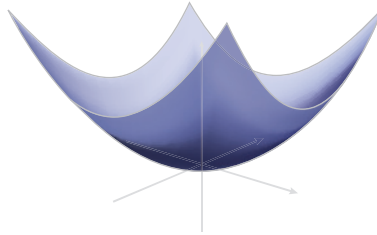
Also ist c eine Minimalstelle.

Gilt $Hf(c) > 0$, so ist auch $\langle Hf(x)h, h \rangle > 0$ für alle $x \in U$ und $h \neq 0$, wenn U hinreichend klein ist ₁₀. Also folgt mit demselben Argument

$$f(x) > f(c), \quad x \in U \setminus \{c\},$$

und c ist eine strikte Minimalstelle. »»»

Abb 2

Das Paraboloid $x^2 + y^2$ 

■ Typische Fälle

Wir beschreiben nun einige typische Fälle von Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit einem kritischen Punkt im Nullpunkt.

► *Der definite Fall* Betrachte

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

Es ist

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}, \quad Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Also ist 0 der einzige kritische Punkt von f . Da außerdem $Hf > 0$ auf ganz \mathbb{R}^2 , ist 0 eine strikte lokale Minimalstelle. Der Graph von f ist ein nach oben geöffnetes *Paraboloid* wie in Abbildung 2.

Für die Funktion $-f$ ist 0 entsprechend eine lokale strikte Maximalstelle, und ihr Graph ein nach unten geöffnetes Paraboloid. ◀

Ist die Hessische in einem kritischen Punkt semidefinit, aber nicht definit, so ist mindestens einer ihrer Eigenwerte Null. In diesem Fall kann der Graph von f sehr unterschiedliche Gestalt annehmen.

► *Der semidefinite Fall* Betrachte

$$f(x, y) = x^2 + y^4, \quad g(x, y) = x^2, \quad h(x, y) = x^2 + y^3.$$

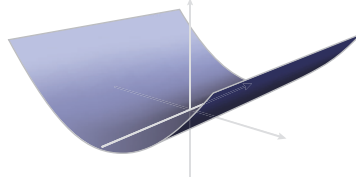
In allen Fällen ist 0 der einzige kritische Punkt mit Hessematrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \geq 0.$$

Die Funktionen verhalten sich um 0 jedoch sehr unterschiedlich:

- (i) f hat ein striktes Minimum, ähnlich zu Abbildung 2,
- (ii) g hat ein nichtisoliertes Minimum wie in Abbildung 3,
- (iii) h hat kein Minimum, sondern bildet einen *Affensattel* wie in Abbildung 4. ◀

Abb 3

Die Rinne x^2 

Der semidefinite Fall ist in vielen Fällen schwierig zu behandeln. Oft kann man ihn aber als eine ›nicht typische‹ oder ›entartete‹ Situation betrachten, die ›normalerweise‹ nicht auftritt. Betrachtet man nur die ›nichtentarteten‹ Fälle, so wird die Situation meist sehr viel übersichtlicher.

Definition Ein kritischer Punkt c einer C^2 -Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *nichtdegeneriert* oder *nichtentartet*, falls

$$\det Hf(c) \neq 0.$$

Andernfalls heißt er *entartet* oder *degeneriert*. ✕

In einem nichtentarteten kritischen Punkt hat die Hessische somit keine verschwindenden Eigenwerte und kann nicht semidefinit sein. Sie ist entweder definit oder *indefinit*. Dieser Fall hat ebenfalls einen eigenen Namen.

Definition Ein nichtentarteter kritischer Punkt c einer C^2 -Funktion f heißt *Sattelpunkt*, falls die Hessische $Hf(c)$ *indefinit* ist. ✕

Im Falle einer Funktion zweier Variablen ist dies äquivalent mit der Bedingung $\det Hf(c) < 0$. In höheren Dimensionen ist diese Bedingung jedoch nur hinreichend, aber nicht notwendig, denn die Anzahl positiver wie negativer Eigenwerte kann positiv und gerade und die Determinante damit positiv sein.

Abb 4

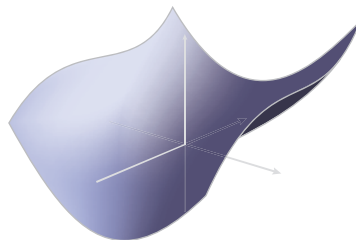
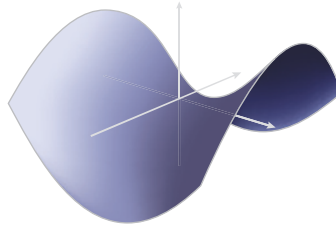
Der Affensattel $x^2 + y^3$ 

Abb 5

Der Sattel $x^2 - y^2$ 

► **Sattelpunkt** Betrachte

$$f(x, y) = x^2 - y^2.$$

Es ist

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}, \quad Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Hier ist 0 wieder der einzige kritische Punkt von f , und es ist $Hf \not\geq 0$. Es liegt ein Sattelpunkt wie in Abbildung 5 vor. ◀

■ Das Lemma von Morse

Die Bedeutung nichtentarteter kritischer Punkte besteht darin, dass dort Funktionen lokal bereits durch die *Anzahl* der negativen Eigenwerte der Hessischen vollständig charakterisiert sind.

- 13 **Lemma von Morse** Die C^3 -Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ besitze einen nichtentarteten kritischen Punkt c . Dann existieren Koordinaten $u = (u_1, \dots, u_n)$ um c so, dass

$$f(u) = f(c) - u_1^2 - \dots - u_k^2 + u_{k+1}^2 + \dots + u_n^2,$$

wobei

$$k = \text{ind}(c) := \text{card} \{ \lambda \in \sigma(Hf(c)) : \lambda < 0 \}$$

der *Index* des kritischen Punktes c genannt wird. ✕

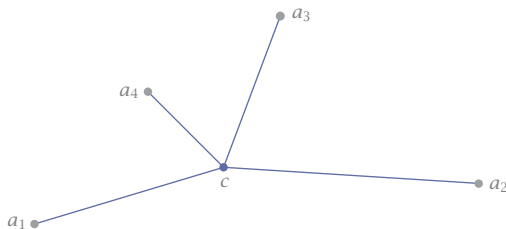
Das heißt, es gibt eine Koordinatentransformation $\varphi: U_0 \rightarrow U_c$ von einer offenen Umgebung U_0 von 0 auf eine offene Umgebung U_c von c , so dass

$$(f \circ \varphi)(u) = f(c) - u_1^2 - \dots - u_k^2 + u_{k+1}^2 + \dots + u_n^2.$$

in den neuen Koordinaten $u = (u_1, \dots, u_n)$. Somit kommt es nur auf die Vorzeichen der Eigenwerte an. Alles andere spielt *lokal* keine Rolle. Einen Beweis des Lemmas findet man zum Beispiel in LANG, *Real Analysis*, Kapitel VII.

Abb 6

Punkt mit minimaler
Quadratabstandssumme



In den passenden Koordinaten wird damit f bis auf eine unwichtige additive Konstante zu einer einfachen diagonalen quadratischen Form, die vollständig durch den Index k des kritischen Punktes c bestimmt ist. Da dieser Index nur $n + 1$ verschiedene Werte annehmen kann, erhalten wir folgendes

Korollar *Im \mathbb{R}^n gibt es genau $n+1$ verschiedene nichtentartete kritische Punkte, und zwar strikte Minimalstellen, strikte Maximalstellen, und Sattelpunkte mit Index $k = 1, \dots, n - 1$. \times*

■ Zwei Extremwertaufgaben

Als Anwendungsbeispiele betrachten wir zwei typische Extremwertaufgaben sowie das Maximumprinzip für harmonische Funktionen.

► **Extremwertaufgabe** Gegeben sind m Punkte a_1, \dots, a_m im \mathbb{R}^n . Gesucht ist ein Punkt c im \mathbb{R}^n , so dass die Summe aller ihrer quadrierten Abstände zum Punkt c minimal wird.

Gesucht ist demnach das Minimum der Funktion

$$d: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x) = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^m \|x - a_i\|^2,$$

wobei die Division durch $2m$ nur die folgenden Formeln vereinfacht und sonst keine Bedeutung hat. Das Quadrat der euklidischen Norm ist differenzierbar, mit

$$\nabla(\|x - a\|^2) = 2(x - a).$$

Also ist

$$\nabla d(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (x - a_i) = x - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_i.$$

Dieser Gradient besitzt einen einzigen kritischen Punkt in

$$c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m a_i,$$

dem arithmetischen Mittel der Punkte a_1, \dots, a_m , beziehungsweise dem Schwerpunkt des Körpers mit gleichen Massen in den Punkten a_1, \dots, a_m . Aus der Geometrie des Problems ist klar, dass dies ein lokales und sogar globales *Minimum* ist. Die Hessische von d ist übrigens $Hd = E > 0$. ◀

- 14 ▶ *Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung* Zu bestimmen ist derjenige Quader, der bei vorgegebener Kantenlänge das größte Volumen einschließt. Sind x, y, z die Kantenlängen des Quaders, so ist also die Funktion

$$V = xyz$$

zu maximieren unter der Vorgabe, dass $x + y + z = K$ konstant ist. Aufgrund der Homogenität des Problems in allen drei Koordinaten können wir K auf einen beliebigen positiven Wert fixieren, zum Beispiel auf $K = 3$. Dann ist $z = 3 - x - y$ und

$$V = V(x, y) = xy(3 - x - y) = 3xy - x^2y - xy^2.$$

Für den Gradienten erhalten wir damit

$$\nabla V(x, y) = \begin{pmatrix} 3y - 2xy - y^2 \\ 3x - 2xy - x^2 \end{pmatrix}.$$

Dieser Gradient besitzt die vier verschiedene Nullstellen

$$(0, 0), \quad (3, 0), \quad (0, 3), \quad (1, 1),$$

aber nur der letzte hat positive, physikalische sinnvolle Koordinaten. Auch hier ist aufgrund geometrischer Überlegungen klar, dass es sich um das globale Maximum der Volumenfunktion auf dem ersten Quadranten in \mathbb{R}^3 handeln muss. Das Maximum wird also von einem Quader mit drei gleichen Seiten erreicht, was auch nicht weiter überrascht.

Die Hessische ist übrigens

$$HV(x, y) = \begin{pmatrix} -2y & 3 - 2x - 2y \\ 3 - 2x - 2y & -2x \end{pmatrix},$$

und es gilt

$$HV(x, y) \Big|_{x=y=1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} < 0.$$

Ein allgemeines Verfahren für solche Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen werden wir übrigens später kennenlernen. ◀

■ Das Maximumprinzip für harmonische Funktionen

Definition Eine C^2 -Funktion $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *harmonisch*, falls

$$\Delta u := \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = 0$$

in jedem Punkt ihres Definitionsbereiches. ✕

Der Differenzialoperator

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_i^2 = \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$$

heißt *Laplaceoperator* und spielt in der Physik und vielen Anwendungen eine fundamentale Rolle. Salopp gesagt beschreibt er die Beschleunigung in Newtons Gesetz *Kraft = Masse \times Beschleunigung*. Zum Beispiel beschreiben harmonische Funktionen Gleichgewichtslösungen für viele wichtige partielle Differenzialgleichungen.

► A. Auf einem Intervall ist eine Funktion u harmonisch genau dann, wenn

$$u'' = 0,$$

also wenn sie linear ist.

B. Ist p ein beliebiges Polynom mit komplexen Koeffizienten, so ist

$$u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(x, y) = \Re p(x + iy)$$

harmonisch. Dasselbe gilt für den Imaginärteil A-6.

C. Für $n \geq 2$ ist

$$u: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad u(x) = \begin{cases} \log |x|, & n = 2 \\ |x|^{2-n}, & n \geq 3 \end{cases}$$

harmonisch. ◀

Wir betrachten Funktionen in $C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, mit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Diese sind also C^2 in Ω und noch stetig auf dem Abschluss von Ω . Dies schließt aus, dass die Funktionen am Rand von Ω unbeschränkt werden.

15 **Maximumprinzip** Sei Ω beschränkt und offen und $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ in Ω harmonisch. Dann gilt:

(i) Die Funktion u nimmt ihr Maximum auf dem Rand an:

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

(ii) Ebenso nimmt $|u|$ sein Maximum auf dem Rand an.

(iii) Ist u auf dem Rand von Ω konstant, so ist u überall konstant. ✕

««« (i) Wegen $\partial\Omega \subset \bar{\Omega}$ ist natürlich $\max_{\partial\Omega} u \leq \max_{\bar{\Omega}} u$. Um auch die umgekehrte Ungleichung zu erhalten, betrachten wir die modifizierte Funktion

$$w = u + \varepsilon v, \quad \varepsilon > 0,$$

mit $v(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq 0$. Es ist $\Delta v = 2n > 0$ und damit

$$\Delta w = \Delta u + \varepsilon \Delta v = 2n\varepsilon > 0.$$

Diese Funktion besitzt in Ω keine Maximalstelle. Denn wäre c eine solche Maximalstelle, so wäre $Hw(c) \leq 0$ und damit kein Eigenwert von $Hw(c)$ positiv. Dann wäre aber auch

$$\Delta w(a) = \text{spur } Hw(c) \leq 0,$$

im Widerspruch zu $\Delta w > 0$. Somit besitzt w in Ω keine Maximalstelle.

Andererseits ist w nach Voraussetzung auf $\bar{\Omega}$ stetig. Diese Menge ist abgeschlossen und beschränkt, und damit kompakt. Also nimmt w auf $\bar{\Omega}$ sein Maximum an, und es gilt folglich

$$\max_{\bar{\Omega}} w = \max_{\partial\Omega} w = \max_{\partial\Omega} (u + \varepsilon v).$$

Nun ist auf $\bar{\Omega}$ einerseits $u \leq w$ und andererseits $v \leq r^2$ mit einem hinreichend großen r , denn $\bar{\Omega}$ ist beschränkt. Also gilt auch

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} (u + \varepsilon v) \leq \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon r^2.$$

Da dies für jedes $\varepsilon > 0$ gilt, gilt also auch $\max_{\bar{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u$.

(ii) Mit u ist auch $-u$ harmonisch. Mit dem gerade Bewiesenen gilt also

$$\max_{\bar{\Omega}} (-u) = \max_{\partial\Omega} (-u),$$

was äquivalent ist zu

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Zusammen mit (i) ergibt dies die zweite Behauptung.

(iii) Nach Voraussetzung ist $u|_{\partial\Omega} = m$ mit einer reellen Konstanten m . Dann ist aber auch $u - m$ harmonisch, und mit (ii)

$$\max_{\bar{\Omega}} |u - m| = \max_{\partial\Omega} |u - m| = 0.$$

Also gilt $u \equiv m$ auf $\bar{\Omega}$. »»»

Bemerkung Man kann auch noch zeigen, dass eine nicht konstante harmonische Funktion $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ nur auf dem Rand von Ω ihr Maximum und Minimum annimmt – siehe HILDEBRANDT 2, Seite 63. ~

15.4 Konvexe Mengen und Funktionen

Im Folgenden sei V ein beliebiger normierter Raum. Die Vollständigkeit eines Banachraums benötigen wir nicht. Wie zuvor schon bezeichnen wir mit

$$[u, v] := \{(1-t)u + tv : 0 \leq t \leq 1\}$$

die *Verbindungsstrecke* zwischen zwei Punkten u und v in V .

Definition Eine Menge $M \subset V$ heißt *konvex*, wenn sie mit je zwei Punkten auch ihre Verbindungsstrecke enthält. ✕

- ▶ A. Auf der reellen Geraden sind die konvexen Mengen genau die Intervalle.
- B. Jede offene Kugel $B_r(a)$ eines normierten Vektorraumes ist konvex. Denn seien $u, v \in B_r(a)$, also

$$\|u - a\| < r, \quad \|v - a\| < r.$$

Für $0 \leq t \leq 1$ gilt dann aufgrund der Dreiecksungleichung und der positiven Homogenität einer Norm

$$\begin{aligned} \|((1-t)u + tv) - a\| &= \|(1-t)(u-a) + t(v-a)\| \\ &\leq (1-t)\|u-a\| + t\|v-a\| \\ &< (1-t)r + tr = r. \end{aligned}$$

Also ist auch $(1-t)u + tv \in B_r(a)$.

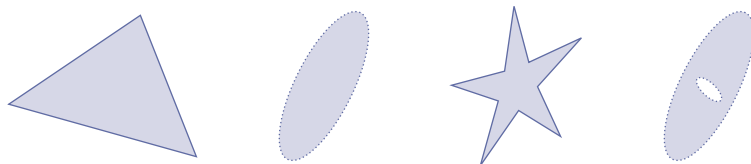
- C. Dasselbe gilt für abgeschlossene Kugeln $\bar{B}_r(a)$.
- D. Der Durchschnitt beliebig vieler konvexer Mengen ist konvex.
- E. Ist $A \subset V$ eine beliebige Menge, so ist der Durchschnitt aller A umfassenden konvexen Mengen,

$$\text{conv}(A) := \bigcap \{M \subset V : M \supset A \wedge M \text{ konvex}\},$$

eine konvexe Menge, genannt die *konvexe Hülle* von A . Sie ist die kleinste konvexe Menge in V , die A enthält.

- F. Ist Ω offen und $a \in \Omega$, so ist $\Omega \setminus \{a\}$ nicht konvex. ◀

Abb 7 Zwei konvexe und zwei nicht-konvexe Mengen



Man nennt $(1-t)u + tv$ mit $0 \leq t \leq 1$ eine Konvexkombination der Punkte u und v . Allgemeiner heißt eine Linearkombination von $m \geq 1$ Punkten u_1, \dots, u_m ,

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_m u_m,$$

eine *Konvexkombination* dieser Punkte, wenn

$$\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0, \quad \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1.$$

- 16 **Satz** Eine Teilmenge K eines Vektorraumes ist konvex genau dann, wenn jede Konvexkombination aus Punkten in K ebenfalls zu K gehört. \times

⟨⟨⟨ ⇐ Wenn jede Konvexkombination aus K wieder zu K gehört, dann gilt das natürlich auch für solche aus zwei Punkten. Also ist K konvex.

⇒ Dies zeigen wir durch Induktion über die Zahl m der konvex kombinierten Punkte. Für $m = 1$ ist nichts zu tun, ebensowenig für $m = 2$, da dies ja der Definition entspricht. Nun gelte die Behauptung für jede Konvexkombination aus $m \geq 2$ Punkten aus K , und es sei $u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{m+1} u_{m+1}$ eine Konvexkombination aus $m + 1$ Punkten in K . Ist $\lambda_{m+1} = 1$, so ist $u = u_{m+1}$, und wir sind bereits fertig. Andernfalls ist $\lambda := \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1 - \lambda_{m+1} > 0$. Aufgrund der Induktionsannahme gilt

$$v = \frac{\lambda_1}{\lambda} u_1 + \dots + \frac{\lambda_m}{\lambda} u_m \in K,$$

denn dies ist eine Konvexkombination aus m Punkten. Da K auch jede Konvexkombination aus zwei Punkten enthält und $1 - \lambda = \lambda_{m+1}$, ist auch

$$\lambda v + (1 - \lambda) u_{m+1} = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{m+1} u_{m+1} = u \in K. \quad \rangle\rangle\rangle$$

■ Konvexe Funktionen

Definition Eine auf einer konvexen Teilmenge K eines Vektorraumes definierte Funktion $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *konvex*, wenn

$$f((1-t)u + tv) \leq (1-t)f(u) + tf(v)$$

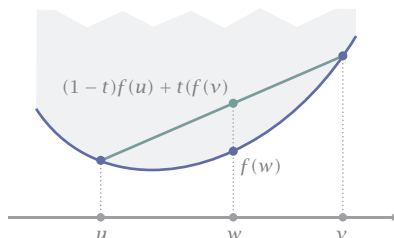
für alle $u, v \in K$ und alle $0 \leq t \leq 1$. Sie heißt *strikt konvex*, wenn sogar die strikte Ungleichung für alle $u \neq v$ und alle $0 < t < 1$ gilt.

Eine Funktion $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *anti-konvex* oder *konkav*, wenn $-f$ konvex ist. Entsprechendes gilt für ›strikt‹. \times

- ▶ A. \exp und x^2 sind strikt konvex.
- B. \log ist anti-konvex.
- C. id ist konvex und konkav.
- D. \arctan und x^3 ist weder konvex noch konkav. ◀

Abb 8

Eine konvexe Funktion
und ihr Epigraph



Geometrisch bedeutet Konvexität, dass der Graph von f unterhalb jeder Verbindungsstrecke zweier Punkte auf diesem Graphen liegt. Dies lässt sich ebenfalls mit dem Begriff der konvexen Menge ausdrücken.

Notiz Eine auf einer konvexen Menge K eines Vektorraumes V definierte Funktion $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ ist konvex genau dann, wenn ihr *Epigraph*

$$\text{Epi}(f) := \{(u, z) \in V \times \mathbb{R} : u \in K, z \geq f(u)\}$$

konvex in $V \times \mathbb{R}$ ist. \times

► Jede Norm N auf einem Vektorraum ist konvex. Denn aufgrund der Dreiecksungleichung und der positiven Homogenität gilt, für $0 \leq t \leq 1$,

$$\begin{aligned} N((1-t)u + tv) &\leq N((1-t)u) + N(tv) \\ &= (1-t)N(u) + tN(v). \end{aligned}$$

Sie ist aber nicht strikt konvex, denn für $u = 0$ und $v \neq 0$ gilt

$$N((1-t)u + tv) = N(tv) = tN(v) = (1-t)N(u) + tN(v). \quad \blacktriangleleft$$

Ist eine Funktion konvex, so ist sie es auch bezüglich beliebiger Konvexkombinationen ihrer Argumente. Dies ist die diskrete Form der *Jensenschen Ungleichung*₂₀, und wird genau so bewiesen wie die entsprechende Aussage über konvexe Mengen₁₆:

Abb 9 Strikt konvexe, konvexe, und nicht konvexe Funktionen

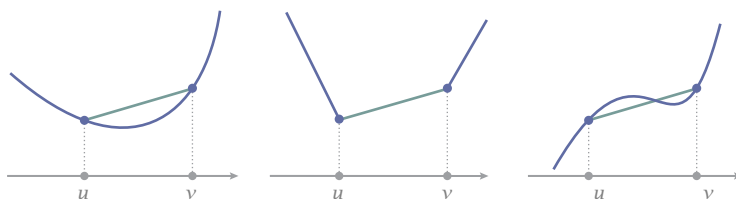
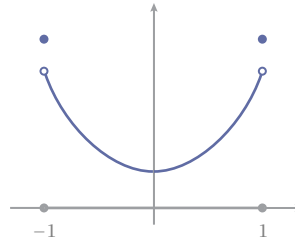


Abb 10

Eine konvexe unstetige Funktion



- 17 **Satz** Eine auf einer konvexen Menge K eines Vektorraumes definierte Funktion $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ ist konvex genau, wenn

$$f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m) \leq \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_m f(v_m)$$

für jede Konvexkombination $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$ in K . ✕

Die Konvexität einer Funktion ist punktweise definiert und erfordert keinerlei Stetigkeit. Auf einer abgeschlossenen Menge muss dies auch nicht der Fall sein, wie Abbildung 10 zeigt. Jene Funktion ist offensichtlich konvex auf $[-1, 1]$, aber unstetig. Anders ist dies auf *offenen* Mengen.

Satz Sei $\Omega \subset V$ offen und konvex. Ist $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, so ist f stetig und auf jeder kompakten Teilmenge von Ω sogar lipschitzstetig. ✕

Wir benötigen diesen Satz hier nicht und übergehen deshalb den Beweis. Man findet ihn zum Beispiel in HILDEBRANDT 2, Seite 75–76.

■ Konvexität und Differenzierbarkeit

Wir wollen nun Konvexität durch Eigenschaften der ersten und zweiten Ableitung charakterisieren. Grundlegend ist folgender Satz.

- 18 **Satz** Sei $\Omega \subset V$ offen und konvex und $f \in C^1(\Omega)$. Dann ist f konvex genau dann, wenn

$$f(x+h) \geq f(x) + Df(x)h$$

für alle $x, x+h \in \Omega$. Sie ist strikt konvex genau dann, wenn außerdem

$$f(x+h) > f(x) + Df(x)h$$

für alle $h \neq 0$ gilt. ✕

⟨⟨⟨ ⇒ Sei f konvex. Mit $x, x+h$ gehört dann auch

$$x+th = (1-t)x + t(x+h), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

zu Ω , und aufgrund der Konvexität von f gilt

$$f(x + th) \leq (1 - t)f(x) + tf(x + h) = f(x) + t(f(x + h) - f(x)).$$

Wegen $f \in C^1(\Omega)$ gilt also

$$f(x + h) - f(x) \geq \frac{1}{t}(f(x + th) - f(x)) = \frac{1}{t} \int_0^t Df(x + sh)h \, ds \quad (2)$$

für alle $0 < t < 1$ mit einem in s stetigen Integranden. Mit $t \rightarrow 0$ und dem Riemannschen Lemma 10.15 erhalten wir somit die Behauptung

$$f(x + h) - f(x) \geq Df(x)h \quad (3)$$

für den Fall der einfachen Konvexität.

Ist f sogar strikt konvex, so gilt in (2) die strikte Ungleichung. Zusammen mit der eben bewiesenen Ungleichung (3) für th anstelle von h erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x + h) - f(x) &> \frac{1}{t}(f(x + th) - f(x)) \\ &\geq \frac{1}{t}Df(x)(th) = Df(x)h \end{aligned}$$

wie behauptet.

← Seien $x \neq y$ zwei Punkte in Ω und $z = (1 - t)x + ty$ mit $0 < t < 1$. Dann ist mit $h = y - x$ umgekehrt

$$x = z - th, \quad y = z + (1 - t)h.$$

Wenden wir hierauf (3) an, so erhalten wir

$$f(x) \geq f(z) - tDf(z)h, \quad f(y) \geq f(z) + (1 - t)Df(z)h.$$

Multiplizieren der ersten Gleichung mit $1 - t \geq 0$, der zweiten mit $t \geq 0$ und anschließendes Addieren ergibt

$$(1 - t)f(x) + tf(y) \geq f(z) = f((1 - t)x + ty).$$

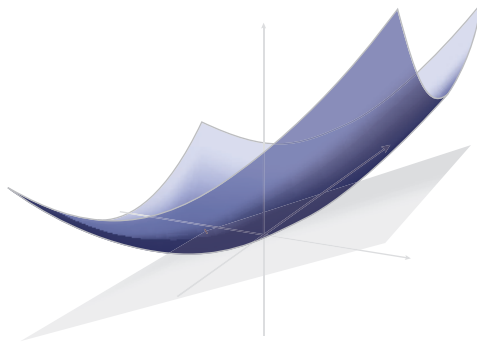
Somit ist f konvex. Gilt in der Voraussetzung (3) sogar die strikte Ungleichung, so gilt sie auch in den letzten drei Ungleichungen, und wir erhalten die strikte Konvexität von f . »»»

Der Graph der Funktion $h \mapsto f(x) + Df(x)h$ beschreibt die *Tangentialebene* an den Graphen von f im Punkt $(x, f(x))$. Eine C^1 -Funktion ist somit (strikt) konvex genau dann, wenn ihr Graph (strikt) oberhalb aller ihrer Tangentialebenen liegt, mit Ausnahme natürlich des jeweiligen Berührungspunktes. Solche Ebenen werden *Stützebenen*, im eindimensionalen Fall *Stützgeraden* genannt.

Im eindimensionalen Fall ergibt sich aus dem letzten Satz folgende Charakterisierung konvexer C^1 -Funktionen.

Abb 11

Konvexe Fläche mit
Stützebene



- 19 **Satz** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in C^1(I)$. Dann ist f (strikt) konvex genau dann, wenn f' (streng) monoton steigt. ✕

⟨⟨⟨ ⇒ Besteht I nur aus einem Punkt, so ist nichts zu tun. Sei also I nichtentartet, und seien $u < v$ innere Punkte von I . Dann ergibt der letzte Satz

$$f(v) - f(u) \geq f'(u)(v - u), \quad f(u) - f(v) \geq f'(v)(u - v).$$

Daraus folgt $f'(u)(v - u) \leq f'(v)(v - u)$ und damit $f'(u) \leq f'(v)$. Aus Stetigkeitsgründen gilt dies dann auch für etwaige Randpunkte von I . Ist f zudem strikt konvex, so gelten überall auch die strikten Ungleichungen.

⇐ Ist f' monoton wachsend, so gilt

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 f'(x+sh)h \, ds \geq \int_0^1 f'(x)h \, ds = f'(x)h,$$

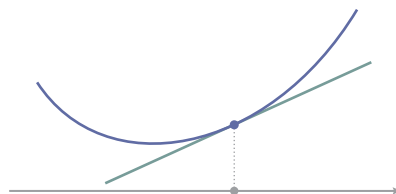
und zwar sowohl für $h \geq 0$ wie auch $h \leq 0$. Ist f' streng monoton wachsend, so gilt für $h \neq 0$ sogar die strikte Ungleichung. Die Behauptung folgt dann mit dem letzten Satz 18. ⟩⟩⟩

Nun betrachten wir nun noch den Fall einer C^2 -Funktion.

- Satz** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex und $f \in C^2(\Omega)$. Dann ist f konvex genau dann, wenn $Hf \geq 0$ auf ganz Ω . Gilt sogar $Hf > 0$, so ist f strikt konvex. ✕

Abb 12

Konvexe Funktion mit
Stützgerade



⟨⟨⟨ Mit $x, x+h \in \Omega$ ist wegen der Konvexität von Ω auch $[x, x+h] \subset \Omega$. Aufgrund der quadratischen Taylorformel₅ gilt

$$f(x+h) = f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle + \frac{1}{2} \langle Hf(\xi)h, h \rangle \quad (4)$$

für ein $\xi \in [x, x+h]$. Ist $Hf \geq 0$ auf Ω , so folgt

$$f(x+h) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle \quad (5)$$

und hieraus die Konvexität von f ₁₈. Gilt sogar $Hf > 0$ auf Ω , so folgt entsprechend die strikte Konvexität.

Ist umgekehrt f konvex, so gilt wieder (5)₁₈, und mit (4) folgt somit

$$\langle Hf(\xi)h, h \rangle \geq 0$$

mit einem $\xi \in [x, x+h]$. Ersetzen wir h durch εh , so gilt *dieselbe* Ungleichung mit $\xi \in [x, x+\varepsilon h]$. Lassen wir ε gegen Null konvergieren, so konvergiert ξ gegen x , und wir erhalten

$$\langle Hf(x)h, h \rangle \geq 0.$$

Da dies für jedes kleine h gilt, ist $Hf(x) \geq 0$. Dies gilt für jedes $x \in \Omega$. ⟩⟩⟩

Bemerkung Umgekehrt folgt aus der strikten Konvexität *nicht*, dass auch die Hessische strikt positiv definit ist. Zum Beispiel ist $x \mapsto x^4$ strikt konvex, aber die zweite Ableitung verschwindet bei $x = 0$. \rightarrow

15.5

Konvexe Ungleichungen

Auf Konvexitätsargumenten beruhen einige wichtige Ungleichungen der Analysis. Zunächst die

- 20 **Jensensche Ungleichung** Sei φ integrierbar auf dem Intervall I . Ist f stetig und konvex auf $\varphi(I)$, so gilt

$$f\left(\int_I \varphi(t) dt\right) \leq \int_I f(\varphi(t)) dt,$$

wobei

$$\int_I \varphi(t) dt := \frac{1}{|I|} \int_I \varphi(t) dt$$

das *gemittelte Integral* über I bezeichnet. \times

««« Für eine Treppenfunktion $\varphi = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{(t_{k-1}, t_k)}$ gilt

$$\int_I \varphi(t) dt = \sum_{k=1}^n \frac{t_k - t_{k-1}}{|I|} c_k.$$

Dies ist eine Konvexkombination der reellen Zahlen c_1, \dots, c_n im Intervall $\varphi(I)$. Aufgrund der Konvexität von f auf $\varphi(I)$ gilt daher $_{17}$

$$\begin{aligned} f\left(\int_I \varphi(t) dt\right) &= f\left(\sum_{k=1}^n \frac{t_k - t_{k-1}}{|I|} c_k\right) \\ &\leq \frac{1}{|I|} \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) f(c_k) \\ &= \frac{1}{|I|} \int_I f(\varphi(t)) dt = \int_I f(\varphi(t)) dt. \end{aligned}$$

Somit gilt die Jensensche Ungleichung für Treppenfunktion. Aus Stetigkeitsgründen gilt sie dann auch für alle Regelfunktionen. »»»

► Ist φ integrierbar auf I , so gilt

$$\int_I |\varphi(t)| dt \leq \left(\int_I |\varphi(t)|^p dt\right)^{1/p}, \quad p \geq 1.$$

für alle $p \geq 1$. ◀

- 21 **Youngsche Ungleichung** Für reelle Zahlen $a, b \geq 0$ und Exponenten $p, q > 1$ mit $1/p + 1/q = 1$ gilt

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn $a^p = b^q$. ✕

««« Für $u, v > 0$ und $0 \leq \alpha \leq 1$ gilt aufgrund der Antikonvexität des Logarithmus

$$\alpha \log u + (1 - \alpha) \log v \leq \log(\alpha u + (1 - \alpha)v).$$

Bilden wir auf beiden Seiten das Exponential, so erhalten wir die *Ungleichung vom geometrischen und arithmetischen Mittel*,

$$u^\alpha v^{1-\alpha} \leq \alpha u + (1 - \alpha)v.$$

Mit $\alpha = 1/p$ sowie $u = a^p$, $v = b^q$ ergibt sich die Youngsche Ungleichung.

Der einzig kritische Punkt der Funktion $(\alpha u + (1 - \alpha)v)/(u^\alpha v^{1-\alpha})$ im ersten Quadranten liegt bei $u = v$. Dort liegt Gleichheit vor. »»»

Reelle Zahlen p und q mit

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p, q > 1,$$

werden als *konjugierte Exponenten* bezeichnet. Für diese gelten die oft benötigten Identitäten

$$\begin{aligned} p + q = pq &\Leftrightarrow (p-1)(q-1) = 1 \\ &\Leftrightarrow p(q-1) = q \\ &\Leftrightarrow q(p-1) = p. \end{aligned}$$

Die einzigen *selbstkonjugierten Exponenten* sind $p = q = 2$.

- 22 **Höldersche Ungleichung** Für auf einem Intervall I integrierbare Funktionen f, g und konjugierte Exponenten p und q gilt

$$\int_I |fg| \leq \left(\int_I |f|^p \right)^{1/p} \left(\int_I |g|^q \right)^{1/q}. \quad \times$$

»»» Verschwindet das Integral von $|f|$ oder $|g|$, so verschwindet auch das Integral von $|fg|$, und es ist nichts zu zeigen. Wir können also annehmen, dass

$$A = \left(\int_I |f|^p \right)^{1/p} > 0, \quad B = \left(\int_I |g|^q \right)^{1/q} > 0$$

gilt. Aufgrund der Youngschen Ungleichung gilt dann punktweise

$$\frac{|f|}{A} \frac{|g|}{B} \leq \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{A^p} + \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{B^q}.$$

Integration über $[a, b]$ ergibt

$$\frac{1}{AB} \int_I |fg| \leq \frac{1}{p} \int_I \frac{|f|^p}{A^p} + \frac{1}{q} \int_I \frac{|g|^q}{B^q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dies ist äquivalent zur behaupteten Ungleichung. »»»

Ein Spezialfall dieser Ungleichung ist die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung in Integralform,

$$\int_I |fg| \leq \left(\int_I |f|^2 \right)^{1/2} \left(\int_I |g|^2 \right)^{1/2}.$$

Mithilfe der Hölderschen Ungleichung erhalten wir die

- 23 **Minkowskische Ungleichung** Für auf einem Intervall I integrierbare Funktionen f, g und $p \geq 1$ gilt

$$\left(\int_I |f+g|^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_I |f|^p \right)^{1/p} + \left(\int_I |g|^p \right)^{1/p}. \quad \times$$

⟨⟨⟨⟨ Für $p = 1$ ist dies die Dreiecksungleichung. Sei also $p > 1$. Es ist

$$|f + g|^p = |f + g|^{p-1} |f + g| \leq |f| |f + g|^{p-1} + |g| |f + g|^{p-1}. \quad (6)$$

Mit dem zu p konjugierten Exponenten q ist $(p-1)q = p$ und mit der Hölder'schen Ungleichung somit

$$\begin{aligned} \int |f + g|^p &\leq \left(\int |f|^p \right)^{1/p} \left(\int |f + g|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \\ &\quad + \left(\int |g|^p \right)^{1/p} \left(\int |f + g|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \\ &= \left\{ \left(\int |f|^p \right)^{1/p} + \left(\int |g|^p \right)^{1/p} \right\} \left(\int |f + g|^p \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Ist nun die linke Seite Null, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls dividieren wir durch den ganz rechts stehenden Faktor und erhalten wegen $1 - 1/q = 1/p$ die Minkowskische Ungleichung. ⟩⟩⟩⟩

Aufgaben

- 1 Für die Ableitung des Produktes zweier Funktionen gilt entsprechend zur Leibnizformel 8.17 in einer Variablen die *allgemeine Leibnizformel*

$$D^\alpha(fg) = \sum_{0 \leq \sigma \leq \alpha} B_\sigma^\alpha D^{\alpha-\sigma} f D^\sigma g$$

mit den Binomialkoeffizienten $B_\sigma^\alpha := B_{\sigma_1}^{\alpha_1} \cdot B_{\sigma_n}^{\alpha_n}$. Voraussetzung ist natürlich, dass alle auftretenden Ableitungen existieren und stetig sind.

- 2 Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \langle Ax, x \rangle$ mit einer beliebige $n \times n$ -Matrix A . Dann ist

$$\nabla f = (A + A^\top)x, \quad Hf = A + A^\top.$$

- 3 Untersuchen sie die folgenden Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ auf Extremalstellen.

- $f(x, y) = y^2 - 3x^2y + 2x^4$
- $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$
- $f(x, y) = \exp(x^2 + y^2 - 8x^2 - 4y^4)$.

- 4 Sei $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $v(r, \varphi) = u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$. Dann gilt

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi}.$$

- 5 Seien a und b zwei verschiedene Punkte in \mathbb{R}^2 . Man bestimme den eindeutigen kritischen Punkt c der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{a, b\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{\|x - a\|} + \frac{1}{\|x - b\|}$$

und ihr Taylorpolynom $T_c^2 f$.

- 6 Ist p ein beliebiges Polynom mit reellen oder komplexen Koeffizienten, so sind Real- und Imaginärteil von $p(x + iy)$ harmonische Funktionen in x und y .
- 7 *Rayleighquotient* Für eine symmetrische $n \times n$ -Matrix A heißt

$$\varphi: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2} \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle}$$

der *Rayleighquotient*. Bestimmen sie die kritischen Punkte x_0 von φ und die zugehörigen kritischen Werte $\varphi(x_0)$.

- 8 Gegeben sind m Messwertpaare $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$. Bestimmen sie diejenige *Ausgleichsgerade* $y = ax + b$, für die die Summe der Fehlerquadrate

$$F = \sum_{i=1}^m (ax_i + b - y_i)^2$$

minimal wird.

- 9 Sei $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ und

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \varphi(\langle a, x \rangle)$$

mit einem festen Vektor $0 \neq a \in \mathbb{R}^n$ und $n \geq 2$. Dann ist jeder kritische Punkt von f degeneriert.

- 10 Eine C^1 -Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist von der Form $f(x) = \langle a, x \rangle + b$ genau dann, wenn sowohl f als auch $-f$ konvex sind.

► *Lösung* Ist f auf \mathbb{R}^n konvex, so gilt

$$f(x) \geq f(0) + \langle \nabla f(0), x \rangle.$$

Ist auch $-f$ konvex, so gilt entsprechend $-f(x) \geq -f(0) - \langle \nabla f(0), x \rangle$, oder

$$f(x) \leq f(0) + \langle \nabla f(0), x \rangle.$$

Also gilt

$$f(x) = f(0) + \langle \nabla f(0), x \rangle.$$

Umgekehrt gilt für jede Funktion mit $f(x) = \langle a, x \rangle + b$ die Identität

$$\begin{aligned} f(tu + (1-t)v) &= \langle a, tu + (1-t)v \rangle + b \\ &= t \langle a, u \rangle + (1-t) \langle a, v \rangle + tb + (1-t)b \\ &= tf(u) + (1-t)f(v). \end{aligned}$$

Daraus folgt die Konvexität von f und $-f$. ◀

- 11 Ist $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ strikt konvex und *koerzitiv*, das heißt

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = \infty,$$

so besitzt f genau eine lokale Minimalstelle x_0 , und es gilt $f(x_0) = \min_{\mathbb{R}^n} f$.

► *Lösung* Aufgrund der Koerzitivität existiert eine abgeschlossene Kugel $B = B_{\bar{r}}(0)$ so, dass

$$f|_{\mathbb{R}^n \setminus \{B\}} > f(0).$$

Da jede auf \mathbb{R}^n konvexe Funktion außerdem stetig ist, gilt deshalb

$$m := \inf_{\mathbb{R}^n} f = \inf_B f = \min_B f > -\infty,$$

und es gibt mindestens einen Punkt x_0 mit $f(x_0) = m$. Gäbe es eine weitere solche Minimalstelle $\tilde{x}_0 \neq x_0$, so wäre f auf dem Innern der Verbindungsstrecke $[x_0, \tilde{x}_0]$ aufgrund der strikten Konvexität strikt kleiner als m . Das ist aber nicht möglich. Also ist x_0 eindeutig. ◀

- 12 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex. Ist $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ konvex, so sind es auch die Mengen

$$\Omega_c = \{x \in \Omega : f(x) < c\}, \quad c \in \mathbb{R}.$$



▶ Lösung

- 13 Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ nicht-leer und konvex. Dann ist auch die Funktion

$$d: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad d(x) = \text{dist}(x, K) := \inf_{u \in \Omega} \|x - u\|$$

konvex.



▶ Lösung

- 14 Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ nicht-leer, kompakt und konvex. Ist $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, konvex und nicht konstant, so nimmt f ihr Supremum auf dem Rand von K an.



▶ Lösung

- 15 Sei $f: x \mapsto \langle a, x \rangle + b$ eine nicht-konstante, affine Funktion auf dem \mathbb{R}^n . Dann nimmt f ihr Maximum über der konvexen Hülle von m Punkten x_1, \dots, x_m in \mathbb{R}^n in wenigstens einem dieser Punkte an.



▶ Lösung

- 16 Für Funktionen $f_1, \dots, f_n \in R(I)$ und $p_1, \dots, p_n > 1$ mit $\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$ gilt

$$\int_I \prod_{i=1}^n |f_i(t)| dt \leq \prod_{i=1}^n \left(\int_I |f_i(t)|^{p_i} dt \right)^{1/p_i}.$$



▶ Lösung

- 17 Sei φ integrierbar auf I . Dann ist

$$\Phi: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi(p) = \left(\int_I |\varphi(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

monoton steigend.



▶ Lösung

- 18 Beweisen sie Satz 6.

► *Lösung* Das Taylorsche Restglied einer skalaren Funktion f ist ⁴

$$R_a^{m-1}f(h) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(\xi) h^\alpha$$

mit einem $\xi \in [a, a+h]$. Gilt also

$$\frac{1}{\alpha!} \sup_{x \in B_r(a)} |\partial^\alpha f(x)| \leq \frac{M}{r^{|\alpha|}}, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^n,$$

so folgt für $|h| \leq \rho < r$ mit $\theta = \rho/r$

$$|R_a^{m-1}f(h)| \leq M \sum_{|\alpha|=m} \frac{\rho^{|\alpha|}}{r^{|\alpha|}} = M\theta^m \sum_{|\alpha|=m} 1 = M\theta^m m^n,$$

denn die Anzahl aller n -Multiindizes der Länge m ist m^n . Mit $0 \leq \theta < 1$ konvergiert der letzte Ausdruck für $m \rightarrow \infty$ gegen Null. ◀

16

Lineare Differenzialgleichungen

Sei V ein beliebiger normierter Vektorraum. Eine *lineare Differenzialgleichung* auf V ist von Form

$$\dot{x} = Ax$$

mit $A \in L(V)$, also einem beschränkten linearer Operator A auf V . Eine *Lösung* dieser Gleichung ist jede differenzierbare Kurve $\varphi: I \rightarrow V$, so dass

$$\dot{\varphi}(t) = A\varphi(t), \quad t \in I.$$

Wir werden sehen, dass jedes *Anfangswertproblem*

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

eine eindeutige und sogar für alle Zeiten definierte Lösung $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow V$ der Gestalt

$$\varphi(t) = e^{At}x_0$$

besitzt. Dazu müssen wir nur das Symbol e^{At} geeignet definieren. Die Wahl des Zeitpunktes 0 ist übrigens keine Beschränkung der Allgemeinheit A-2 und vereinfacht die Darstellung.

16.1

Exponentiale linearer Operatoren

Für reelle Zahlen a und t ist bekanntlich

$$e^{at} = \sum_{k \geq 0} \frac{a^k}{k!} t^k.$$

Um diese Darstellung auf beschränkte lineare Operatoren auszudehnen, benötigen wir ein paar Vorbereitungen.

Eine Norm $|\cdot|$ auf einem Vektorraum V induziert auf dem Raum $L(V)$ aller stetigen linearen Operatoren auf V eine *Operatornorm* $\|\cdot\|$ durch

$$\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{|x|=1} |Ax|.$$

Wie wir bereits gesehen haben ^{14.1}, wird $L(V)$ mit dieser Norm zu einem Banachraum ^{14.2}. Es gilt sogar mehr.

- 1 **Satz** Der Raum $L(V)$ mit der Operatornorm $\|\cdot\|$ bildet bezüglich der Addition und Komposition von Operatoren eine Banachalgebra. ✕

Eine *Banachalgebra* ist ein Banachraum, in dem eine Multiplikation erklärt ist, die sich mit der Addition mittels der *Distributivgesetze*

$$A(B + C) = AB + AC, \quad (A + B)C = AC + BC$$

und mit der Norm mittels der Ungleichung

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

verträgt. Die Multiplikation muss jedoch nicht kommutativ sein, und im Fall der Hintereinanderausführung von Operatoren ist sie es auch nicht. — Der Beweis dieser Eigenschaften ist eine kleine Übung.

Gilt übrigens $\|AB\| \leq c \|A\| \|B\|$ mit einer Konstanten $c \geq 1$, so existiert immer eine äquivalente *adaptierte Norm* mit $c = 1$ ^{A-1}.

■ Das Exponential e^A

In einem beliebigen Banachraum können wir *unendliche Reihen* bilden. Diese definieren wir wie üblich als Limes endlicher Partialsummen, also

$$\sum_{k \geq 0} A_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{0 \leq k \leq n} A_k,$$

wenn dieser existiert.

Die Reihe heißt *absolut* oder *normal konvergent*, falls die Reihe $\sum_k \|A_k\|$ konvergiert, was äquivalent ist mit

$$\sum_{k \geq 0} \|A_k\| < \infty.$$

In diesem Fall bilden die Partialsummen eine Cauchyfolge, die aufgrund der Vollständigkeit von $L(V)$ auch einen Grenzwert besitzt.

Definition und Satz Das *Exponential* von $A \in L(V)$ ist der lineare Operator

$$e^A := \exp(A) := \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots$$

Diese Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig auf jeder beschränkten Menge in $L(V)$, und es gilt $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$. ✕

⟨⟨⟨ Aus $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ folgt mit vollständiger Induktion $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ für alle $k \geq 0$. Für alle $n \geq 0$ gilt daher

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \|A^k\| \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \|A\|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k = \exp(\|A\|) < \infty.$$

Also konvergiert die Exponentialreihe absolut und gleichmäßig auf jeder beschränkten Menge in $L(V)$. Die behauptete Ungleichung folgt dann aus

$$\left\| \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \|A^k\| \leq \exp(\|A\|)$$

und Grenzübergang $n \rightarrow \infty$. ⟩⟩⟩

Für die weiteren Eigenschaften des Exponentials benötigen wir den Produktsatz von Cauchy, der es erlaubt, das Produkt zweier Reihen durch Ausmultiplizieren und Umordnung unendlich vieler Summanden darzustellen. Der Beweis wurde im Kapitel über Reihen skizziert A-6.16. Er gilt für absolut konvergente reelle Reihen ebenso wie für normal konvergente Reihen von Operatoren.

2 Produktsatz Sind die Reihen $\sum_{k \geq 0} A_k$ und $\sum_{l \geq 0} B_l$ absolut konvergent, so ist

$$\sum_{k \geq 0} A_k \sum_{l \geq 0} B_l = \sum_{k, l \geq 0} A_k B_l = \sum_{n \geq 0} \sum_{k+l=n} A_k B_l,$$

wobei alle Reihen absolut konvergieren. ✕

3 Rechenregeln Seien $A, B, T \in L(V)$ und T invertierbar. Dann gilt:

- (i) $e^{T^{-1}AT} = T^{-1}e^AT$.
- (ii) $e^{A+B} = e^A e^B$, falls $AB = BA$.
- (iii) $e^{-A} = (e^A)^{-1}$. Insbesondere ist e^A immer invertierbar. ✕

⟨⟨⟨ (i) Mit Induktion zeigt man

$$(T^{-1}AT)^k = T^{-1}A^kT, \quad k \geq 0.$$

Für jedes $n \geq 0$ gilt deshalb

$$T^{-1} \left(\sum_{k=0}^n \frac{A^k}{k!} \right) T = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} T^{-1}A^kT = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (T^{-1}AT)^k.$$

Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ ergibt

$$T^{-1}e^AT = T^{-1} \left(\sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!} \right) T = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} (T^{-1}AT)^k = e^{T^{-1}AT}.$$

(ii) Mit $AB = BA$ gilt auch für alle $n \geq 0$ die *binomische Formel*

$$\frac{1}{n!} (A+B)^n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} A^k B^{n-k} = \sum_{k+l=n} \frac{A^k B^l}{k!l!}.$$

Daraus folgt mit dem Produktsatz ₂

$$\begin{aligned} e^{A+B} &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} (A+B)^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k+l=n} \frac{A^k B^l}{k!l!} = \sum_{k \geq 0} \frac{A^k}{k!} \sum_{l \geq 0} \frac{B^l}{l!} = e^A e^B. \end{aligned}$$

(iii) Dies folgt aus (ii) mit

$$I = e^0 = e^{A-A} = e^A e^{-A} = e^{-A} e^A.$$

Also ist e^A invertierbar, und die Inverse ist e^{-A} . ⟩⟩⟩

Achtung Für nicht kommutierende Operatoren gilt die binomische Formel für $n \geq 2$ und auch Aussage (ii) im Allgemeinen *nicht*. ↯

■ Zwei Beispiele

Im Allgemeinen ist die Berechnung der Reihe von e^A nicht praktisch. Zwei wichtige Ausnahmen bilden jedoch diagonale und nilpotente Operatoren.

Definition Ein Operator $A \in L(V)$ heißt *Diagonoperator*, wenn V eine Basis aus Eigenvektoren von A besitzt. Er heißt *nilpotent*, falls $A^{m+1} = 0$ für ein $m \geq 0$. ✕

Ist A nilpotent mit $A^{m+1} = 0$, so ist

$$e^A = \sum_{0 \leq k \leq m} \frac{1}{k!} A^k = I + A + \dots + \frac{1}{m!} A^m$$

ein *Polynom* in A . Ist A ein Diagonaloperator, so nimmt er in einer Basis aus Eigenvektoren Diagonalgestalt $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ an. Hierfür gilt offensichtlich

$$e^A = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}).$$

In einer anderen Basis ist dann $A = T^{-1}AT$ mit einem entsprechenden Isomorphismus T , und es gilt

$$e^A = e^{T^{-1}AT} = T^{-1}e^AT.$$

Die komplizierte Bestimmung von e^A wird damit auf die einfache Bestimmung von e^{λ} zurückgeführt.

Mit Hilfe der *SN-Zerlegung* von Operatoren werden wir in Abschnitt 6 den allgemeinen Fall auf diese beiden Spezialfälle zurückführen.

■ 1-Parametergruppen

Statt des Exponentials e^A betrachten wir nun die Familie e^{At} mit $t \in \mathbb{R}$.

Definition Eine *1-Parametergruppe* ist eine Abbildung

$$\Phi: \mathbb{R} \rightarrow G, \quad t \mapsto \Phi^t$$

von \mathbb{R} in eine multiplikative Gruppe G mit den zwei Eigenschaften

$$\Phi^0 = I, \quad \Phi^{s+t} = \Phi^s \Phi^t, \quad s, t \in \mathbb{R},$$

wobei I das neutrale Element in G bezeichnet. \times

Bei einer 1-Parametergruppe handelt es sich also um einen *Gruppenhomomorphismus* $(\mathbb{R}, +) \rightarrow (G, \cdot)$. Wegen

$$\Phi^s \Phi^t = \Phi^{s+t} = \Phi^{t+s} = \Phi^t \Phi^s$$

kommutieren alle Mitglieder einer 1-Parametergruppe, auch wenn G selbst keine kommutative Gruppe ist. Außerdem ist Φ^{-t} das Inverse zu Φ^t , denn

$$I = \Phi^0 = \Phi^{t-t} = \Phi^t \Phi^{-t} = \Phi^{-t} \Phi^t.$$

Jedes Element einer 1-Parametergruppe ist also invertierbar. — Nun zurück zu unserer Familie $t \mapsto e^{At}$.

4 **Satz** Für jedes $A \in L(V)$ ist

$$\Phi: \mathbb{R} \rightarrow L(V), \quad t \mapsto \Phi^t = e^{At}$$

eine differenzierbare 1-Parametergruppe in $L(V)$ mit

$$(e^{At})' = Ae^{At}. \quad \times$$

««« Offensichtlich ist $e^{A0} = e^0 = I$ und, da As und At kommutieren,

$$e^{A(s+t)} = e^{As+At} = e^{As} e^{At}.$$

Somit handelt es sich um eine 1-Parametergruppe. Ferner ist

$$e^{Ah} - I = \sum_{k \geq 1} \frac{A^k}{k!} h^k = Ah + O(h^2),$$

woraus sich

$$(e^{At}) \cdot \Big|_{t=0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e^{Ah} - I) = A$$

ergibt. Mit der Gruppeneigenschaft folgt daraus für jedes andere t

$$(e^{At}) \cdot = \frac{d}{ds} e^{A(s+t)} \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} e^{As} e^{At} \Big|_{s=0} = Ae^{At}. \quad \gggg$$

■ Noch ein Beispiel

Betrachte den Vektorraum

$$P_n := \{p = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} : a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}\}$$

aller reellen Polynome vom Grad kleiner n . Eine Basis bilden die Monome $1, x, \dots, x^{n-1}$, somit ist $\dim P_n = n$. Die übliche Differenziation definiert einen linearen *Differenzialoperator*

$$D : P_n \rightarrow P_n, \quad Dp = p'.$$

Offensichtlich ist $D^n = 0$, somit ist D nilpotent.

Satz Das Exponential von Dt ist der *Translationsoperator* H^t :

$$e^{Dt} = H^t : P_n \rightarrow P_n, \quad H^t p = p(\cdot + t). \quad \times$$

««« Nach der Formel von Taylor gilt

$$\begin{aligned} (H^t p)(x) &= p(x+t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{(k)}(x)}{k!} t^k \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Dt)^k}{k!} p \right) (x) = (e^{Dt} p)(x), \end{aligned}$$

wobei die Reihen für ein Polynom vom Grad kleiner n nach spätestens n Termen abbrechen. »»»

Für die Basis

$$e_k := \frac{x^k}{k!}, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

gilt

$$De_0 = 0, \quad De_k = e_{k-1}, \quad k \geq 1.$$

Damit erhält D die Matrixdarstellung

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung Der Differenzialoperator D ist ein einfaches und wichtiges Beispiel eines Operators, der auf unendlich-dimensionalen Funktionenräumen im Allgemeinen *unbeschränkt* ist. \rightarrow

16.2

Die lineare Differenzialgleichung

Mit den Ergebnissen des vorangehenden Abschnitts können wir die Differenzialgleichung $\dot{x} = Ax$ nun - zumindest formal - vollständig lösen.

5 Fundamentalsatz Das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

besitzt für jedes $x_0 \in V$ die eindeutige Lösung

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow V, \quad \varphi(t) = e^{At}x_0. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Dies ist *eine* Lösung, denn $\varphi(0) = x_0$ und $_4$

$$\dot{\varphi}(t) = (e^{At}x_0)' = (e^{At})'x_0 = Ae^{At}x_0 = A\varphi(t).$$

Es ist auch die *einzige* Lösung. Denn ist ψ eine weitere Lösung, so gilt, da e^{-At} und A kommutieren,

$$(e^{-At}\psi(t))' = -Ae^{-At}\psi(t) + e^{-At}A\psi(t) = 0.$$

Also ist $e^{-At}\psi$ konstant, und Auswerten bei $t = 0$ ergibt

$$e^{-At}\psi(t) = \psi(0) = x_0.$$

Also ist $\psi(t) = e^{At}x_0$. $\rangle\rangle\rangle$

Für eine lineare Differenzialgleichung ist $\varphi \equiv 0$ immer eine Lösung, genannt *Gleichgewichtslösung*. Aus dem Fundamentalsatz folgt, dass dies auch die einzige Lösung ist, die jemals den Wert 0 annimmt. Mit anderen Worten, keine andere Lösung kann den Wert 0 annehmen. Sie kann allerdings gegen diesen Gleichgewichtspunkt konvergieren. Solche Lösungen werden uns im nächsten Abschnitt begegnen.

Der Fundamentalsatz definiert eine Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R} \times V \rightarrow V, \quad (t, x) \mapsto e^{At}x,$$

genannt der *Fluss* der Differenzialgleichung $\dot{x} = Ax$. Fixieren wir x , so beschreibt sie die eindeutige Lösungskurve zum Anfangswert x . Fixieren wir dagegen t , so beschreibt sie die *Zeit- t -Abbildung* e^{At} des Systems, die jedem Anfangswert denjenigen Punkt zuordnet, den er zum Zeitpunkt t erreicht. Diese Abbildungen bilden also eine 1-Parametergruppe in $L(V)$ bestehend aus linearen Isomorphismen des Vektorraums V .

■ Infinitesimaler Generator

Jeder beschränkte lineare Operator definiert also eine lineare Differenzialgleichung und damit eine differenzierbare 1-Parametergruppe von Operatoren. Hiervon gilt auch folgende Umkehrung.

Satz Zu jeder differenzierbaren 1-Parametergruppe Φ in $L(V)$ existiert ein eindeutig bestimmter Operator A in $L(V)$, genannt ihr *infinitesimaler Generator*, so dass $\Phi^t = e^{At}$. \times

⟨⟨⟨ Da Φ differenzierbar ist, können wir eine Abbildung $A: V \rightarrow V$ in jedem Punkt $x \in V$ definieren durch

$$Ax := (\Phi^t x)' \Big|_{t=0}.$$

Diese Abbildung ist linear, da Φ^t für jedes t linear ist. Somit ist diese Schreibweise gerechtfertigt.

Wir zeigen, dass $\Phi^t x_0$ das Anfangswertproblem $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$ löst. Offensichtlich ist $\Phi^0 x_0 = x_0$. Ferner gilt aufgrund der Gruppenstruktur von Φ und der Definition von A

$$(\Phi^t x_0)' = \frac{d}{ds} \Phi^{s+t} x_0 \Big|_{s=0} = \frac{d}{ds} \Phi^s (\Phi^t x_0) \Big|_{s=0} = A \Phi^t x_0.$$

Aufgrund der Eindeutigkeit der Lösung ξ dieses Anfangswertproblems gilt also

$$\Phi^t x_0 = e^{At} x_0.$$

Da dies für alle $x_0 \in V$ gilt, ist $\Phi^t = e^{At}$. $\rangle\rangle\rangle$

Damit existiert ein eindeutiger Zusammenhang

$$A \in L(V) \rightsquigarrow \text{differenzierbare 1-Parametergruppe } \Phi^t \text{ in } L(V).$$

Diesen werden wir im nächsten Kapitel auf n -dimensionale *nichtlineare* Differenzialgleichungen verallgemeinern.

■ Determinante und Spur

Die *Determinante* und die *Spur* eines Operators $A \in L(V)$ sind definiert als die Determinante und Spur einer beliebigen Matrixdarstellung von A . Dies ist *unabhängig* von der Wahl der Matrixdarstellung, denn für Matrizen gilt ja

$$\det(AB) = \det(BA), \quad \text{sp}(AB) = \text{sp}(BA).$$

Sind B und C zwei Matrixdarstellung von A , so ist $C = T^{-1}BT$ mit einem geeigneten T und damit beispielsweise

$$\text{sp}(C) = \text{sp}(T^{-1}BT) = \text{sp}(BTT^{-1}) = \text{sp}(B).$$

Also sind Determinante und Spur unabhängig von der Koordinatenwahl.

Für die Determinante einer 1-Parametergruppe $t \mapsto e^{At}$ gilt eine nützliche Differenzialgleichung.

Lemma Für $A \in L(V)$ gilt $(\det e^{At})'|_{t=0} = \text{sp } A$. \times

⟨⟨⟨ Es ist

$$e^{At} = I + tA(t), \quad A(t) = \sum_{k \geq 1} \frac{t^{k-1}}{k!} A^k.$$

In einer beliebigen Basis erhält dies eine Spaltenvektordarstellung

$$e^{At} = [I_1 + tA_1(t), \dots, I_n + tA_n(t)],$$

wobei A_i die i -te Spalte der Matrix A bezeichnet. Mit der Linearität der Determinante in jeder Spalte folgt hieraus

$$\begin{aligned} \det e^{At} &= \det [I_1 + tA_1(t), \dots, I_n + tA_n(t)] \\ &= \det I + t \sum_{1 \leq i \leq n} \det [I_1, \dots, A_i(t), \dots, I_n] + O(t^2), \end{aligned}$$

wobei $A_i(t)$ in der i -ten Spalte der Matrix steht. Also ist

$$\det e^{At} = 1 + t \sum_{1 \leq i \leq n} A_{ii}(t) + O(t^2) = 1 + t \text{sp } A + O(t^2).$$

Das ergibt die Behauptung. $\rangle\rangle\rangle$

6 Satz von Liouville Für $A \in L(V)$ gilt

$$(\det e^{At})' = \operatorname{sp}(A) \det e^{At}$$

und damit auch $\det e^{At} = e^{\operatorname{sp}(A)t}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. \times

⟨⟨⟨ Für die skalare Funktion $d(t) = \det e^{At}$ gilt

$$\begin{aligned} d(s+t) &= \det(e^{A(s+t)}) \\ &= \det(e^{As} e^{At}) \\ &= \det(e^{As}) \det(e^{At}) = d(s)d(t). \end{aligned}$$

Mit dem vorangehenden Lemma gilt deshalb

$$d(t)' = \left. \frac{d}{ds} d(s+t) \right|_{s=0} = \left. \frac{d}{ds} d(s) \right|_{s=0} d(t) = \operatorname{sp}(A)d(t).$$

Dies ist die erste Behauptung. Die zweite folgt hieraus mit $d(0) = 1$. $\rangle\rangle\rangle$

Die Bedeutung des Satzes von Liouville liegt in der geometrischen Interpretation von e^{At} als Zeit- t -Abbildung der Differenzialgleichung $\dot{x} = Ax$. Die Determinante einer linearen Abbildung ist derjenige Faktor, mit dem das Volumen jedes Körpers unter dieser Abbildung multipliziert wird. Der Satz von Liouville besagt also, dass die Zeit- t -Abbildung einer linearen Differenzialgleichung das Volumen jedes beliebigen Körpers mit dem Faktor $\exp(\operatorname{sp} At)$ multipliziert. — Ein Spezialfall ist folgendes

Korollar Die 1-Parametergruppe e^{At} ist *volumenerhaltend* genau dann, wenn die Spur von A verschwindet. \times

Bei zweidimensionalen Systemen spricht man auch von *flächentreuen* Abbildungen.

■ Koordinatentransformationen

Bis hierhin betrachteten wir linearen Differenzialgleichungen ohne Bezug zu konkreten Koordinaten. Erst wenn wir in einem Vektorraum V der Dimension n eine Basis v_1, \dots, v_n und damit Koordinaten $x = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$ auszeichnen, wird A durch eine $n \times n$ -Matrix (A_{ij}) dargestellt, und wir erhalten

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j, \quad 1 \leq i \leq n,$$

genannt ein *System von n homogenen linearen Differenzialgleichungen erster Ordnung mit konstanten reellen Koeffizienten*.

Wählen wir eine andere Basis, so erhalten wir natürlich eine andere solche Darstellung

$$\dot{y}_i = \sum_{j=1}^n B_{ij} y_j, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Diese hängt mit der vorangehenden in folgender Weise zusammen.

Der Zusammenhang zwischen den beiden Koordinatensystemen ist gegeben durch einen linearen Isomorphismus

$$T: V \rightarrow V, \quad x = Ty.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} T\dot{y} &= TB y \\ &= (Ty)' = \dot{x} = Ax = ATy. \end{aligned}$$

Also ist $TB = AT$, oder

$$B = T^{-1}AT.$$

Bemerkung Die allgemeine Lösung im B -System ist

$$y(t) = e^{Bt} y_0.$$

Mit $x = Ty$ ist die allgemeine Lösung im A -System damit

$$\begin{aligned} x(t) = Ty(t) &= T e^{Bt} y_0 \\ &= T e^{Bt} T^{-1} x_0 \\ &= e^{TBT^{-1}t} x_0 \\ &= e^{At} x_0 \end{aligned}$$

wie es sich gehört. \rightarrow

Geometrisch betrachtet bildet T Lösungen im B -System in Lösungen im A -System ab. Kennen wir das *Phasenportrait*, also die Gesamtheit aller Lösungen der Differenzialgleichung, im B -System, so kennen wir bis auf einen linearen Isomorphismus somit auch im A -System.

Eine lineare Differenzialgleichung versteht man natürlich am leichtesten, wenn man sie in Koordinaten betrachtet, in denen sie eine besonders einfache Form annimmt. Dies wird hier die sogenannte *SN-Zerlegung* sein – eine einfachere Version der jordanischen Normalform –, die wir in Abschnitt 6 betrachten. Zunächst betrachten wir den besonders übersichtlichen, aber wichtigen Spezialfall zweidimensionaler Systeme.

16.3 Zweidimensionale lineare Systeme

Das Phasenportrait zweidimensionaler linearer Differenzialgleichungen wird fast ausschließlich durch die beiden Eigenwerte des linearen Operators bestimmt. Diese können (i) reell und einfach, (ii) reell und doppelt, oder (iii) komplex konjugiert sein. Im Fall doppelter Eigenwerte ist noch zu unterscheiden, ob A diagonalisierbar ist oder nicht.

Der Nullpunkt ist immer ein *Gleichgewichtspunkt* jeder linearen Differenzialgleichung. Das heißt, die konstante Kurve $\varphi \equiv 0$ ist immer eine Lösung, genannt *Gleichgewichtslösung*. Uns interessiert auch noch die Frage, welche anderen Lösungen für $t \rightarrow \infty$ oder $t \rightarrow -\infty$ gegen diesen Gleichgewichtspunkt konvergieren.

■ Einfache reelle Eigenwerte

In diesem Fall ist A ein Diagonaloperator. In geeigneten Koordinaten ist

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

mit den beiden Eigenwerten λ und μ . Die allgemeine Lösung von $\dot{x} = Ax$ lautet

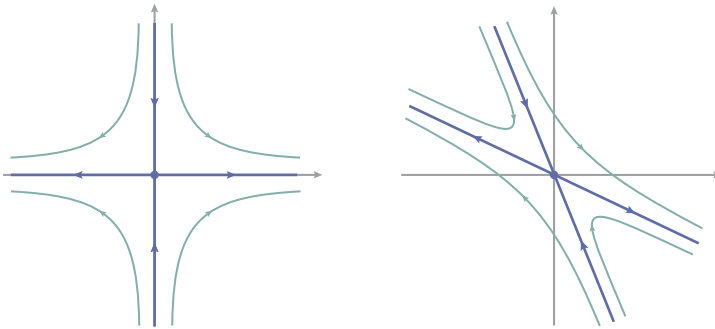
$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Das *Phasenportrait* hängt von der Lage der Eigenwerte auf der reellen Achse ab. Gilt $\lambda\mu < 0$, so spricht man von einem *Sattel*. Es gibt je eine Richtung – die Abszisse und die Ordinate – in denen die Lösungen für $t \rightarrow \infty$ respektive $t \rightarrow -\infty$ gegen den Gleichgewichtspunkt 0 konvergieren. Alle anderen Lösungen sind unbeschränkt. In allgemeinen Koordinaten gilt daher folgender Satz.

Sattel *Hat A reelle Eigenwerte $\mu < 0 < \lambda$, so konvergieren die Lösungen im μ -Eigenraum für $t \rightarrow \infty$ und im λ -Eigenraum für $t \rightarrow -\infty$ gegen den Gleichgewichtspunkt 0 . Alle anderen Lösungen sind für $t \rightarrow \pm\infty$ unbeschränkt. ✕*

Sind beide Eigenwerte negativ, so spricht man von einem *stabilen Knoten*. Alle Lösungen konvergieren für $t \rightarrow \infty$ gegen den Gleichgewichtspunkt 0 , wobei für $\mu < \lambda < 0$ alle Lösungen außerhalb des μ -Eigenraumes tangential zum λ -Eigenraum gegen den Gleichgewichtspunkt konvergieren. Dies ist auch das Bild in allgemeinen Koordinaten.

Abb 1 Sattelpunkt in angepassten und allgemeinen Koordinaten



Stabiler Knoten Hat A die reellen Eigenwerte $\mu < \lambda < 0$, so konvergieren alle Lösungen für $t \rightarrow \infty$ gegen den Gleichgewichtspunkt 0 , wobei außerhalb des μ -Eigenraumes alle Lösungen tangential zum λ -Eigenraum konvergieren. \times

Sind beide Eigenwerte positiv, so spricht man von einem *instabilen Knoten*. Es gelten analoge Konvergenzaussagen, wenn man $t \rightarrow -\infty$ statt $t \rightarrow \infty$ betrachtet. Der Fall $\mu < 0 = \lambda$ ist in Abbildung 3 skizziert.

■ Doppelte Eigenwerte

Diesen Fall nennt man *entartet*. Man sieht dem Operator sofort an, ob er diagonalisierbar ist oder nicht.

Abb 2 Stabiler Knoten in angepassten und allgemeinen Koordinaten

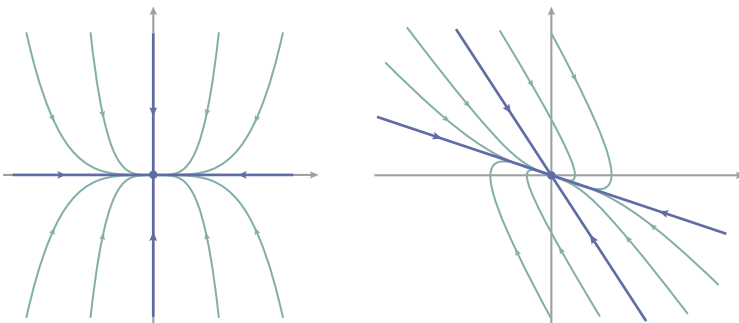
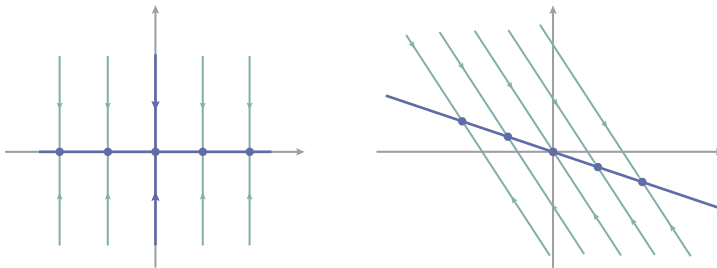


Abb 3 Eigenwerte $\mu < 0 = \lambda$ 

Lemma Sei A ein zweidimensionaler Operator mit doppelten Eigenwert. Ist A diagonalisierbar, so hat A in jeder Basis Diagonalgestalt. \times

⟨⟨⟨ In diesem Fall existiert ein T mit

$$T^{-1}AT = \lambda I.$$

Dann ist aber auch $A = T\lambda IT^{-1} = \lambda TT^{-1} = \lambda I$. Mit anderen Worten, A ist ein Vielfaches der Identität, und diese hat Diagonalgestalt in jeder Basis. $\rangle\rangle\rangle$

A ist ein Diagonaloperator Für $\lambda < 0$ spricht man von einem *entarteten stabilen Knoten*. Alle Lösungen konvergieren gegen den Gleichgewichtspunkt 0 , und sämtliche Lösungskurven sind Geraden – siehe Abbildung 4. Entsprechendes gilt für $\lambda > 0$, dem *entarteten instabilen Knoten*.

A ist ein Jordanblock In geeigneten Koordinaten ist

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + N, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da I und N kommutieren und N^2 verschwindet, ist

Abb 4 Entarteter stabiler Knoten, diagonalisierbar

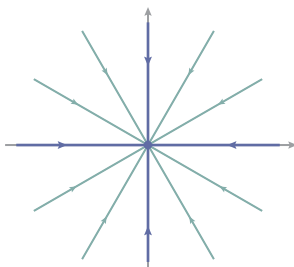
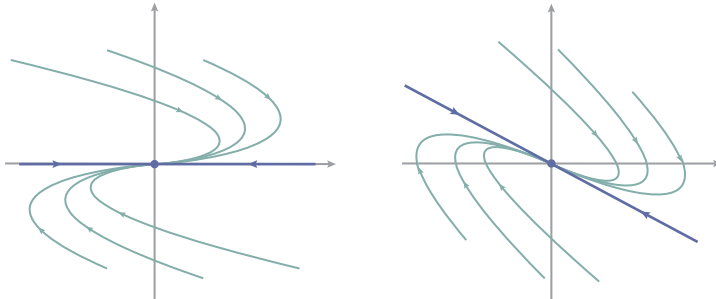


Abb 5 Entarteter stabiler Knoten, nicht diagonalisierbar



$$e^{At} = e^{\lambda t} e^{Nt} = e^{\lambda t} (I + Nt) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung ist damit

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} a + bt \\ b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Alle Lösungskurven sind dabei im Gleichgewichtspunkt tangential an die Abszisse, also den eindimensionalen Eigenraum des doppelten Eigenwerts. Man spricht ebenfalls von einem *entarteten Knoten* – siehe Abbildung 5.

Entarteter stabiler Knoten Hat A doppelte reelle Eigenwerte $\lambda < 0$ und Diagonalgestalt, so konvergieren alle Lösungen für $t \rightarrow \infty$ aus allen Richtungen geradlinig gegen den Gleichgewichtspunkt 0 . Hat A dagegen keine Diagonalgestalt, so konvergieren diese tangential zum eindimensionalen λ -Eigenraum gegen den Gleichgewichtspunkt 0 . — Für $\lambda > 0$ gilt Entsprechendes für $t \rightarrow -\infty$. \times

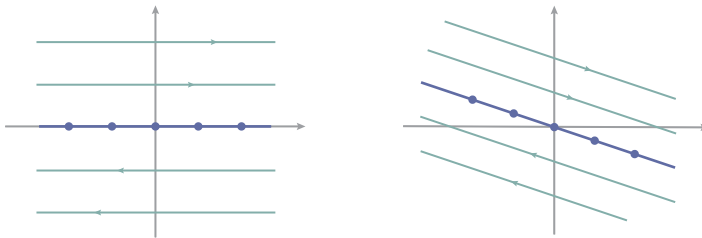
Der Fall eines nichtdiagonalisierbaren Operators mit doppeltem Eigenwert 0 ist in Abbildung 6 skizziert.

Die verschiedenen Knoten kann man somit geometrisch anhand der Anzahl der asymptotischen Richtungen ihrer Lösungskurven unterscheiden. Diese ist

$$\begin{array}{lll} 2 & \text{für} & \lambda \neq \mu, \\ \infty & \text{für} & \lambda = \mu, A = \lambda I, \\ 1 & \text{für} & \lambda = \mu, A \neq \lambda I. \end{array}$$

Die Anzahl 2 gilt im Prinzip auch für den Sattel, nur dass hier fast alle Lösungen weder für $t \rightarrow \infty$ noch für $t \rightarrow -\infty$ konvergieren.

Abb 6 Entarteter Knoten mit Eigenwert 0



■ Komplexe Eigenwerte

Ein zweidimensionaler reeller Operator mit nicht-reellen Eigenwerten kann in folgende *reelle Normalform* gebracht werden.

- 7 **Lemma** *Hat der Operator A komplex konjugierte Eigenwerte $\alpha \pm i\omega$, so erhält A in geeigneten Koordinaten die Gestalt*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} = \alpha I + \omega J, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad \times$$

⋈⋈⋈ Zum Eigenwert $\alpha + i\omega$ existiert ein Eigenvektor $v + iu$, so dass

$$A(v + iu) = (\alpha + i\omega)(v + iu) = (\alpha v - \omega u) + i(\omega v + \alpha u).$$

Somit ist

$$Au = \alpha u + \omega v,$$

$$Av = -\omega u + \alpha v.$$

Für die Matrix $T = [u, v]$ mit den Spalten u und v gilt somit

$$AT = A[u, v] = [u, v] \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix}.$$

In der reellen Basis (u, v) erhält A daher die angegebene Gestalt. ⋈⋈⋈

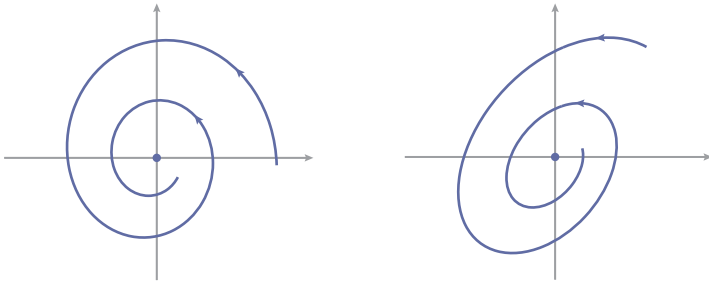
Lemma *Für die Matrix A des vorangehenden Lemmas gilt*

$$e^{At} = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\sin \omega t \\ \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}. \quad \times$$

⋈⋈⋈ Es ist $e^{At} = e^{\alpha t + i\omega Jt} = e^{\alpha t} e^{i\omega Jt}$, und die Behauptung folgt mit A-9

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}. \quad \gggg$$

Abb 7 Stabiler Strudel in angepassten und allgemeinen Koordinaten



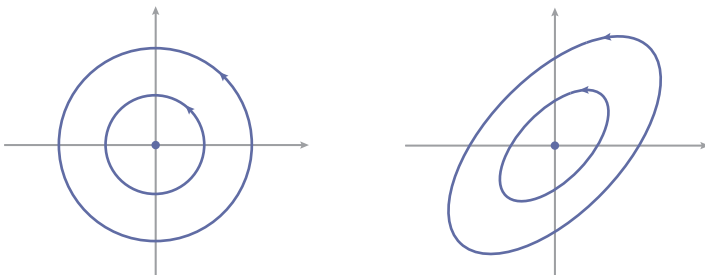
Die Abbildung e^{At} beschreibt eine Streckung um den Faktor $e^{\alpha t}$ und eine Drehung um den Winkel ωt . Es handelt sich also um eine *Drehstreckung*. Diese beiden Operationen kommutieren, so dass auf deren Reihenfolge nicht ankommt. Das Phasenportrait ist ein *Strudel* oder ein *Zentrum*.

Strudel und Zentrum Hat A nichtreelle Eigenwerte $\alpha \pm i\omega$, so ist die 1-Parametergruppe e^{At} eine Familie von Drehstreckungen mit dem Faktor $e^{\alpha t}$ und dem Winkel ωt . Man spricht von einem *Zentrum*, falls $\alpha = 0$, und einem *stabilen* respektive *instabilen Strudel*, falls $\alpha < 0$ respektive $\alpha > 0$. \times

In einem stabilen Strudel konvergieren alle Lösungen gegen den Gleichgewichtspunkt, *ohne* eine asymptotische Richtung einzunehmen. Dies unterscheidet ihn vom stabilen Knoten.

Das Zentrum ist unter den zweidimensionalen linearen Systemen das *einzige* mit nichttrivialen periodischen Lösungen. Außerdem haben alle Lösungen *dieselbe* Periode $T = 2\pi/\omega$. Dies ist charakteristisch für *lineare* Systeme. In nichtlinearen Systemen wie dem mathematischen Pendel variiert dagegen die Periode periodischer Lösungen mit deren Amplitude.

Abb 8 Zentrum in angepassten und allgemeinen Koordinaten



■ Klassifikation zweidimensionaler Systeme

Wir klassifizieren die zweidimensionalen Systeme anhand ihrer Determinante und Spur. Das charakteristische Polynom eines zweidimensionalen Operators A ist

$$p(\lambda) = \lambda^2 - s\lambda + d, \quad s = \text{sp } A, \quad d = \det A,$$

wie man anhand einer beliebigen Matrixdarstellung verifiziert. Seine Eigenwerte sind somit

$$\lambda_{\pm} = \frac{s \pm \sqrt{s^2 - 4d}}{2}.$$

Dies führt zu folgender Fallunterscheidung.

Determinante negativ: Dann sind beide Eigenwerte reell mit verschiedenen Vorzeichen, und es liegt ein Sattel vor:

$$\det A < 0 \rightsquigarrow \text{Sattel.}$$

Determinante nicht negativ: Hier entscheidet die *Diskriminante* $\Delta = s^2 - 4d$:

$$\Delta > 0 \rightsquigarrow \text{Knoten,}$$

$$\Delta = 0 \rightsquigarrow \text{entarteter Knoten,}$$

$$\Delta < 0 \rightsquigarrow \text{Strudel oder Zentrum.}$$

Außerdem bestimmt das Vorzeichen der Spur von A die Stabilität:

$$\text{sp } A < 0 \rightsquigarrow \text{stabil,}$$

$$\text{sp } A > 0 \rightsquigarrow \text{instabil.}$$

Abbildung 9 zeigt diese Fälle in einem Spur-Determinante-Diagramm, zusammen mit der zugehörigen Konfiguration der beiden Eigenwerte. Die Kurve

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow d = s^2/4$$

ist eine Parabel, die Knoten und Sattel von Strudeln und Zentren trennt. Sie ist der Ort der entarteten Knoten, wobei deren Typ – diagonalisierbar oder nicht – nicht von Spur und Determinante ablesbar ist.

Die Fälle

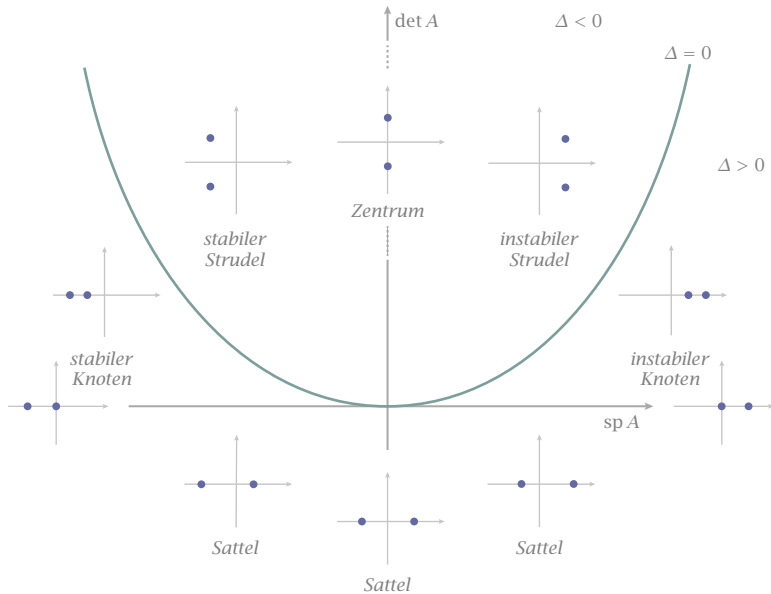
$$\det A = 0 \rightsquigarrow A \text{ singularär,}$$

$$\Delta = 0 \rightsquigarrow \text{doppelte Eigenwerte,}$$

$$\text{sp } A = 0 \rightsquigarrow \text{Fluss flächentreu}$$

sind ›untypisch‹ und treten in einem ›allgemeinen‹ System nicht auf.

Abb 9 Spur-Determinante-Diagramm



■ Der harmonische Oszillator mit Dämpfung

Als Beispiel betrachten wir den harmonischen Oszillator mit Dämpfung. Er wird durch die Gleichung

$$\ddot{u} = -\omega^2 u - \rho \dot{u}$$

beschrieben. Hierbei ist $\omega > 0$ die Frequenz des ungedämpften Oszillators und $\rho \geq 0$ der Reibungskoeffizient der Dämpfung. Diese ist proportional zur Geschwindigkeit \dot{u} und wirkt dieser entgegengesetzt.

Setzen wir

$$x_1 = u, \quad x_2 = \dot{u},$$

so ist die Gleichung äquivalent zum System

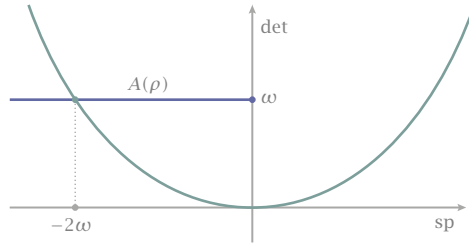
$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\rho \end{pmatrix}.$$

Es ist also

$$d = \omega^2 > 0, \quad s = -\rho \leq 0, \quad \Delta = \rho^2 - 4\omega^2.$$

Insbesondere ist $\Delta = 0$ genau dann, wenn $\rho = 2\omega$.

Abb 10

Die Familie $A(\rho)$ 

Betrachten wir die Frequenz ω als fest und den Reibungskoeffizienten ρ als Parameter, so erhalten wir eine Familie von Operatoren $A = A(\rho)$, die im Spur-Determinante-Diagramm eine horizontale Halbgerade beschreiben, die die Parabel $\Delta = 0$ im Punkt $(-2\omega, \omega)$ schneidet und im Punkt $(0, \omega)$ endet. Dabei treten vier Fälle auf.

Stabiler Knoten für $\rho > 2\omega$ Fast alle Lösungen konvergieren gegen die Gleichgewichtslage in der Richtung des Eigenraumes des größeren der beiden negativen Eigenwerte, wobei sie höchstens einmal die Richtung wechseln – siehe Abbildung 11 links.

Entarteter stabiler Knoten für $\rho = 2\omega$ Da A kein Diagonaloperator ist, konvergieren alle Lösungen in der Richtung des eindimensionalen Eigenraumes von A gegen 0. Dieser wird von dem Vektor $(1, -1)^\top$ aufgespannt – siehe Abbildung 11 rechts.

Stabiler Strudel für $0 < \rho < 2\omega$ Man spricht von *gedämpften Schwingungen*. Der Oszillator schwingt mit immer kleineren Ausschlägen unendlich oft um die Gleichgewichtslage. Abbildung 12 links zeigt Lösungen für *verschiedene* ρ .

Abb 11 Stark gedämpfter Oszillator: stabiler und entarteter Knoten

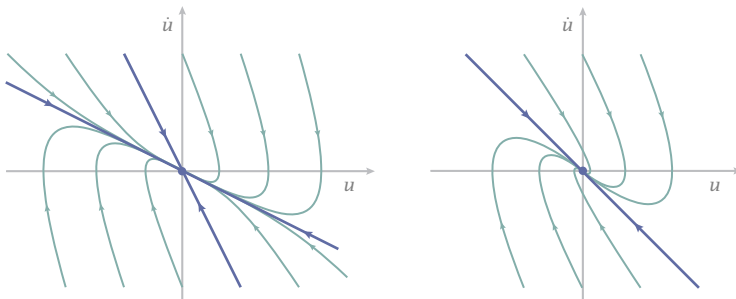
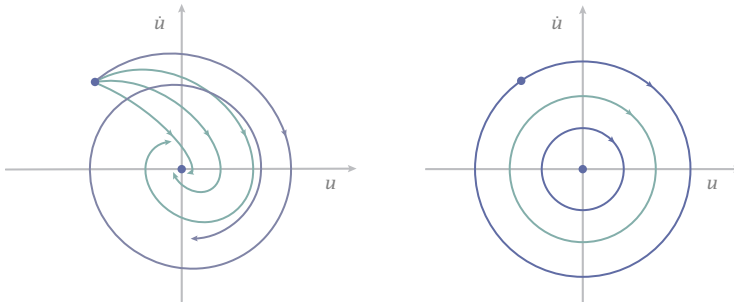


Abb 12 Gedämpfte und ungedämpfte Schwingungen: Strudel und Zentrum



Zentrum für $\rho = 0$ Man spricht von *ungedämpften Schwingungen*. Alle Lösungen sind periodisch mit Frequenz ω und Periode $T = 2\pi/\omega$. Siehe Abbildung 12 rechts.

Im Fall der gedämpften Schwingung sind die Eigenwerte $\alpha \pm i\mu$ mit

$$\alpha = -\rho/2, \quad \mu = \sqrt{\omega^2 - \rho^2/4}.$$

Für die Auslenkung u des Oszillators erhält man

$$u(t) = ae^{\alpha t} \cos \mu t + be^{\alpha t} \sin \mu t = re^{\alpha t} \cos(\mu t + \tau)$$

mit

$$r^2 = a^2 + b^2, \quad \cos \tau = \frac{a}{a^2 + b^2}.$$

Man nennt μ die *reduzierte Frequenz* des gedämpften Oszillators. Für die zugehörige Periode gilt

$$T = \frac{2\pi}{\mu} \rightarrow \begin{cases} \infty, & \rho \nearrow 2\omega, \\ \frac{2\pi}{\omega}, & \rho \searrow 0. \end{cases}$$

16.4

Fundamentallösungen

Etwas allgemeiner und flexibler als das Exponential e^{At} ist der Begriff der *Fundamentallösung* - vor allem im Hinblick auf das manuelle Lösen von Differentialgleichungen. Der Vektorraum V habe im Folgenden endliche Dimension.

Definition Sei $n = \dim V$. Dann heißt jedes System $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ von n linear unabhängigen Lösungen von $\dot{x} = Ax$ eine **Fundamentallösung** dieser Differentialgleichung. \times

Dabei genügt es zu verlangen, dass diese Lösungen nur in *einem* Zeitpunkt linear unabhängig sind:

- 8 **Lemma** Sind die Lösungen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ von $\dot{x} = Ax$ zu einem Zeitpunkt t_0 linear unabhängig, so sind sie es auch zu jedem anderem Zeitpunkt t . \times

⟨⟨⟨ Sind die $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ bei t_0 linear abhängig, so verschwindet dort eine nichttriviale Linearkombination aus ihnen. Diese stellt eine Lösung von $\dot{x} = Ax$ mit Wert 0 bei t_0 dar. Aufgrund der Eindeutigkeit aller Lösungen ist diese *identisch* 0. Also sind die $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ zu jedem Zeitpunkt t linear abhängig. ⟩⟩⟩

- 9 **Satz** Jede Lösung von $\dot{x} = Ax$ ist Linearkombination der Lösungen eines Fundamentalsystems $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. \times

⟨⟨⟨ Jede Lösung φ ist eindeutig durch ihren Anfangswert bei $t = 0$ bestimmt. Dieser lässt sich als Linearkombination aus $\varphi_1(0), \dots, \varphi_n(0)$ darstellen:

$$\varphi(0) = a_1\varphi_1(0) + \dots + a_n\varphi_n(0).$$

Aus Eindeutigkeitsgründen gilt dann auch $\varphi(t) = a_1\varphi_1(t) + \dots + a_n\varphi_n(t)$ zu jedem anderen Zeitpunkt t . ⟩⟩⟩

Kandidaten für eine Fundamentallösung von $\dot{x} = Ax$ findet man mithilfe der Eigenvektoren von A . Das folgende Lemma gilt im Reellen wie im Komplexen. Der Beweis ist eine einzeilige Rechnung.

- 10 **Lemma** Ist v Eigenvektor von A zum Eigenwert λ , so ist

$$ve^{\lambda t}$$

eine Lösung der linearen Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$. \times

Geometrisch betrachtet spannt der Eigenvektor v einen unter A invarianten Unterraum auf, in dem sich A auf eine Multiplikation mit λ und die Differentialgleichung auf $\dot{x} = \lambda x$ reduziert. Ist λ reell, so ist dies ein eindimensionaler reeller Unterraum.

Besitzt A reelle, linear unabhängige Eigenvektoren v_1, \dots, v_m zu reellen, nicht notwendig verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, so erhält man entsprechend m linear unabhängige Lösungen von $\dot{x} = Ax$. — Betrachten wir nun den Fall eines komplexen Eigenwertes.

- 11 **Lemma** *Besitzt A den komplexen Eigenwert $\lambda = \alpha + i\omega$ mit Eigenvektor $w = v + iu$, so bilden die zwei Spalten von*

$$[u, v] e^{At}, \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix},$$

also

$$(u \cos \omega t + v \sin \omega t) e^{\alpha t}, \quad (v \cos \omega t - u \sin \omega t) e^{\alpha t},$$

zwei linear unabhängige Lösungen von $\dot{x} = Ax$. \times

◀◀◀ Wie im zweidimensionalen Fall γ gilt

$$A(v + iu) = (\alpha + i\omega)(v + iu) = (\alpha v - \omega u) + i(\omega v + \alpha u)$$

und somit $Au = \alpha u + \omega v$ und $Av = -\omega u + \alpha v$. Für die Matrix $T = [u, v]$ mit den zwei Spalten u und v gilt somit die Identität

$$AT = T\Lambda,$$

Daraus folgt,

$$(Te^{At})' = T\Lambda e^{At} = ATe^{At},$$

und Te^{At} ist eine Matrixlösung der Differenzialgleichung. Die Vektoren u und v sind linear unabhängig, da es andernfalls auch einen reellen Eigenvektor zu λ gäbe und damit λ selbst reell wäre. \gggg

Die Vektoren u und v spannen einen unter A invarianten, zweidimensionalen Unterraum von V auf, auf dem A die Matrixdarstellung Λ erhält. Dieser Unterraum wird also von einem Strudel oder Zentrum ausgefüllt, je nachdem, ob $\alpha \neq 0$ oder $\alpha = 0$.

Der zu λ konjugierte Eigenwert $\alpha - i\omega$ mit Eigenvektor $v - iu$ definiert übrigens denselben Unterraum und dieselbe Dynamik, allerdings mit entgegengesetzter Orientierung.

Genau wie ein komplexer Eigenwert wird der Fall eines reellen Eigenwertes mit Jordanblock behandelt. Wir betrachten hier nur den einfachsten Fall.

Lemma *Besitzt A den reellen Eigenwert λ mit Eigenvektor v und Nebenvektor w , so bilden die zwei Spalten von*

$$[v, w] e^{Lt}, \quad L = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix},$$

also

$$e^{\lambda t} v, \quad e^{\lambda t} (w + tv),$$

zwei linear unabhängige Lösungen von $\dot{x} = Ax$. \times

«««« Gemäß Annahme gilt

$$Av = \lambda v,$$

$$Aw = \lambda w + v.$$

Für die $n \times 2$ -Matrix $T = [v, w]$ und L wie im Lemma gilt also

$$AT = TL.$$

Somit ist Te^{Lt} eine Matrixlösung der Differenzialgleichung, denn

$$(Te^{Lt})' = T\Lambda e^{Lt} = ATe^{Lt}.$$

Die Vektoren v und w sind linear unabhängig, denn wir verlangen ja, dass w ein Nebenvektor ist. »»»»

► *Erstes Beispiel* Betrachte $\dot{x} = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte sind 1 und $2 \pm 3i$, Eigenvektoren sind beispielsweise

$$w = (-10, 3, 1),$$

$$v + iu = (0, -i, 1) = (0, 0, 1) + i(0, -1, 0).$$

Ein Fundamentalsystem ist demnach

$$we^t, \quad (u \cos 3t + v \sin 3t)e^{2t}, \quad (v \cos 3t - u \sin 3t)e^{2t}.$$

In der reellen Basis w, v, u erhält A durch

$$x = Ty, \quad T = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

die Blockdiagonalgestalt

$$T^{-1}AT = B = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & -3 \\ & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

und es ist

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^t & & \\ & e^{2t} \cos 3t & -e^{2t} \sin 3t \\ & e^{2t} \sin 3t & e^{2t} \cos 3t \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleleft$$

► *Zweites Beispiel* Betrachte $\dot{x} = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A bereits in Jordanscher Normalform. Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = 1$ mit Eigenvektor $v_1 = e_1$ und Nebenvektor $v_2 = e_2$ sowie $\lambda = 3 = 2$ mit Eigenvektor $v_3 = e_3$. Ein Fundamentalsystem ist demnach

$$e_1 e^t, \quad (e_2 + t e_1) e^t, \quad e_3 e^{2t}. \quad \blacktriangleleft$$

16.5

Diagonalisierbare Gleichungen

Wir betrachten nun $\dot{x} = Ax$ in einem Vektorraum beliebiger endlicher Dimension. Am einfachsten ist die Situation, wenn A in einer geeigneten Basis Diagonalgestalt annimmt, oder, wie man sagt, *im Reellen diagonalisiert werden kann*.

- 12 **Satz aus der linearen Algebra** *Sind alle Eigenwerte von $A \in L(V)$ reell und einfach, so besitzt der Vektorraum V eine Basis aus Eigenvektoren von A . In dieser nimmt A Diagonalgestalt an. Dasselbe gilt, wenn A normal bezüglich eines Skalarproduktes ist.* \times

Ist v_1, \dots, v_n eine Basis aus Eigenvektoren von A zu den reellen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so bilden die Kurven

$$\varphi_k(t) = v_k e^{\lambda_k t}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen. Da sich jede andere Lösung daraus linear kombinieren lässt, erhalten wir folgenden

- 13 **Satz** *Besitzt V eine Basis aus reellen Eigenvektoren v_1, \dots, v_n von A mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, so hat die allgemeine Lösung von $\dot{x} = Ax$ die Gestalt*

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^n a_k v_k e^{\lambda_k t}, \quad a_k \in \mathbb{R}. \quad \times \tag{3}$$

Die allgemeine Lösung ist somit die Überlagerung von n Exponentiallösungen in den durch die einzelnen Eigenvektoren aufgespannten eindimensionalen invarianten Unterräumen. Dies wird auch als *Superpositionsprinzip* bezeichnet. Beispiele sind der Sattel und die Knoten aus Abschnitt 3.

Bemerkung Unter den Voraussetzungen des Satzes existiert auch eine Koordinatentransformation T , so dass

$$T^{-1}AT = D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

Wegen $AT = TD$ bestehen die Spalten der Matrixdarstellung von T aus den Eigenvektoren von A . Die allgemeine Lösung von $\dot{x} = Ax$ ist damit

$$\varphi(t) = T e^{Dt} c, \quad c = (c_1, \dots, c_n)^\top \in \mathbb{R}^n.$$

Dies ist nur eine andere Schreibweise für (3). \rightarrow

Satz aus der linearen Algebra Sind alle Eigenwerte

$$\lambda_1, \dots, \lambda_r, \alpha_{r+1} \pm i\omega_{r+1}, \dots, \alpha_m \pm i\omega_m$$

von A einfach mit Eigenvektoren v_k respektive $w_k = v_k + iu_k$, so bilden die Vektoren

$$v_1, \dots, v_r, u_{r+1}, v_{r+1}, \dots, u_m, v_m$$

eine reelle Basis des Vektorraums V . In dieser erhält der Operator die Blockdiagonalgestalt

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, \Lambda_{r+1}, \dots, \Lambda_m)$$

mit

$$\Lambda_k = \begin{pmatrix} \alpha_k & -\omega_k \\ \omega_k & \alpha_k \end{pmatrix}, \quad r < k \leq m.$$

Dasselbe gilt, wenn A normal bezüglich eines Skalarproduktes ist. \times

Bilden wir zu den reellen Eigenvektoren die Exponentiallösungen und zu den komplexen die Lösungen des Lemmas 11, so gelangen wir wieder zu einem Fundamentalsystem für $\dot{x} = Ax$. Das Ergebnis ist folgender

14 Satz Ist A im Komplexen diagonalisierbar mit Eigenwerten

$$\lambda_1, \dots, \lambda_r, \alpha_{r+1} \pm i\omega_{r+1}, \dots, \alpha_m \pm i\omega_m$$

und Eigenvektoren v_k respektive $w_k = v_k \pm iu_k$, so ist die allgemeine Lösung von $\dot{x} = Ax$ eine Linearkombination der Lösungen

$$v_k e^{\lambda_k t} v_k, \quad 1 \leq k \leq r,$$

sowie

$$v_k e^{\alpha_k t} \cos \omega_k t - u_k e^{\alpha_k t} \sin \omega_k t,$$

$$v_k e^{\alpha_k t} \sin \omega_k t + u_k e^{\alpha_k t} \cos \omega_k t,$$

für $r + 1 \leq k \leq m$. \times

Die allgemeine Lösung ist damit die ungestörte Überlagerung der Exponentiallösungen zu den reellen Eigenwerten, und der Strudel- oder Zentrumslösungen zu Paaren komplexer Eigenwerte. Damit lassen sich qualitativ die Lösungen fast aller drei- und vierdimensionalen linearen Differenzialgleichungen beschreiben.

■ Kleine Schwingungen

Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Ein symmetrischer Operator $Q \in L(V)$ definiert eine *quadratische Form* U auf V durch

$$U(x) = \frac{1}{2} \langle Qx, x \rangle.$$

Betrachten wir U als Potential eines Kraftfeldes, so beschreiben die newtonschen Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x} = -\text{grad } U = -Qx$$

die Bewegung eines Masseteilchen im Raum V unter dem Einfluss dieses Potentials. Anschaulich handelt es sich um die reibungsfreie Bewegung einer Massekugel auf der durch den Graphen von U definierten Fläche.

Als symmetrischer Operator besitzt Q nur reelle Eigenwerte. Wir nehmen außerdem an, dass Q regulär ist und damit keinen Eigenwert 0 besitzt – man nennt diesen Fall *nichtentartet*. Wir notieren die Eigenwerte als

$$-\alpha_1^2 \leq \dots \leq -\alpha_r^2 < 0 < \omega_{r+1}^2 \leq \dots \leq \omega_n^2$$

mit einem gewissen $0 \leq r \leq n$. Im Fall $r = 0$ ist U positiv definit, im Fall $r = n$ negativ definit.

Satz Sei $Q \in L(V)$ symmetrisch und nichtentartet mit obigen Eigenwerten.

Dann existiert eine orthonormale Basis v_1, \dots, v_n aus Eigenvektoren von Q , so dass die allgemeine Lösung von $\ddot{x} = -Qx$ gegeben ist durch

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^r (a_k e^{\alpha_k t} + b_k e^{-\alpha_k t}) v_k + \sum_{k=r+1}^n a_k \cos(\omega_k t + b_k) v_k$$

mit reellen Koeffizienten a_k, b_k , $1 \leq k \leq n$. ✕

⋘⋘⋘⋘ Aufgrund der Symmetrie von Q besitzt V eine Basis aus reellen orthonormalen Eigenvektoren v_1, \dots, v_n mit Eigenwerten $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. In dieser Basis erhält die quadratische Form die Gestalt

$$U(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2.$$

Wir erhalten n *ungekoppelte* lineare Differenzialgleichungen zweiter Ordnung

$$\ddot{x}_k = -\lambda_k x_k, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Die allgemeine Lösung von $\ddot{x} = -\lambda x$ ist nun

$$x(t) = \begin{cases} ae^{\alpha t} + be^{-\alpha t} & \text{für } \lambda = -\alpha^2 < 0, \\ a \cos(\omega t + b) & \text{für } \lambda = \omega^2 > 0, \end{cases}$$

mit reellen Koeffizienten a, b , wie man sofort verifiziert¹. Kombiniert mit den Basisvektoren erhält φ dann die angegebene Gestalt. \gggg

Korollar Ist Q symmetrisch und positiv definit mit Eigenwerten $\omega_1^2, \dots, \omega_n^2$, so ist die allgemeine Lösung von $\ddot{x} = -Qx$ die ungestörte Überlagerung von n Schwingungen in n paarweise orthogonalen Richtungen mit den Frequenzen $\omega_1, \dots, \omega_n$. \times

Man nennt die einzelnen Schwingungen auch die *Haupt-* oder *Eigenschwingungen* des Systems, und die ω_k ihre *Eigenfrequenzen*.

Bemerkung Der Bezeichnung ›kleine Schwingungen‹ stammt aus der klassischen Mechanik. Betrachte dazu die newtonschen Bewegungsgleichungen

$$\ddot{x} = -\text{grad } U(x)$$

für ein beliebiges Potential U . Einem kritischen Punkt von U entspricht ein Gleichgewichtspunkt dieser Differenzialgleichung. Legen wir diesen Punkt in den Ursprung und ignorieren eine irrelevante additive Konstante, so ist

$$U(x) = \frac{1}{2} \langle Qx, x \rangle + \hat{U}(x)$$

mit der Hessischen Q von U und Termen höherer Ordnung \hat{U} .

In einer hinreichend kleinen Umgebung von 0 können wir \hat{U} als kleine Störung des quadratischen Terms auffassen und in erster Näherung vernachlässigen. Ist Q positiv definit, so beschreibt dieses System also in erster Näherung *kleine Schwingungen* um den Gleichgewichtspunkt. Diese betrachten wir noch genauer in Abschnitt 7.

Den Term \hat{U} bewirkt nun eine schwache, nichtlineare Kopplung dieser Schwingungen. Die Störungstheorie solcher Systeme ist allerdings sehr kompliziert, da eine solche Kopplung zu Resonanzen und dem Effekt sogenannter ›Kleiner Nenner‹ führt. \rightsquigarrow

¹ Für $\lambda = 0$ ist $x(t) = at + b$, doch diesen Fall hatten wir ja ausgeschlossen.

16.6

Allgemeine Gleichungen

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall eines nicht diagonalisierbaren Operators A . Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass A im Komplexen in eine Blockdiagonalgestalt $\text{diag}(J_1, \dots, J_m)$ gebracht werden kann, die auf der Diagonalen aus elementaren Jordanblöcken besteht. Die Gestalt dieser *jordanschen Normalform* ist dabei bis auf die Anordnung der einzelnen Jordanblöcke eindeutig. Für unsere Zwecke ist diese Normalform allerdings zu detailliert. Es reicht die Existenz einer Zerlegung eines beliebigen Operators in einen halbeinfachen und einen nilpotenten Anteil.

Satz über die SN-Zerlegung Jeder Operator $A \in L(V)$ besitzt im Komplexen eine eindeutige Zerlegung in zwei Operatoren $A = S + N$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) S ist im Komplexen diagonalisierbar,
- (ii) N ist nilpotent, und
- (iii) S und N kommutieren: $SN = NS$. \times

Wir geben hier nur eine Skizze des Beweises. Ausgangspunkt ist der folgende Spektralzerlegungssatz. Dabei heißt eine Teilmenge von \mathbb{C} *invariant unter komplexer Konjugation*, wenn sie mit jedem Element auch dessen komplex konjugiertes enthält.

- 15 **Reeller Spektralzerlegungssatz** Sei $\sigma = \sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_m$ eine Zerlegung des Spektrums σ von $A \in L(V)$ in disjunkte, unter komplexer Konjugation invariante Teilmengen. Dann existiert eine unter A invariante Zerlegung $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ des Vektorraumes V derart, dass

$$\sigma(A|V_k) = \sigma_k, \quad 1 \leq k \leq m.$$

Dabei ist die Dimension von V_k gleich der Summe der Vielfachheiten der in σ_k enthaltenen Eigenwerte. Bezüglich dieser Zerlegung besitzt A die Blockdiagonalgestalt

$$A = \text{diag}(A_1, \dots, A_m) \tag{4}$$

mit $A_k := A|V_k$ für $1 \leq k \leq m$. \times

⟨⟨⟨⟨ *Beweisskizze zur SN-Zerlegung* Der Einfachheit halber seien alle Eigenwerte von A reell. Andernfalls betrachtet man zuerst A auf der Komplexifizierung von V und leitet aus der entsprechenden komplexen SN-Zerlegung die behauptete reelle Zerlegung ab. Die Details findet man zum Beispiel in HIRSCH-SMALE, Kapitel 6.

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die *verschiedenen* reellen Eigenwerte von A . Dann ₁₅ existiert eine Zerlegung $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$ derart, dass

$$\sigma(A_k) = \{\lambda_k\}, \quad A_k := A|_{V_k}, \quad k = 1, \dots, r.$$

Wir setzen dann

$$S_k := \lambda_k I, \quad N_k := A_k - S_k.$$

Dann ist S_k halbeinfach und $A_k = S_k + N_k$. Ferner ist N_k nilpotent, da

$$\sigma(N_k) = \sigma(A_k - \lambda_k I) = \{0\}.$$

Mit $S = S_1 \oplus \dots \oplus S_m$ und $N = N_1 \oplus \dots \oplus N_m$ erhalten wir dann eine SN -Zerlegung von A mit den gewünschten Eigenschaften.

Bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen. Da S und N mit $A = S + N$ kommutieren, sind die Unterräume V_k auch unter S und N invariant. Also gilt

$$S_k := S|_{V_k} : V_k \rightarrow V_k, \quad N_k := N|_{V_k} : V_k \rightarrow V_k,$$

sowie $A_k = S_k + N_k$. Wir behaupten, dass S_k auf V_k identisch ist mit $S'_k := \lambda_k I$. Setzen wir dazu $N'_k = A_k - S'_k$, so ist $S'_k + N'_k = A_k = S_k + N_k$ und damit

$$S_k - S'_k = N'_k - N_k.$$

Hierbei ist $S_k - S'_k$ halbeinfach, da jede Ähnlichkeitstransformation $S'_k = \lambda_k I$ unverändert lässt. Ferner ist N'_k nilpotent, da das Spektrum von N'_k nur die 0 enthält. Schließlich kommutieren N_k und N'_k , da N_k mit A_k und der Identität kommutiert. Aus der binomischen Formel für $(N'_k - N_k)^m$ mit m hinreichend groß folgt, dass dann auch $N'_k - N_k$ nilpotent ist.

Also ist $S_k - S'_k$ halbeinfach und nilpotent. Diese Eigenschaft hat aber nur der Nulloperator. Es ist also $S_k = S'_k$, und weiter $N'_k = N_k$. Da dies für jedes k gilt, ist die Eindeutigkeit der SN -Zerlegung gezeigt. \gggg

Bemerkung Die jordanische Normalform geht über die SN -Zerlegung hinaus, indem sie noch eine Aussage über die Normalform nilpotenter Operatoren macht. \rightarrow

Lemma Ist $A = S + N$ eine SN -Zerlegung von A mit $N^{m+1} = 0$, so gilt

$$e^A = e^S \left(1 + N + \dots + \frac{1}{m!} N^m \right). \quad \times$$

\llll Da S und N kommutieren, gilt $e^A = e^{S+N} = e^S e^N$. Wegen $N^{m+1} = 0$ bricht die Exponentialreihe von e^N spätestens nach dem m -ten Term ab. \gggg

Um die Gestalt der allgemeinen Lösung von $\dot{x} = Ax$ zu bestimmen, genügt es nun, jede Komponente $A_k = S_k + N_k$ der Zerlegung (4) einzeln zu betrachten.

Bezeichnet ν_k die Vielfachheit des k -ten Eigenwerts, so ist $N_k^{\nu_k} = 0$. Im reellen Fall folgt dies aus $\dim V_k = \nu_k$, im komplexen Fall aus der Tatsache, dass V_k aus der Reellifizierung zweier komplexer Unterräume der Dimension ν_k entsteht. Aufgrund des letzten Lemmas treten daher in e^{Akt} nur Polynome vom Grad kleiner ν_k auf.

Wir formulieren den reellen und komplexen Fall wieder getrennt. Ein *Quasipolynom* ist ein Produkt aus einer Exponentialfunktion und einem Polynom.

Reeller Fall *Der Operator $A \in L(V)$ habe nur reelle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ mit Vielfachheiten ν_1, \dots, ν_m . Dann ist in einer beliebigen Basis jede Komponente einer Lösung von $\dot{x} = Ax$ eine Linearkombination aus Quasipolynomen*

$$p_k(t)e^{\lambda_k t}, \quad 1 \leq k \leq m,$$

wobei $\text{grad } p_k < \nu_k$ für alle k . \times

Bemerkungen a. Sind alle Eigenwerte einfach, so ist $\nu_k = 1$ für alle k . Somit ist $k = n$, alle Polynome p_k sind konstant, und wir erhalten wieder den Satz für einfache reelle Eigenwerte $_{13}$.

b. Der maximale Grad von p_k kann kleiner als $\nu_k - 1$ sein. Dies hängt von der Jordanschen Normalform von A ab. Beispielsweise sind alle p_k konstant genau dann, wenn A halbeinfach ist. \rightarrow

16 Allgemeiner Fall *Der Operator $A \in L(V)$ habe die Eigenwerte*

$$\lambda_1, \dots, \lambda_r, \alpha_{r+1} \pm i\omega_{r+1}, \dots, \alpha_m \pm i\omega_m$$

mit Vielfachheiten ν_1, \dots, ν_m . Dann ist in einer beliebigen Basis jede Komponente einer Lösung von $\dot{x} = Ax$ eine Linearkombination aus den Quasipolynomen

$$p_k(t)e^{\lambda_k t}, \quad 1 \leq k \leq r,$$

und den Funktionen

$$p_k(t)e^{\alpha_k t} \cos \omega_k t, \quad q_k(t)e^{\alpha_k t} \sin \omega_k t, \quad r < k \leq m,$$

wobei $\text{grad } p_k, \text{ grad } q_k < \nu_k$ für alle k . \times

Man beachte, dass im Unterschied zu den Ergebnissen für halbeinfache Operatoren *nicht jede* Linearkombination aus den genannten Funktionen eine Lösung darstellt.

■ Schlussfolgerungen

- 17 **Satz** Das Spektrum von A liegt in der linken komplexen Halbebene genau dann, wenn

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$$

für jede Lösung φ von $\dot{x} = Ax$. ✕

⟨⟨⟨ ⇒ Für ein Produkt r aus einem Polynom und einer trigonometrischen Funktion und $\alpha < 0$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\alpha t} r(t) = 0.$$

Da jede Komponente einer Lösung φ von $\dot{x} = Ax$ aufgrund des letzten Satzes aus einer Linearkombination solcher Funktionen besteht, gilt daher auch $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0$.

⇐ Dies zeigen wir indirekt. Existiert wenigstens ein reeller oder komplexer Eigenwert $\lambda = \alpha + i\omega$ mit $\alpha \geq 0$, so existiert dazu auch wenigstens ein reeller oder komplexer Eigenvektor v und damit eine reelle oder komplexe Lösung $\varphi(t) = e^{\lambda t} v$ dieser Differentialgleichung. Ihr Real- oder Imaginärteil liefert eine reelle Lösung φ , die für $t \rightarrow \infty$ nicht gegen Null konvergiert. ⟩⟩⟩

- Satz** Das Spektrum von A liegt in der rechten komplexen Halbebene genau dann, wenn

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\varphi(t)| = \infty$$

für jede Lösung φ von $\dot{x} = Ax$ außer der Gleichgewichtslösung. Es liegt auf der imaginären Achse genau dann, wenn

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \log |\varphi(t)| = 0$$

für jede Lösung φ von $\dot{x} = Ax$ außer der Gleichgewichtslösung. ✕

⟨⟨⟨ Dies sei als Übung überlassen. ⟩⟩⟩

16.7

Rein imaginäre Eigenwerte

Das Beispiel kleiner Schwingungen zeigt, dass in natürlicher Weise lineare Systeme $\dot{x} = Ax$ mit rein imaginären Eigenwerten $\pm i\omega_1, \dots, \pm i\omega_m$ auftreten. In geeigneten Koordinaten ist dann $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_m)$ mit

$$A_k = \begin{pmatrix} & -\omega_k \\ \omega_k & \end{pmatrix}, \quad 1 \leq k \leq m.$$

Die Dimension des Gesamtraumes ist $n = 2m$.

Zu jedem A_k gehört ein zweidimensionaler invarianter Unterraum, in dem jede Lösung eine Kreisbahn mit der Winkelgeschwindigkeit ω_k durchläuft oder aber am Nullpunkt verharrt. Klammern wir solche Nullpunktlösungen von der Betrachtung aus und ignorieren die Radien der Kreisbahnen, so verläuft jede Lösung auf dem Produkt von m Einheitskreisen \mathbb{S}^1 ,

$$\mathbb{T}^m := \mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1.$$

Dieses Produkt nennt man einen *m -dimensionalen Torus*. Die gesamte Dynamik wird dann vollständig beschrieben durch die Winkelgeschwindigkeiten $\omega_1, \dots, \omega_m$ auf den einzelnen Kreisen.

■ Der zweidimensionale Fall

Betrachten wir zunächst den Fall $m = 2$, also $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Das topologische Produkt zweier Kreise beschreibt eine Fläche, die durch zwei Winkelkoordinaten beschrieben wird. Geometrisch handelt es sich um eine Rotationsfläche, die bei der Rotation einer Kreislinie in der rechten xz -Ebene um die z -Achse entsteht. Anschaulich ist dies ein *Autoreifen* oder *Donut*.

Analytisch betrachtet entspricht

$$\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},$$

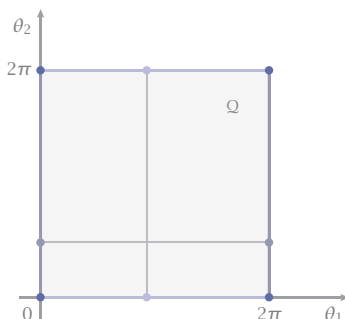
der reellen Geraden modulo 2π . Man identifiziert alle reellen Zahlen, die sich um ein Vielfaches von 2π unterscheiden. Entsprechend entspricht

$$\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$$

der euklidischen Ebenen, in der man alle Punkte identifiziert, deren Koordinaten sich durch Vielfache von 2π unterscheiden. Dieses Objekt wird vollständig durch das Quadrat

$$Q = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi],$$

Abb 13
Fundamentalebene
des 2-Torus



wenn man zusätzlich Ecken und Kanten wie in Abbildung 13 angedeutet identifiziert. Mit dieser Identifikation erhält man einen sogenannten *Fundamentalebene* Q des Torus \mathbb{T}^2 .

Bildet man das Quadrat Q aus einem elastischen Material und klebt die Seiten entsprechend ihrer Identifikation zusammen, so erhält man wieder die Rotationsfläche aus Abbildung 14. Analytisch wird diese Deformation beschrieben durch die Abbildung

$$\Theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (R + r \cos \theta_2) \cos \theta_1 \\ (R + r \cos \theta_2) \sin \theta_1 \\ r \sin \theta_2 \end{pmatrix}.$$

Auf dem Fundamentalebereich Q ist diese Abbildung injektiv, und man erhält einen Diffeomorphismus zwischen Q und \mathcal{T} .

Betrachten wir nun wieder unser dynamisches System. Es reduziert sich auf dem Torus \mathbb{T}^2 auf die Differenzialgleichung

$$\dot{\theta}_1 = \omega_1, \quad \dot{\theta}_2 = \omega_2.$$

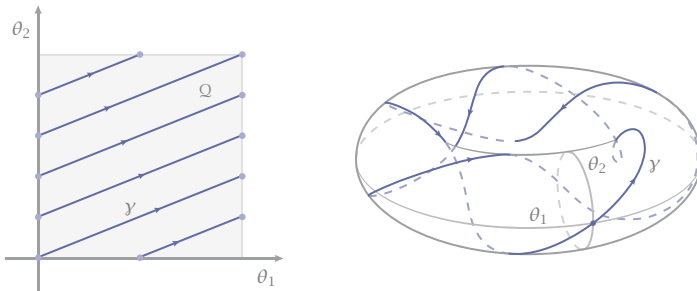
Mit $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ lautet die allgemeine Lösung

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \omega t, \quad \varphi_0 \in \mathbb{T}^2.$$

Die zugehörige 1-Parametergruppe ist

$$\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2, \quad \Phi^t(\theta) = \theta + \omega t.$$

Betrachten wir diese Lösungskurven nur in der reellen Ebene, so erhalten wir Geraden - was ziemlich uninteressant ist. Interessanter wird es, wenn wir sie auf dem Torus betrachten, indem wir sie zurück auf den Fundamentalebereich projizieren. Die topologische Natur der Lösungskurven hängt jetzt entscheidend von der Rationalität oder Irrationalität der Frequenzen ab.

Abb 14 Ein periodischer Orbit auf Ω und \mathbb{T}^2 

- 18 **Definition** Zwei reelle Zahlen ω_1, ω_2 heißen *rational unabhängig*, falls beide nicht verschwinden und

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{Q}$$

gilt. Andernfalls heißen sie *rational abhängig*. \times

► Rational unabhängig sind $1, \sqrt{2}$ oder $\sqrt{2}, \sqrt{6}$, rational abhängig sind dagegen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{8}$. ◀

Satz Es sind ω_1, ω_2 rational abhängig genau dann, wenn jede Lösungskurve von $\dot{\theta}_1 = \omega_1, \dot{\theta}_2 = \omega_2$ auf \mathbb{T}^2 periodisch ist. \times

◀◀◀ Sind ω_1 und ω_2 rational abhängig, so gilt

$$\frac{\omega_1}{n_1} = \frac{\omega_2}{n_2}$$

mit ganzen Zahlen n_1 und n_2 . Es existiert dann eine reelle Zahl T , so dass

$$T\omega_i = 2\pi n_i, \quad i = 1, 2.$$

Dann aber gilt für jeden Anfangswert θ auf \mathbb{T}^2

$$\Phi^T(\theta) = \theta + T\omega = \theta + (2\pi n_1, 2\pi n_2) \cong \theta.$$

Also ist jede Bahn periodisch mit Periode T .

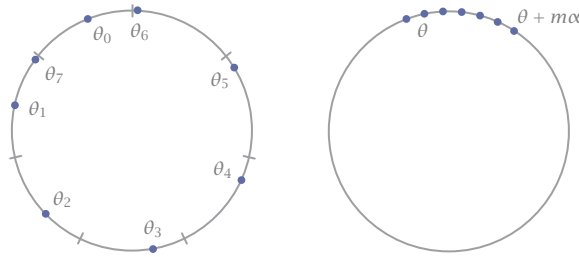
Gilt umgekehrt $\Phi^T(\theta) = \theta + T\omega \cong \theta$, so ist $T\omega \cong 0$, also

$$T\omega = 2\pi(n_1, n_2)$$

mit gewissen ganzen Zahlen n_1, n_2 . Daraus folgt, dass das Verhältnis von ω_1 und ω_2 rational ist. \gggg

Der Beweis zeigt, dass es für die rationale Abhängigkeit der Frequenzen genügt, dass bereits *eine* Bahn periodisch ist. Ebenso folgt aus dem Bewiesenen,

Abb 15 Acht Punkte in sieben Intervallen und die Punkte $\theta + m\alpha$



dass die Frequenzen rational *unabhängig* sind genau dann, wenn *keine* Bahn periodisch ist. Aber es gilt mehr.

- 19 **Satz** Sind ω_1, ω_2 rational unabhängig, so ist jede Lösungskurve von $\dot{\theta}_1 = \omega_1, \dot{\theta}_2 = \omega_2$ dicht auf \mathbb{T}^2 . \times

Wir führen dieses Satz zurück auf einen Satz über Drehungen des Kreises \mathbb{S}^1 um einen festen Winkel α .

Lemma Ist α inkommensurable mit 2π , also

$$\alpha/2\pi \notin \mathbb{Q},$$

so liegen für jedes $\theta \in \mathbb{S}^1$ die Punkte $\{\theta + k\alpha : k \in \mathbb{N}\}$ dicht in \mathbb{S}^1 . \times

⟨⟨⟨ Der Beweis basiert auf dem *Dirichletschen Schubfachprinzip* A-3.21. Dazu unterteilen wir \mathbb{S}^1 in n gleich lange, halboffene, disjunkte Intervalle und betrachten darauf die $n + 1$ Punkte

$$\theta_k = \theta + k\alpha, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Wenigstens zwei dieser Punkte müssen in ein und dasselbe Intervall fallen. Es gibt also $0 \leq k \neq l \leq n$ mit $0 \leq \theta_k - \theta_l < 2\pi/n$. Es ist aber auch $\theta_k \neq \theta_l$, denn sonst wären α und 2π kommensurabel. Für $m = |k - l| > 0$ gilt demnach

$$0 < |m\alpha \bmod 2\pi| < \frac{2\pi}{n}.$$

Die Punkte $\theta, \theta + m\alpha, \theta + 2m\alpha, \dots$ liegen somit $2\pi/n$ -dicht in \mathbb{S}^1 .

Für jedes $n \geq 1$ existiert somit eine Teilfolge von $\theta, \theta + \alpha, \theta + 2\alpha, \dots$, die $2\pi/n$ -dicht in \mathbb{S}^1 liegt. Also liegt die gesamte Folge dicht in \mathbb{S}^1 . $\rangle\rangle\rangle$

⟨⟨⟨ *Beweis des Satzes* Betrachte die allgemeine Lösung $\varphi(t) = \dot{\varphi} + \omega t$. Für $T = 2\pi/\omega_1$ und ganze Zahlen k gilt dann mit $\alpha = 2\pi\omega_2/\omega_1$

$$\begin{aligned}\varphi_k &:= \varphi(kT) = \dot{\varphi} + (\omega_1 kT, \omega_2 kT) \\ &= (\dot{\varphi}_1 + 2\pi k, \dot{\varphi}_2 + k\alpha) \\ &\cong (\dot{\varphi}_1, \dot{\varphi}_2 + k\alpha).\end{aligned}$$

Die Punkte φ_k liegen somit sämtlich auf dem Kreis $\{\dot{\varphi}_1\} \times \mathbb{S}^1$. Da ω_1 und ω_2 rational unabhängig sind, ist α inkommensurable mit 2π . Aufgrund des vorangehenden Lemmas liegen daher die φ_k auf diesem Kreis *dicht*.

Für jedes feste t liegen dann aber auch die Punkte

$$\varphi_{k,t} := \varphi(kT + t)$$

dicht auf dem Kreis $\{\dot{\varphi}_1 + \omega_1 t\} \times \mathbb{S}^1$. Da die Punkte $\dot{\varphi}_1 + \omega_1 t$ für $t \geq 0$ den gesamten ersten Faktor durchlaufen, liegt der gesamte Orbit $\varphi(t)$ dicht in $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{T}^2$. \gggg

■ Der höherdimensionale Fall

Definition Die reellen Zahlen $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ heißen *rational abhängig*, falls es ein $0 \neq k \in \mathbb{Z}^n$ gibt, so dass

$$\langle k, \omega \rangle := k_1 \omega_1 + \dots + k_n \omega_n = 0.$$

Andernfalls heißen sie *rational unabhängig*. \times

Somit sind $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ rational unabhängig, wenn für $k \in \mathbb{Z}^n$ gilt

$$\langle k, \omega \rangle = 0 \Leftrightarrow k = 0.$$

Im Fall $n = 2$ ist dies äquivalent zur früheren Definition₁₈. - Der letzte Satz₁₉ gilt nun genauso hier.

Satz Sind $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ rational unabhängig, so ist jede Lösungskurve von $\dot{\theta} = \omega$ auf \mathbb{T}^n dicht. \times

Wir zeigen, dass sich die Lösungskurven auf dem Torus \mathbb{T}^n sogar *gleichmäßig verteilen*. Um zu erklären, was damit gemeint ist, sei B eine beliebige abgeschlossene Kugel in \mathbb{T}^n . Für eine Lösungskurve φ von $\dot{\theta} = \omega$ sei

$$\varphi^* B = \{t \in \mathbb{R} : \varphi(t) \in B\}.$$

Bezeichnen λ_1 und λ_n das 1- respektive n -dimensionale Inhaltsmaß, so misst

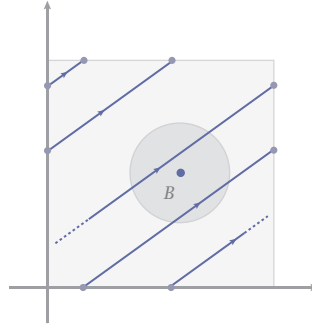
$$\frac{\lambda_1(\varphi^* B \cap [0, T])}{T}$$

die *relative Aufenthaltszeit* von φ in B im Zeitintervall $[0, T]$, und

$$\frac{\lambda_n(B)}{\lambda_n(\mathbb{T}^n)}$$

Abb 16

Zeitliches und räumliches Mittel



den *relativen Anteil von B an* \mathbb{T}^n . Das Bemerkenswerte ist, dass für rational unabhängige Frequenzen ω die erste Größe gegen die zweite konvergiert:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\lambda_1(\varphi^* B \cap [0, T])}{T} = \frac{\lambda_n(B)}{\lambda_n(\mathbb{T}^n)}. \quad (5)$$

Das heißt, im zeitlichen Mittel befindet sich die Bahn φ innerhalb von B , wie es dem räumlichen Anteil von B am Gesamttraum entspricht.

Für den Beweis dieser Behauptung schreiben wir diese zuerst in Integralform. Bezeichnet χ_B die charakteristische Funktion von B , so ist (5) gleichbedeutend mit

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_B(\varphi(t)) dt = \frac{1}{\lambda_n(\mathbb{T}^n)} \int_{\mathbb{T}^n} \chi_B d\theta.$$

Für den folgenden Satz ersetzen wir noch der Einfachheit halber χ_B durch eine beliebige *stetige* Funktion f auf \mathbb{T}^n . Für die Definition des n -dimensionalen Integrals verweisen wir auf den dritten Band ›Etwas mehr Analysis‹. Hier genügt aber eine ›intuitive Vorstellung‹.

- 20 **Satz** Sind die Frequenzen $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ rational unabhängig, so gilt für jede Lösungskurve φ von $\dot{\vartheta} = \omega$ und jede stetige Funktion $f: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi(t)) dt = \frac{1}{\lambda_n(\mathbb{T}^n)} \int_{\mathbb{T}^n} f d\theta. \quad \times \quad (6)$$

Die linke Seite wird als *zeitliches Mittel*, die rechte Seite als *räumliches Mittel* von f bezeichnet. Für rational unabhängige Frequenzen stimmen also zeitliches und räumliches Mittel einer stetigen Funktion f überein. Man überlegt sich leicht, dass dies für rational abhängige Frequenzen nicht zutrifft.

⟨⟨⟨ Der Einfachheit halber sei $\varphi(t) = \omega t$. Für $k \in \mathbb{Z}^n$ sei

$$e_k: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad e_k(\theta) = e^{i\langle k, \theta \rangle}.$$

Wegen $\langle k, \omega \rangle \neq 0$ für $k \neq 0$ gilt dann

$$\int_0^T e_k(\varphi(t)) dt = \int_0^T e^{i\langle k, \omega \rangle t} dt = \begin{cases} T, & k = 0, \\ \frac{e^{i\langle k, \omega \rangle T} - 1}{i\langle k, \omega \rangle}, & k \neq 0. \end{cases}$$

Für $T \rightarrow \infty$ folgt hieraus

$$\frac{1}{T} \int_0^T e_k(\varphi(t)) dt \rightarrow \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

Andererseits ist

$$\int_{\mathbb{T}^n} e_k d\theta = \int_{\mathbb{T}^n} e^{i\langle k, \theta \rangle} d\theta = \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{T}^1} e^{ik_i \theta_i} d\theta_i = \begin{cases} \lambda_1(\mathbb{T}^1)^n, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

Damit erhalten wir ebenfalls

$$\frac{1}{\lambda_n(\mathbb{T}^n)} \int_{\mathbb{T}^n} e_k d\theta = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \neq 0. \end{cases}$$

Damit ist (6) für die Funktionen e_k mit $k \in \mathbb{Z}^n$ bewiesen.

Auf Grund der Linearität beider Seiten von (6) in f gilt die Behauptung dann auch für jede Linearkombination der e_k , also jedes trigonometrische Polynom in $\theta_1, \dots, \theta_n$. Dann gilt sie aber auch für jeden *gleichmäßigen* Limes solcher Polynome, und das sind gerade die stetigen Funktionen auf \mathbb{T}^n . \gggg

Interpretiert man die Integrale in (6) im Sinne von Lebesgue, so kann man noch von stetigen Funktionen zu Lebesgue-integrablen Funktion übergehen. Jede solche Funktion ist fast überall der punktweise Limes stetiger Funktionen. Mit dem Satz von der dominierten Konvergenz gelangt man zu folgendem Ergebnis.

Zusatz Die Behauptung $_{20}$ gilt auch für jede Lebesgue-integrable Funktion $f: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}$, wenn man die Integrale im Sinne von Lebesgue interpretiert. \times

Insbesondere gilt der Satz damit auch für die charakteristischen Funktionen offener, abgeschlossener, oder beliebiger messbarer Mengen. Die Details führen wir im dritten Band ›Noch mehr Analysis‹ aus.

Aufgaben

- 1 Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum mit einer Multiplikation, für die

$$\|AB\| \leq c \|A\| \|B\|$$

mit irgendeiner Konstanten $c > 0$ gilt. Dann gibt es auch eine *adaptierte Norm* $\|\cdot\|_a$, für die $c = 1$ gilt und E somit eine Banachalgebra wird.

- 2 Es ist φ eine Lösung von $\dot{x} = Ax$ zum Anfangswert $x(t_0) = x_0$ genau dann, wenn $\tilde{\varphi} = \varphi(\cdot + t_0)$ eine Lösung zum Anfangswert $x(0) = x_0$ ist. Somit ist

$$\varphi(t) = e^{(t-t_0)A}x_0.$$

- 3 Die Gesamtheit der Lösungen der Differenzialgleichung $\dot{x} = Ax$ bildet einen reellen Vektorraum, der isomorph zu V ist.
- 4 Finden Sie zwei 2×2 -Matrizen A und B , für die

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2, \quad e^{A+B} \neq e^A e^B.$$

- 5 Man zeige, dass für

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

die binomische Formel für $n \geq 2$ sowie die Gleichung $e^{A+B} = e^A e^B$ nicht gelten.

- 6 Die aus einer Fundamentallösung in einem Koordinatensystem gebildete Matrix

$$M(t) = [\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)]$$

heißt *Fundamentalmatrix*. Für diese gilt

$$M(t)M(t_0)^{-1} = e^{(t-t_0)A}$$

für jedes $t_0 \in \mathbb{R}$. Unter welchen Bedingungen ist $M(t)$ eine 1-Parametergruppe?

- 7 Sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte des Operators A , gezählt mit Vielfachheiten, so ist

$$\det A = \prod_{k=1}^n \lambda_k, \quad \text{sp } A = \sum_{k=1}^n \lambda_k.$$

Entwickeln sie dazu beide Seiten von $\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$ nach λ und vergleichen sie die Koeffizienten von λ^{n-1} und 1.

- 8 Ist A antisymmetrisch, also $A^T = -A$, so ist e^A orthogonal.

- 9 Es gilt

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 10 Besitzt A einen Eigenwert $\lambda < 0$, so besitzt die Differenzialgleichung $\dot{x} = Ax$ wenigstens eine nichttriviale Lösung $x(t)$ mit $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$.

- 11 a. Ist λ ein Eigenwert von A , so ist e^λ ein Eigenwert von e^A .

b. Es gibt keine 2×2 -Matrix L mit

$$e^L = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

c. Ist $\|A - I\|$ hinreichend klein, so gibt es einen Operator L mit $e^L = A$.

d. Inwieweit ist L eindeutig bestimmt?

12 Lösen sie das Anfangswertproblem $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$ für folgende A und x_0 .

a. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ -9 \end{pmatrix}$ b. $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

c. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

13 Bestimmen sie den Typ der Differenzialgleichung $\dot{x} = Ax$ für folgende Matrizen A , sowie diejenigen Anfangswerte, für die $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ gilt.

a. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

14 Betrachten sie die inhomogene n -dimensionale Differenzialgleichung $\dot{x} = Ax + b$ mit $\det A \neq 0$. Bestimmen sie eine affine Transformation $x = Py + c$, die diese Gleichung in eine homogene Gleichung $\dot{y} = By$ transformiert. Bestimmen sie damit die allgemeine Lösung dieser Gleichung. Wie sieht diese Lösung aus, wenn $\det A = 0$?

15 Betrachten sie im \mathbb{R}^3 die Differenzialgleichung $\dot{x} = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 1 & 2 & \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a. Zu welchem Diagonaloperator ist A ähnlich?

b. Welche Struktur hat die allgemeine Lösung?

c. Bestimmen sie die allgemeine Lösung explizit.

d. Lösen sie damit das Anfangswertproblem mit $x(0) = (2, 4, 3)^\top$.

16 Zeigen sie, dass die Funktionen $e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}$ linear unabhängig genau dann sind, wenn die λ_k paarweise verschieden sind.

17 Für welche a, b, c sind die Funktionen $\sin at$, $\sin bt$, $\sin ct$ linear abhängig?

18 Für welche Parameter a, b besitzt die Gleichung $\ddot{u} + a\dot{u} + bu = 0$ eine nichttriviale Lösung u

a. ohne Nullstellen,

b. mit endlich vielen Nullstellen,

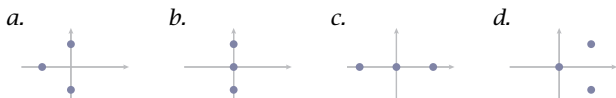
c. mit unendlich vielen Nullstellen?

19 Transformieren sie die Differenzialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\omega \\ \omega & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

in Polarkoordinaten, indem sie $u = r \cos \theta$, $v = r \sin \theta$ schreiben. Schreiben sie für $\alpha \neq 0$ dessen allgemeine Lösung auch in der Form $\theta = \theta(r)$.

- 20 Gegeben sei der stark gedämpfte harmonische Oszillator, $\ddot{x} = -x - \rho\dot{x}$ mit $\rho > 2$.
- Bestimmen sie für das äquivalente System erster Ordnung die Eigenwerte und Eigenvektoren für $\rho = 10/3$ und damit die allgemeine Lösung.
 - Skizzieren sie das zugehörige Phasenportrait und interpretieren sie die Lösungskurven physikalisch.
- 21 Klassifizieren und skizzieren sie alle Differentialgleichungen $\dot{x} = Ax$ in der Ebene mit $\det A = 0$.
- 22 Zeichnen sie die Phasenportraits für folgende Konfigurationen von Eigenwerten eines linearen Systems $\dot{x} = Ax$ im \mathbb{R}^3 .



- 23 Sei A ein invertierbarer Operator auf dem \mathbb{R}^n , wobei n ungerade sei. Zeigen sie, dass die Differentialgleichung $\dot{x} = Ax$ eine nichtperiodische Lösung besitzt. Gilt dies auch immer, wenn A nicht invertierbar ist?
- 24 Skizzieren sie die Lösungskurven der folgenden Differentialgleichungen. Welche Lösungen streben mit $t \rightarrow \infty$ gegen 0?
- $\dot{x} = -2x$ $\dot{x} = -x + z$
 - $\dot{y} = 2z$ $\dot{y} = 3y$
 - $\dot{z} = -2y$ $\dot{z} = -x - z$
- 25 Zeigen sie, dass für jede Lösung von $\dot{x} = Ax$, die nicht die Gleichgewichtslösung ist, genau eine der folgenden Möglichkeiten zutrifft:
- $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$ und $\lim_{t \rightarrow -\infty} |x(t)| = \infty$.
 - $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = \infty$ und $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = 0$.
 - Es gibt Konstanten $0 < A < B$, so dass $A < |x(t)| < B$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
- 26 Es gilt $\sup_{0 < t < \infty} (\cos t + \sin \sqrt{2}t) = 2$.
- 27 Betrachte \mathbb{S} als Gruppe aller komplexen Zahlen vom Betrag 1 mit der üblichen Multiplikation. Bestimmen sie alle abgeschlossenen Untergruppen von \mathbb{S} .
- 28 Die Folge der ersten Ziffern der Potenzen von 2 beginnt mit

1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, 8, ...

- In dieser Folge tritt auch die Ziffer 7 auf.
- Ist $N_z(n)$ die Anzahl der Zahlen in $1, 2, \dots, 2^n$, die mit der Ziffer z beginnen, so gilt tatsächlich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_7(n)}{N_8(n)} > 1.$$

Insbesondere existiert dieser Grenzwert.

- Allgemeiner tritt jede beliebige, endliche Ziffernkombination am Anfang wenigstens eines Folgengliedes auf. *Hinweis:* Betrachten sie $\log_{10} 2^n$ modulo 1.

17

Gewöhnliche Differenzialgleichungen

Wir betrachten nun allgemeine gewöhnliche Differenzialgleichungen erster Ordnung in endlich-dimensionalen Räumen von der Form

$$\dot{x} = v(x).$$

Anders als im Fall linearer Differenzialgleichungen gibt es hier in den meisten Fällen keine Darstellung von Lösungen mittels eines Exponentials oder Ähnlichem, und sogar ihre Existenz oder Eindeutigkeit sind meist nicht evident.

Man benötigt daher allgemeine Existenz- und Eindeutigkeitssätze. Für die Existenz reicht schon die Stetigkeit der rechten Seite, und für die Eindeutigkeit deren lokale Lipschitzstetigkeit. Diese zieht dann auch die stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangswerten nach sich.

Eine Konsequenz der Existenz und Eindeutigkeit ist die Flusseigenschaft. Fasst man alle Lösungen zu einer Familie von Zeit- t -Abbildungen Φ^t zusammen, so gilt

$$\Phi^0 = id, \quad \Phi^{s+t} = \Phi^s \circ \Phi^t.$$

Dies ist die Verallgemeinerung der entsprechenden Eigenschaften der Familie der Zeit- t -Abbildungen e^{At} für lineare Differenzialgleichungen.

17.1

Vektorfelder und Differentialgleichungen

Definition Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum. Ein **Vektorfeld** auf einem Gebiet $\Omega \subset V$ ist eine Abbildung

$$v: \Omega \rightarrow V, \quad x \mapsto v(x). \quad \times$$

Ein Vektorfeld weist also jeden Punkt x im Definitionsbereich $\Omega \subset V$ einen Vektor $v(x)$ in *demselben* Vektorraum V zu. Daher definiert ein solches Feld eine *gewöhnliche Differentialgleichung* auf Ω .

Definition Ist $v: \Omega \rightarrow V$ ein Vektorfeld auf einem Gebiet $\Omega \subset V$, so heißt

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

eine *gewöhnliche, autonome Differentialgleichung erster Ordnung* auf Ω . Eine *Lösung* dieser Differentialgleichung ist eine stetig differenzierbare Kurve $\varphi: I \rightarrow \Omega$ derart, dass

$$\dot{\varphi}(t) = v(\varphi(t)), \quad t \in I. \quad \times$$

Der Geschwindigkeitsvektor einer Lösung φ stimmt also in jedem Punkt mit dem dortigen Vektor des Vektorfeldes v überein. Die Menge Ω selbst bezeichnet man in diesem Zusammenhang auch als *Phasen-* oder *Konfigurationsraum* der Differentialgleichung.

Bemerkungen a. Jede differenzierbare Lösung ist auch *stetig* differenzierbar, da die Ableitung ja die Differentialgleichung erfüllt.

b. Die Differentialgleichung (1) heißt *gewöhnlich*, da ihre Lösungen φ Funktionen *einer* Variable t sind, die üblicherweise als Zeit interpretiert wird. Auf der anderen Seite stehen die *partiellen* Differentialgleichungen, die Funktionen mehrerer Variablen und deren partielle Ableitungen betreffen. Sie heißt von *erster*

Abb 1 Zwei Vektorfelder und zwei Lösungskurven

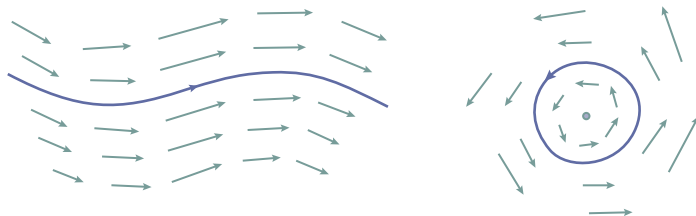
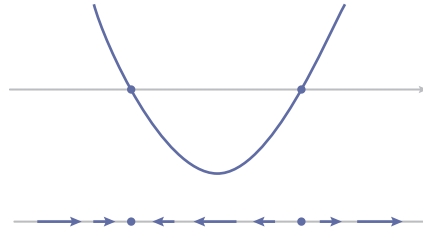


Abb 2

Eine skalare Funktion
interpretiert als
Vektorfeld



Ordnung, da nur die erste Ableitung nach t involviert ist. Und sie heißt *autonom*, da das Vektorfeld v nicht explizit von t abhängt.

c. Im Standardfall des \mathbb{R}^n ist (1) äquivalent zu einem System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= v_1(x_1, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= v_2(x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= v_n(x_1, \dots, x_n),\end{aligned}$$

von n im Allgemeinen gekoppelten, nichtlinearen Differentialgleichungen. \rightarrow

► A. Jede reelle Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert eine skalare Differentialgleichung $\dot{x} = f(x)$ auf ihrem Definitionsbereich Abb 2. Das Polynom $f(x) = x^2$ zum Beispiel definiert die Differentialgleichung

$$\dot{x} = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ihre allgemeine Lösung ist gegeben durch

$$\varphi(t) = \frac{a}{1 - at}$$

mit $a \in \mathbb{R}$ und $at \neq 1$ - siehe Kapitel 11.

B. Ein linearer Operator $A \in L(V)$ definiert ein lineares Vektorfeld auf V , nämlich $A: x \mapsto Ax$. Die zugehörige Differentialgleichung ist

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in V.$$

Ihre allgemeine Lösung ist, wie wir gesehen haben, gegeben durch

$$\varphi(t) = e^{At}x_0, \quad x_0 \in V. \quad \blacktriangleleft$$

■ Weitere Differenzialgleichungen

Wir beschränken uns hier auf *autonome* Differenzialgleichungen *erster* Ordnung. Für die Frage der Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen beispielsweise ist dies jedoch keine wesentliche Einschränkung, da sich andere Typen von Differenzialgleichungen in diese Form bringen lassen. Wir geben drei Beispiele, das allgemeine Vorgehen ergibt sich daraus.

► A. In Kapitel 11 haben wir nichtautonome Differenzialgleichungen

$$\dot{x} = f(t, x)$$

in einer Variablen betrachtet. Führen wir die Zeit als zusätzliche Koordinate x_0 ein und setzen $x_1 = x$, so ist dies äquivalent zu dem autonomen System

$$\dot{x}_0 = 1,$$

$$\dot{x}_1 = f(x_0, x_1).$$

B. Eine skalare Differenzialgleichung höherer Ordnung wird zu einem System von Differenzialgleichungen erster Ordnung, indem man die höheren Ableitungen als zusätzliche Koordinaten einführt. So ist

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b\dot{x} = f(x)$$

mit $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ und $x_3 = \ddot{x}$ äquivalent zu dem System

$$\dot{x}_1 = x_2,$$

$$\dot{x}_2 = x_3,$$

$$\dot{x}_3 = f(x_1) - bx_2 - ax_3.$$

C. Hängt ein Vektorfeld von Parametern ab, so kann man auch diese als zusätzliche Koordinaten einführen. So ist

$$\dot{x} = f(x, \lambda)$$

mit $x_1 = x$, $x_2 = \lambda$ äquivalent zu dem System

$$\dot{x}_1 = f(x_1, x_2),$$

$$\dot{x}_2 = 0.$$

Damit werden Sätze über die Abhängigkeit von Lösungen von Parametern auf solche über die Abhängigkeit von Lösungen von Anfangswerten zurückgeführt. ◀

■ Anfangswertprobleme

Bereits die Lösungen von elementaren Differenzialgleichungen sind nicht eindeutig, solange keine weiteren Daten vorgegeben werden. Dasselbe gilt natürlich auch hier. Eindeutigkeit kann man nur für *Anfangswertprobleme* erwarten.

Definition Unter einem zu einem Vektorfeld v auf Ω gehörenden *Anfangswertproblem* – kurz *Awp* – versteht man das System

$$\dot{x} = v(x), \quad x(t_0) = x_0$$

mit einem $x_0 \in \Omega$. Eine *lokale Lösung* des Awps ist eine Lösung $\varphi: I_0 \rightarrow \Omega$ dieser Differenzialgleichung mit $t_0 \in I_0$ und $\varphi(t_0) = x_0$. ✕

- 1 ▶ A. Die Lösung von $\dot{x} = ax$, $x(0) = x_0$ auf der reellen Geraden ist

$$\varphi(t) = e^{at}x_0.$$

Sie existiert für alle $t \in \mathbb{R}$.

- B. Die Lösung von $\dot{x} = x^2$, $x(0) = x_0$ ist

$$\varphi(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}.$$

Ist $x_0 \neq 0$, so ist diese für $t \rightarrow 1/x_0$ unbeschränkt und daher nicht für alle t definiert. Es gibt also keine *globale* Lösung.

- C. Ist x_0 ein *kritischer Punkt* des Vektorfeldes v , das heißt,

$$v(x_0) = 0,$$

so besitzt das zugehörige Awp immer die für alle t erklärte triviale Lösung

$$\varphi(t) \equiv x_0.$$

Diese wird auch als *Gleichgewichtslösung* bezeichnet, der Punkt x_0 selbst als *Gleichgewichtspunkt*.

- D. Das lineare Awp $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$ besitzt die Lösung

$$\varphi(t) = e^{At}x_0.$$

Der Nullpunkt ist hier immer ein Gleichgewichtspunkt. ◀

Die Wahl des Anfangszeitpunktes t_0 ist bei *autonomen* Differenzialgleichungen unerheblich. Denn ist φ eine Lösung von $\dot{x} = v(x)$, so ist auch

$$\hat{\varphi}(t - t_0) = v(\varphi(t - t_0)).$$

Die zeitliche verschobene Kurve ist also ebenfalls eine Lösung, und wir können erreichen, dass $t_0 = 0$.

Für nichtlineare Anfangswertprobleme lässt sich nur in wenigen Fällen eine Lösung explizit angeben. Man kann sogar beweisen, dass Lösungen in den meisten Fällen nicht durch ›geschlossene Ausdrücke‹ dargestellt werden können. Man benötigt daher allgemeine *Existenzsätze*. Sehr allgemein ist der

- 2 **Existenzsatz von Peano** *Ist das Vektorfeld v stetig, so besitzt jedes zugehörige Anfangswertproblem wenigstens eine lokale Lösung.* ✕

Wir benötigen diesen Satz im Folgenden nicht. Daher skizzieren wir einen Beweis in einer Übungsaufgabe _{A-7}.

17.2

Der Existenz- und Eindeigkeitssatz

Für den allgemeinen Existenz- und Eindeigkeitssatz benötigen wir einige technische Hilfsmittel. Wir beginnen mit der Umformulierung des Problems in eine *Integralgleichung*. Letztere ist analytisch wesentlich leichter zu handhaben. Insbesondere können wir hierauf den Banachschen Fixpunktsatz anwenden.

■ Die Integralgleichung

- 3 **Lemma I** *Sei $v: \Omega \rightarrow V$ ein stetiges Vektorfeld auf einem Gebiet Ω . Dann ist $\varphi: I \rightarrow \Omega$ eine Lösung des Anfangswertproblems*

$$\dot{x} = v(x), \quad x(0) = x_0$$

*genau dann, wenn φ stetig ist und die **Integralgleichung***

$$\varphi(t) = x_0 + \int_0^t v(\varphi(s)) \, ds$$

für alle $t \in I$ erfüllt. ✕

⟨⟨⟨ Ist φ Lösung des Awps, so folgt aus dem Hauptsatz _{13.6}

$$\begin{aligned} \varphi(t) - x_0 &= \varphi(t) - \varphi(0) \\ &= \int_0^t \dot{\varphi}(s) \, ds = \int_0^t v(\varphi(s)) \, ds. \end{aligned}$$

Gilt umgekehrt diese Gleichung für ein stetiges φ , so ist wiederum aufgrund des Hauptsatzes φ auch differenzierbar, und es ist

$$\dot{\varphi}(t) = v(\varphi(t)), \quad t \in I.$$

Außerdem ist offensichtlich $\varphi(0) = x_0$. ⟩⟩⟩

■ Das Lemma von Gronwall

Dieses Lemma spielt bei der Untersuchung von gewöhnlichen Differenzialgleichungen eine zentrale Rolle.

4 **Lemma von Gronwall** Ist $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und gilt

$$u(t) \leq a + b \int_0^t u(s) \, ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

mit reellen Konstanten a und b , wobei $b \geq 0$, so ist

$$u(t) \leq ae^{bt}, \quad 0 \leq t \leq T. \quad \times$$

⟨⟨⟨⟨ Setze

$$v(t) := a + b \int_0^t u(s) \, ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Dann ist v stetig differenzierbar und Dann ist $u \leq v$ auf $[0, T]$ – das ist genau die Annahme –, und v ist stetig differenzierbar. Für die Ableitung gilt, da $b \geq 0$,

$$v' = bu \leq bv.$$

Folglich ist

$$(ve^{-bt})' = (v' - bv)e^{-bt} \leq 0.$$

Die Funktion ve^{-bt} ist also monoton fallend auf $[0, T]$ und daher

$$v(t)e^{-bt} \leq v(t)e^{-bt} \Big|_{t=0} = v(0) = a, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Somit ist auch $u(t) \leq v(t) \leq ae^{bt}$. ⟩⟩⟩⟩

Im Fall $a = 0$ erhalten wir folgendes

5 **Korollar** Ist $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und gilt

$$0 \leq u(t) \leq b \int_0^t u(s) \, ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

mit einer reellen Zahl $b \geq 0$, so ist $u \equiv 0$. \times

■ Banachscher Fixpunktsatz

Der letzte Hilfssatz ist tatsächlich ein fundamentales und mächtiges Werkzeug der Funktionalanalysis.

6 **Banachscher Fixpunktsatz** Sei $X \subset E$ eine abgeschlossene Teilmenge eines Banachraums E mit Norm $\|\cdot\|$. Ist $T: X \rightarrow X$ eine **Kontraktion** – das heißt,

$$\|T(u) - T(v)\| \leq \theta \|u - v\|, \quad u, v \in X.$$

mit einem $\theta < 1$, so besitzt T in X genau einen Fixpunkt. \times

««« Eindeutigkeit: Sind p und q zwei Fixpunkte von T in X , so folgt

$$\|p - q\| = \|T(p) - T(q)\| \leq \theta \|p - q\|,$$

also $(1 - \theta) \|p - q\| \leq 0$. Wegen $1 - \theta > 0$ impliziert dies $\|p - q\| = 0$. Also ist der Fixpunkt in X eindeutig.

Existenz: Wähle irgendeinen Punkt $x_0 \in X$ und setze

$$x_n = T^n(x_0), \quad n \geq 1,$$

wobei T^n die n -fache Anwendung des Operators T bezeichnet. Mit Induktion folgt $x_n \in X$ für alle $n \geq 0$ sowie

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \theta \|x_n - x_{n-1}\| \leq \theta^n \|x_1 - x_0\|, \quad n \geq 0. \quad (2)$$

Für $m > n \geq 0$ folgt hieraus

$$\begin{aligned} \|x_m - x_n\| &\leq \sum_{k=n}^{m-1} \|x_{k+1} - x_k\| \\ &\leq \sum_{k=n}^{\infty} \theta^k \|x_1 - x_0\| = \frac{\theta^n}{1 - \theta} \|x_1 - x_0\|. \end{aligned} \quad (3)$$

Somit bildet (x_n) eine Cauchyfolge in X . Aufgrund der Vollständigkeit von E besitzt diese Cauchyfolge einen Grenzwert $p \in E$, und aufgrund der Abgeschlossenheit von X gehört dieser ebenfalls zu X . Dieser Grenzwert ist ein Fixpunkt von T , denn (2) ist äquivalent mit

$$\|T(x_n) - x_n\| \leq \theta^n \|x_1 - x_0\|, \quad n \geq 0,$$

und mit $x_n \rightarrow p$ und der Stetigkeit von T erhalten wir $\|T(p) - p\| = 0$. Damit ist alles gezeigt. »»»

Der Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes liefert nicht nur die Existenz des Fixpunktes, sondern gleichzeitig auch ein schnell konvergierendes Konstruktionsverfahren einschließlich Fehlerabschätzung.

- 7 **Zusatz zum Banachschen Fixpunktsatz** Jede Folge $x_n = T^n(x_0)$ mit beliebigem Startwert $x_0 \in X$ konvergiert gegen den eindeutigen Fixpunkt p von T , und es gilt

$$\|x_n - p\| \leq \frac{\theta^n}{1 - \theta} \|x_1 - x_0\|. \quad \times$$

««« Dies folgt aus (3) mit $m \rightarrow \infty$ und $x_m \rightarrow p$. »»»

■ Eindeutigkeit

Wir wollen nun die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen des Awps

$$\dot{x} = v(x), \quad x(0) = x_0$$

für lipschitzstetige Vektorfelder v zeigen. Wie so oft, ist die Eindeutigkeit der leichtere Teil. Daher erledigen wir dies zuerst.

- 8 **Satz** *Ist $v: V \rightarrow V$ lipschitzstetig, so ist jede Lösung des obigen Anfangswertproblems auf ihrem Existenzintervall eindeutig.* ✕

⟨⟨⟨ Seien φ, ψ zwei auf demselben Intervall I um 0 definierte Lösungen desselben Awps. Dann erfüllen beide die zugehörige Integralgleichung von Lemma I₃, so dass

$$(\varphi - \psi)(t) = \int_0^t [v(\varphi(s)) - v(\psi(s))] ds, \quad t \in I.$$

Für $t > 0$ folgt mit einer Lipschitzkonstanten L für v die Abschätzung

$$\|(\varphi - \psi)(t)\| \leq \int_0^t \|v(\varphi(s)) - v(\psi(s))\| ds \leq L \int_0^t \|(\varphi - \psi)(s)\| ds.$$

Für die stetige Funktion $u(t) = \|(\varphi - \psi)(t)\|$ gilt somit

$$0 \leq u(t) \leq L \int_0^t u(s) ds.$$

Mit dem Korollar zum Lemma von Gronwall₅ folgt

$$\|(\varphi - \psi)(t)\| = 0, \quad t \in I \cap [0, \infty).$$

Für $t \in I \cap (-\infty, 0]$ gilt Entsprechendes. Also ist $\varphi = \psi$ auf I . ⟩⟩⟩

■ Existenz

Für den Existenzbeweis gehen wir nun davon aus, dass das Vektorfeld v auf ganz V erklärt und gleichmäßig lipschitzstetig ist. Dies vermeidet technische Komplikationen, da Lösungen in endlicher Zeit nicht unbeschränkt werden können. Den allgemeinen Fall führen wir später auf diesen zurück.

- 9 **Globaler Existenz- und Eindeutigkeitsatz** *Ist das Vektorfeld v gleichmäßig lipschitz auf ganz V , so besitzt jedes Anfangswertproblem eine für alle Zeiten definierte eindeutige Lösung.* ✕

⟨⟨⟨ Wir schreiben das zu lösende Awp als Integralgleichung für die Kurve φ , also

$$\varphi(t) = x_0 + \int_0^t v(\varphi(s)) ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

Diese fassen wir als Fixpunktgleichung eines Operators T auf einem geeigneten Raum E stetiger Kurven auf.

Sei dazu L eine globale Lipschitzkonstante von v und

$$E = \{ \varphi \in C(\mathbb{R}, V) : \|\varphi\|_L < \infty \}$$

der Raum aller stetigen Kurven $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow V$ mit endlicher *gewichteter Norm*

$$\|\varphi\|_L := \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\varphi(t)\| e^{-2L|t|}.$$

Eine Cauchyfolge in diesem Raum konvergiert gleichmäßig auf jedem beschränkten t -Intervall I . Daher bildet E mit dieser Norm einen Banachraum Λ_{-1} .

Die Teilmenge aller solcher Kurven mit Anfangswert x_0 ,

$$X = \{ \varphi \in E : \varphi(0) = x_0 \} \subset E,$$

ist abgeschlossen in E . Definieren wir den Operator T auf X durch

$$(T\varphi)(t) = x_0 + \int_0^t v(\varphi(s)) \, ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

so ist φ eine Lösung des Awps genau dann, wenn $\varphi \in X$ und $T\varphi = \varphi$.

Wir zeigen die Existenz eines solchen Fixpunkts mithilfe des Banachschen Fixpunktsatzes $\S 6$. Zwei Dinge sind hierfür zu zeigen.

a. T ist wohldefiniert und bildet X in sich ab Offensichtlich ist $\psi = T\varphi$ eine stetige Kurve in V mit $\psi(0) = x_0$. Damit ψ auch wieder zu X gehört, müssen wir $\|\psi\|_L < \infty$ zeigen. — Nun ist

$$\begin{aligned} \|\psi(t) - x_0\| &\leq \int_0^{|t|} \|v(\varphi(s))\| \, ds \\ &\leq \int_0^{|t|} (\|v(\varphi(s)) - v(x_0)\| + \|v(x_0)\|) \, ds \\ &\leq \int_0^{|t|} (L \|\varphi(s) - x_0\| + \|v(x_0)\|) \, ds. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\|\varphi(s) - x_0\| \leq \|\varphi - x_0\|_L e^{2L|s|}$$

aufgrund der Definition von $\|\cdot\|_L$ und $\int_0^{|t|} L e^{2Ls} \, ds \leq \frac{1}{2} e^{2L|t|}$. Damit erhalten wir

$$\|\psi(t) - x_0\| \leq \|\varphi - x_0\|_L e^{2L|t|} + |t| \|v(x_0)\|.$$

Also ist

$$\|\psi - x_0\|_L = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\psi(t) - x_0\| e^{-2L|t|} < \infty.$$

b. T ist eine Kontraktion auf X Seien $\varphi, \psi \in X$. Aufgrund der Integralgleichung gilt dann

$$\begin{aligned} \|(T\varphi - T\psi)(t)\| &\leq \int_0^{|t|} \|v(\varphi(s)) - v(\psi(s))\| \, ds \\ &\leq \int_0^{|t|} L \|\varphi(s) - \psi(s)\| \, ds \\ &\leq \|\varphi - \psi\|_L \int_0^{|t|} L e^{2Ls} \, ds \\ &\leq \frac{1}{2} \|\varphi - \psi\|_L e^{2L|t|}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\|T\varphi - T\psi\|_L = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|(T\varphi - T\psi)(t)\| e^{-2L|t|} \leq \frac{1}{2} \|\varphi - \psi\|_L.$$

Somit ist $T: X \rightarrow X$ eine Kontraktion mit dem Faktor $1/2$.

Schluss Somit ist der Banachsche Fixpunktsatz $\S 6$ anwendbar, und T besitzt einen eindeutigen Fixpunkt $\varphi \in X$. Dieser ist die gesuchte Lösung des Awps. Deren Eindeutigkeit hatten wir bereits gezeigt $\S 8$. \gggg

Der Banachsche Fixpunktsatz liefert mit seinem Zusatz $\S 7$ zugleich ein Verfahren zur *Konstruktion* eines Fixpunktes von T . Im Zusammenhang mit gewöhnlichen Differenzialgleichungen ist dies bekannt als das *Iterationsverfahren von Picard-Lindelöf*.

- 10 **Satz von Picard-Lindelöf** Sei v ein lipschitzstetiges Vektorfeld auf V . Dann ist die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x} = v(x), \quad x(0) = x_0,$$

der Limes der Folge von Kurven $T^n x_0$ mit

$$(T\varphi)(t) = x_0 + \int_0^t v(\varphi(s)) \, ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Diese Folge konvergiert gleichmäßig auf jedem kompakten Zeitintervall gegen die Lösung. \times

\llll Der Zusatz zum Banachschen Fixpunktsatz $\S 7$ sagt aus, dass für jeden beliebigen Startwert $\varphi_0 \in X$ die Folge $(T^n \varphi_0)_{n \geq 0}$ in der Norm des Banachraumes E gegen den Fixpunkt $\varphi \in X$ von T konvergiert. Ein solcher Startwert ist zum Beispiel die konstante Kurve $\varphi_0 \equiv x_0$, und Konvergenz in der Norm $\|\cdot\|_L$ impliziert gleichmäßige Konvergenz auf jedem kompakten t -Intervall. \gggg

► Jedes lineare Vektorfeld

$$A: V \rightarrow V, \quad x \mapsto Ax$$

ist global lipschitzstetig. Wenden wir das Picard-Lindelöfsche Iterationsverfahren auf das zugehörige Awp an, so erhalten wir $\varphi_0(t) \equiv x_0$,

$$\varphi_1(t) = x_0 + \int_0^t A\varphi_0(s) \, ds = x_0 + Atx_0,$$

$$\varphi_2(t) = x_0 + \int_0^t A\varphi_1(s) \, ds = x_0 + Atx_0 + \frac{1}{2}A^2t^2x_0,$$

und allgemein mit Induktion

$$\varphi_n(t) = \left(\sum_{k=0}^n \frac{A^k t^k}{k!} \right) x_0.$$

Im Limes erhält man die Lösung $\varphi(t) = e^{At}x_0$, wobei wir aufgrund des letzten Satzes bereits wissen, dass diese Reihe auf jedem kompakten t -Intervall gleichmäßig konvergiert. ◀

■ Der nichtautonome Fall

Die Beweise der letzten drei Sätze bleiben *unverändert* gültig, wenn das Vektorfeld zusätzlich stetig von der Zeit t abhängt. Lipschitzstetigkeit in t ist *nicht* erforderlich, wir müssen lediglich verlangen, dass die Lipschitzstetigkeit in der Ortsvariablen x gleichmäßig für alle t gilt.

- 11 **Zusatz** *Der Existenz- und Eindeutigkeitsatz \circ und der Satz von Picard-Lindelöf $\textcircled{10}$ gelten ebenfalls für nichtautonome Vektorfelder*

$$v: \mathbb{R} \times V \rightarrow V, \quad (t, x) \mapsto v(t, x),$$

die stetig in der Zeitvariable und gleichmäßig lipschitzstetig in der Ortsvariable in dem Sinne sind, dass es ein $L \geq 0$ gibt, so dass

$$\|v(t, x) - v(t, y)\| \leq L \|x - y\|$$

für alle $x, y \in V$ und $t \in \mathbb{R}$. ✕

■ Stetige Abhängigkeit

Bis jetzt haben wir die Lösungen eines Anfangswertproblems als individuelle Kurven betrachtet, also als Funktionen nur von t . Nun betrachten wir sie auch als Funktion des Anfangswerts x_0 . Dies machen wir sichtbar, indem wir $\varphi(t, x_0)$ oder $\varphi^t(x_0)$ oder $\varphi_{x_0}(t)$ für die Lösung zum Anfangswert x_0 schreiben. Die Integralgleichung $_3$ lautet damit

$$\varphi^t(x_0) = x_0 + \int_0^t v(\varphi^s(x_0)) \, ds.$$

- 12 **Stetigkeitssatz** Sei v ein L -lipschitzstetiges Vektorfeld auf ganz V . Für seine Lösungskurven gilt dann

$$\|\varphi^t(x) - \varphi^t(y)\| \leq e^{L|t|} \|x - y\|$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $x, y \in V$. \times

«»» Aus den Integralgleichungen für $\varphi^t(x)$ und $\varphi^t(y)$ folgt für $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \|\varphi^t(x) - \varphi^t(y)\| &\leq \|x - y\| + \int_0^t \|v(\varphi^s(x)) - v(\varphi^s(y))\| \, ds \\ &\leq \|x - y\| + L \int_0^t \|\varphi^s(x) - \varphi^s(y)\| \, ds. \end{aligned}$$

Wenden wir das Lemma von Gronwall $_4$ auf

$$u(t) = \|\varphi^t(x) - \varphi^t(y)\|$$

an, so erhalten wir die Behauptung für $t \geq 0$. Den Fall $t \leq 0$ führt man hierauf zurück. »»»

Bemerkungen a. Das exponentielle Anwachsen der oberen Schranke ist im Allgemeinen nicht zu verbessern. Für die Lösungen von $\dot{x} = ax$ auf \mathbb{R} mit $a \neq 0$ gilt ja bereits

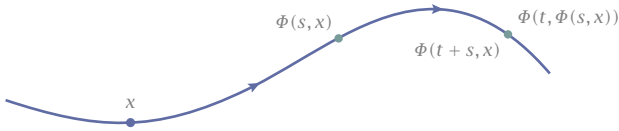
$$|\varphi^t(x_0) - \varphi^t(0)| = |e^{at}x_0 - e^{at}0| = e^{at}|x_0 - 0|.$$

Entsprechendes gilt, wenn man lineare Differenzialgleichungen $\dot{x} = Ax$ mit Diagonalmatrizen A betrachtet.

b. Fixieren wir ein kompaktes Zeitintervall $[a, b]$ um 0, so hängen die Lösungen *gleichmäßig* vom Anfangswert ab. Denn es gilt ja

$$\|\varphi_x - \varphi_y\|_{[a, b]} = \sup_{t \in [a, b]} \|\varphi_x(t) - \varphi_y(t)\| \leq e^{L(b-a)} \|x - y\|.$$

Abb 3 Flusseigenschaft



Auf einem beschränkten Zeitintervall ist der Abstand verschiedener Lösungskurven also gleichmäßig klein, wenn nur ihre Anfangswerte hinreichend kleinen Abstand haben.

c. Mit der im Beweis des Existenzsatzes φ eingeführten Norm $\|\varphi\|_L$ folgt aus dem Stetigkeitssatz auch

$$\|\varphi_x - \varphi_y\|_L \leq \|x - y\|.$$

Der Operator

$$I: V \rightarrow E, \quad x \mapsto \varphi_x,$$

der jedem Anfangswert in $x \in V$ seine entsprechende Lösungskurve $\varphi_x \in E$ zuordnet, ist also *lipschitzstetig* bezüglich $\|\cdot\|_L$. Dies bedeutet jedoch *nicht*, dass die Lösungen auf ganz \mathbb{R} in der Supremumsnorm stetig von den Anfangswerten abhängen!

d. Vielmehr ist es so, dass auf *beliebig langen* Zeitintervallen noch so kleine Abstände exponentiell anwachsen können. Dies ist der sogenannte *Effekt der empfindlichen Abhängigkeit von den Anfangswerten* und die Ursache chaotischen Verhaltens, das in vielen Systemen beobachtet werden kann. \rightarrow

17.3

Flüsse

Ist das Vektorfeld v lipschitz auf V , so definieren alle seine - eindeutigen - Lösungskurven zu allen Anfangswerten zusammen eine Abbildung

$$\Phi: \mathbb{R} \times V \rightarrow V, \quad \Phi(t, x) = \varphi^t(x) = \varphi_x(t),$$

genannt der *Fluss* oder die *Flussabbildung* des Vektorfeldes. Aufgrund des Stetigkeitssatzes $_{12}$ ist sie stetig in x , und aufgrund der Konstruktion sogar differenzierbar in t .

- 13 **Flusssatz** Ist das Vektorfeld v lipschitz auf V , so gilt für seine Flussabbildung

$$\Phi(0, x) = x,$$

$$\Phi(t + s, x) = \Phi(t, (\Phi(s, x)))$$

für alle $x \in V$ und alle $s, t \in \mathbb{R}$. \times

⟨⟨⟨ Da $\Phi(t, x)$ die Lösungskurve zum Anfangswert x bezeichnet, ist natürlich $\Phi(0, x) = x$ für alle x . Betrachten wir beide Seiten der zweiten Gleichung als Funktion von t bei festem s , so sind *beide* Lösungskurven desselben Vektorfeldes v mit demselben Anfangswert $\Phi(s, x)$ bei $t = 0$. Denn es gilt ja

$$\Phi(t + s, x)' = v(\Phi(t + s, x))$$

und

$$\Phi(t, \Phi(s, x))' = v(\Phi(t, \Phi(s, x))).$$

Aufgrund des Eindeutigkeitsatzes 8 stimmen beide Seiten somit überein. $\rangle\rangle\rangle$

Die Gleichung

$$\Phi(t + s, x) = \Phi(t, (\Phi(s, x)))$$

bedeutet, dass es keinen Unterschied macht, ob ich vom Punkt x der Lösungskurve bis zum Zeitpunkt s folge und $\Phi(s, x)$ als Anfangswert einer weiteren Lösungskurve bis zum Zeitpunkt t wähle, oder ob ich gleich von x ohne Zwischenstopp bis zum Zeitpunkt $t + s$ fortschreite Abb 3.

■ Zeit- t -Abbildungen

Wir wechseln jetzt die Perspektive und betrachten die Flussabbildung nicht als Bündel von Lösungskurven, sondern als Familie von *Zeit- t -Abbildungen*

$$\Phi^t : V \rightarrow V, \quad x \mapsto \Phi^t(x) = \Phi(t, x).$$

Diese bildet also jeden Punkt $x \in V$ auf den Punkt $\Phi^t(x)$ der Lösungskurve mit Anfangswert x ab.

- 14 **Satz** Die Familie der Zeit- t -Abbildungen $(\Phi^t)_{t \in \mathbb{R}}$ eines lipschitzstetigen Vektorfeldes auf V bildet eine 1-Parametergruppe von Homöomorphismen von V . Das heißt, jedes Φ^t ist ein Homöomorphismus von V , und es gilt

$$\Phi^0 = \text{id}, \quad \Phi^{t+s} = \Phi^t \circ \Phi^s$$

für alle $t, s \in \mathbb{R}$. \times

⋈⋈⋈ Die Identitäten sind gleichbedeutend mit denen des Flusssatzes $_{13}$ und müssen nicht mehr bewiesen werden. Aus ihnen folgt insbesondere

$$\Phi^t \circ \Phi^{-t} = \Phi^{t-t} = \Phi^0 = \Phi^{-t+t} = \Phi^{-t} \circ \Phi^t.$$

Wegen $\Phi^0 = id$ ist also Φ^t umkehrbar, und die Umkehrabbildung ist

$$(\Phi^t)^{-1} = \Phi^{-t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Da diese stetig sind, ist jede Zeit- t -Abbildung ein Homöomorphismus von V . ⋈⋈⋈

Bemerkungen a. Der Fluss eines Vektorfeldes definiert somit einen *Homomorphismus* der additiven Gruppe \mathbb{R} in die Gruppe $\text{Hom}(V)$ der Homöomorphismen auf V :

$$\Phi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\text{Hom}(V), \circ), \quad t \mapsto \Phi^t.$$

Eine solche Familie von Abbildungen wird auch als *dynamisches System mit kontinuierlicher Zeit* bezeichnet.

b. Der Satz verallgemeinert das entsprechende Resultat für lineare Vektorfelder A . Dort war ja

$$\Phi^t = e^{At} : V \rightarrow V$$

eine 1-Parametergruppe von *linearen* Isomorphismen von V . Die Gruppenstruktur war dort eine algebraische Identität, die wir ohne den EE-Satz zeigten. \rightarrow

■ Differenzierbarkeit

Ein lipschitzstetiges Vektorfeld generiert also eine 1-Parametergruppe von *Homöomorphismen* des Vektorraumes V . Ist das Vektorfeld darüber hinaus stetig differenzierbar, so gilt dasselbe auch für seine Flussabbildung.

- 15 **Satz** *Ist das lipschitzstetige Vektorfeld v auf V stetig differenzierbar, so ist jede Zeit- t -Abbildung Φ^t seines Flusses ein Diffeomorphismus von V . \times*

Da wir bereits wissen, dass es sich bei den Zeit- t -Abbildungen um Homöomorphismen handelt, ist nur noch deren stetige Differenzierbarkeit zu zeigen. Es genügt daher, Folgendes zu beweisen.

- 16 **Proposition** *Ist das lipschitzstetige Vektorfeld v stetig differenzierbar, so ist jede Zeit- t -Abbildung Φ^t seines Flusses ebenfalls stetig differenzierbar. Seine Ableitung $\Lambda^t := D\Phi^t(x)$ ist die eindeutige Lösung des nichtautonomen linearen Anfangswertproblems*

$$\dot{\Lambda} = A(t)\Lambda, \quad \Lambda(0) = \text{Id}, \tag{4}$$

mit $A(t) := Dv(\Phi^t(x))$. \times

Dieses Awp ergibt sich wie folgt. Falls wir die Differentialgleichung

$$\dot{\Phi}^t(x) = v(\Phi^t(x))$$

nach x differenzieren und Differenziation nach x und t vertauschen dürfen, so erhalten wir die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} (D\Phi^t(x))' &= D(\dot{\Phi}^t(x)) \\ &= D(v(\Phi^t(x))) \\ &= Dv(\Phi^t(x))D\Phi^t(x). \end{aligned}$$

Ihr Anfangswert ist $D\Phi^0(x) = \text{Id}$, da ja $\Phi^0 = \text{id}$. Fixieren wir also x , so erhalten wir genau das behauptete Awp für $\Lambda(t) := D\Phi^t(x)$.

Die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung ist kein Problem:

- 17 **Lemma** Ist das Vektorfeld v auf V lipschitz und C^1 , so besitzt das Anfangswertproblem (4) eine für alle t definierte eindeutige Lösung. \times

⟨⟨⟨ Ist v stetig differenzierbar, so ist die Abbildung

$$A: \mathbb{R} \rightarrow L(V), \quad A(t) = Dv(\Phi^t(x))$$

stetig und gleichmäßig beschränkt in der Operatornorm von $L(V)$ durch die globale Lipschitzkonstante von v . Somit können wir $\dot{\Lambda} = A(t)\Lambda$ auffassen als eine stetig von t abhängende lipschitzstetige Differentialgleichung auf dem Vektorraum $L(V)$. Der Zusatz zum Existenz- und Eindeutigkeitssatz₁₁ liefert dazu die gewünschte eindeutige Lösung. ⟩⟩⟩

⟨⟨⟨ *Beweis der Proposition* Wir zeigen, dass

$$W^t(h) := \Phi^t(x+h) - \Phi^t(x) - \Lambda^t h = o(\|h\|).$$

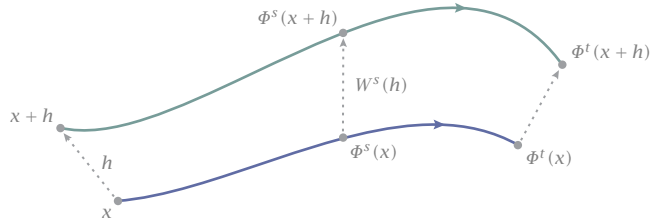
Dann ist Λ^t von (4) die Ableitung der Flussabbildung. — Aufgrund des Hauptsatzes gilt

$$\begin{aligned} \Lambda^t h &= h + \int_0^t A(s)\Lambda^s h \, ds, \\ \Phi^t(x) &= x + \int_0^t v(\Phi^s(x)) \, ds, \\ \Phi^t(x+h) &= x+h + \int_0^t v(\Phi^s(x+h)) \, ds. \end{aligned}$$

Also ist

$$W^t(h) = \int_0^t (v(\Phi^s(x+h)) - v(\Phi^s(x)) - A(s)\Lambda^s h) \, ds.$$

Abb 4
Zum Beweis der
Proposition



Mit $\Lambda^S h = \Phi^S(x+h) - \Phi^S(x) - W^S(h)$ wird dies zu

$$\begin{aligned} W^t(h) &= \int_0^t (\nu(\Phi^S(x+h)) - \nu(\Phi^S(x)) - A(s)(\Phi^S(x+h) - \Phi^S(x))) \, ds \\ &\quad + \int_0^t A(s)W^S(h) \, ds \\ &= \int_0^t \Delta(s) \, ds + \int_0^t A(s)W^S(h) \, ds \end{aligned}$$

mit

$$\Delta(s) = \nu(\Phi^S(x+h)) - \nu(\Phi^S(x)) - A(s)(\Phi^S(x+h) - \Phi^S(x)).$$

Aufgrund der gleichmäßigen Lipschitzstetigkeit von ν ist $\|A(s)\| \leq L$ für alle s und x . Also folgt

$$\|W^t(h)\| \leq \int_0^t \|\Delta(s)\| \, ds + L \int_0^t \|W^S(h)\| \, ds.$$

Mit einer Variante des Lemmas von Gronwall _{A-12} gilt dann

$$\|W^t(h)\| \leq \int_0^t \|\Delta(s)\| e^{L(t-s)} \, ds.$$

Mit $A(s) = D\nu(\Phi^S(x))$ und dem Mittelwertsatz ist nun

$$\|\Delta(s)\| \leq \sup_{\xi \in I(s)} \|D\nu(\xi) - D\nu(\Phi^S(x))\| \|\Phi^S(x+h) - \Phi^S(x)\|$$

mit $I(s) = [(\Phi^S(x+h), \Phi^S(x))]$. Aufgrund des Stetigkeitssatzes ₁₂ ist

$$\|\Phi^S(x+h) - \Phi^S(x)\| = O(\|h\|).$$

Andererseits gilt $\xi \rightarrow \Phi^S(x)$ für $h \rightarrow 0$, und deshalb

$$\|D\nu(\xi) - D\nu(\Phi^S(x))\| \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0.$$

Also ist $\|\Delta^t(h)\| = o(\|h\|)$ und damit $\|W^t(h)\| = o(\|h\|)$, wie zu zeigen war. \gggg

■ Variationsgleichung

Für die Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangswerten ergibt sich daraus Folgendes. Setzen wir

$$\xi(t) = D\Phi^t(x)h = \Lambda(t)h,$$

so gilt

$$\Phi^t(x+h) = \Phi^t(x) + \xi(t) + o(h),$$

wobei die Kurve ξ der *Variationsgleichung*

$$\dot{\xi} = A(t)\xi, \quad \xi(0) = h,$$

entlang der Kurve $\Phi^t(x)$ genügt. Sie beschreibt in erster Näherung die Änderung einer Lösungskurve bei kleinen Änderungen des Anfangswertes.

■ Höhere Regularität

Besitzt das Vektorfeld höhere Regularitätseigenschaften, so vererben sich diese auf den Fluss.

- 18 Satz** *Ist das Vektorfeld v auf V von der Klasse C^r , wobei $1 \leq r \leq \infty$, so ist seine Flussabbildung Φ ebenfalls C^r . \times*

⟨⟨⟨ Für $r = 1$ ist die Behauptung bereits bewiesen¹⁵. Wir gehen daher induktiv davon aus, dass die Behauptung für irgendein $r \geq 1$ gilt, und beweisen deren Gültigkeit für $r + 1$.

Sei also v ein C^{r+1} -Vektorfeld. Betrachte das Differenzialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v(x), \\ \dot{u} &= Dv(x)u, \end{aligned} \tag{5}$$

und das zugehörige Vektorfeld

$$w : V \times V \rightarrow V \times V, \quad w(x, u) = \begin{pmatrix} v(x) \\ Dv(x)u \end{pmatrix}.$$

Dieses ist C^r auf $V \times V$. Also ist nach Induktionsannahme auch seine Flussabbildung Ψ von der Klasse C^r . Diese Flussabbildung ist aber gerade

$$\Psi^t(x, u) = \begin{pmatrix} \Phi^t(x) \\ D\Phi^t(x)u \end{pmatrix},$$

denn die zweite Gleichung in (5) ist gerade die Variationsgleichung der ersten Gleichung¹⁶. Also ist nach Induktionsannahme $D\Phi^t$ eine C^r -Abbildung. Dasselbe gilt für Φ^t aufgrund der Differenzialgleichung. Also ist Φ selbst eine C^{r+1} -Abbildung, und die Induktion ist abgeschlossen. $\rangle\rangle\rangle$

17.4

Der lokale EE-Satz

Bis jetzt gingen wir davon aus, dass ein Vektorfeld auf ganz V definiert und dort lipschitz ist. Das ist natürlich nicht immer der Fall.

► A. Die Differentialgleichung $\dot{x} = x^2$ ist auf ganz \mathbb{R} erklärt, aber nicht gleichmäßig lipschitzstetig. Tatsächlich hat jede nichttriviale Lösung

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - x_0 t}, \quad x_0 \neq 0,$$

eine Singularität.

B. Die Differentialgleichung $\dot{x} = x^{-2}$ hat eine Singularität im Punkt 0, und die Lösung

$$x(t) = \sqrt[3]{3t + 1}$$

erreicht diesen Punkt in endlicher Zeit, verlässt also den Definitionsbereich der Differentialgleichung. ◀

Lösungen existieren im Allgemeinen also nicht für alle Zeiten. Aber jedes Anfangswertproblem eines *lokal lipschitzstetigen* Vektorfeldes besitzt immer eine eindeutige lokale und sogar *maximale Lösung*. Dazu benötigen wir einige Fakten über lipschitzstetige Abbildungen.

■ Lipschitzstetige Vektorfelder

Definition Ein Vektorfeld v auf einem Gebiet $\Omega \subset V$ heißt *lokal lipschitzstetig*, wenn zu jedem Punkt in Ω eine Umgebung $U \subset \Omega$ und ein $L \geq 0$ existiert, so dass v auf U L -lipschitzstetig ist. ✕

► A. Das Vektorfeld v auf \mathbb{R} mit $v(x) = x^2$ ist lokal lipschitz.

B. Jedes C^1 -Vektorfeld auf einem Gebiet ist lokal lipschitz aufgrund des Schrankensatzes _{14.16}.

C. Das Vektorfeld $x \mapsto x^{2/3}$ ist im Punkt $0 \in \mathbb{R}$ *nicht* lokal lipschitz. ◀

19 **Lemma K** Ist v auf dem Gebiet Ω lokal lipschitz, so ist v auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset \Omega$ gleichmäßig lipschitz. ✕

◀◀◀ Sei $K \subset \Omega$ kompakt. Wäre v *nicht* gleichmäßig lipschitz auf K , so existierten zu jedem $n \geq 1$ Punkte $x_n \neq y_n$ in K derart, dass

$$\|v(x_n) - v(y_n)\| \geq n \|x_n - y_n\|.$$

Also ist

$$\|x_n - y_n\| \leq \frac{2}{n} \sup_{x \in K} \|v(x)\| \leq \frac{2M}{n}, \quad n \geq 1,$$

denn $\|v\|$ ist auf K stetig und daher beschränkt.

Da K kompakt ist, besitzt die Folge (x_n) eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert $p \in K$. Die entsprechende Teilfolge von (y_n) konvergiert dann wegen der vorangehenden Abschätzung ebenfalls gegen p . Da aber v in einer Umgebung von p Lipschitz ist, ergibt sich für hinreichend große n ein Widerspruch zur Wahl von x_n und y_n . \gggg

Lipschitzstetige Funktionen auf kompakten Teilmengen eines normierten Raumes lassen sich nun zu Lipschitzstetigen Funktionen auf dem gesamten Raum fortsetzen, ohne die Lipschitzkonstante zu verschlechtern.

20 Lemma L Sei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ L -Lipschitz auf einer nichtleeren abgeschlossenen Teilmenge M von V . Dann existiert eine Fortsetzung $\phi: V \rightarrow \mathbb{R}$ von f mit derselben Lipschitzkonstante L . \times

\llll Nach Voraussetzung gilt

$$|f(u) - f(v)| \leq L \|u - v\|, \quad u, v \in M. \quad (6)$$

Fixieren wir irgendein u_0 in M , so gilt für jedes $x \in V$ und $u \in M$ aufgrund der Dreiecksungleichung die obere Abschätzung

$$\begin{aligned} f(u) - L \|x - u\| &\leq f(u_0) + |f(u) - f(u_0)| - L \|x - u\| \\ &\leq f(u_0) + L \|u - u_0\| - L \|x - u\| \\ &\leq f(u_0) + L \|x - u_0\|. \end{aligned}$$

Die linke Seite ist somit für alle $u \in M$ gleichmäßig beschränkt und damit

$$\phi: V \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(x) := \sup_{u \in M} (f(u) - L \|x - u\|)$$

wohldefiniert. Aus (6) folgt andererseits $f(v) \geq f(u) - L \|v - u\|$ und deshalb

$$\sup_{u \in M} (f(u) - L \|v - u\|) = f(v), \quad v \in M.$$

Also ist $\phi = f$ auf M und damit ϕ eine Fortsetzung von f auf ganz V .

Nun gilt für jedes $y \in V$

$$\phi(x) \geq f(u) - L \|y - u\| - L \|x - y\|, \quad u \in M.$$

Also gilt dies auch für das Supremum über $u \in M$ und deshalb

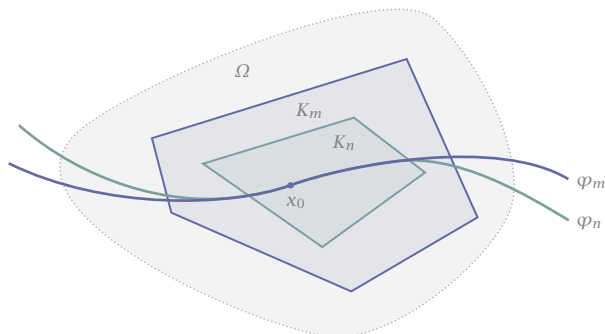
$$\phi(x) \geq \phi(y) - L \|x - y\|.$$

Dasselbe gilt mit den Rollen von x und y vertauscht, so dass wir insgesamt

$$|\phi(x) - \phi(y)| \leq L \|x - y\|$$

erhalten. Somit ist ϕ L -Lipschitz auf V . \gggg

Abb 5 Konstruktion einer maximalen Lösungskurve



Korollar Jedes lipschitzstetige Vektorfeld auf einer kompakten Menge in V besitzt eine lipschitzstetige Fortsetzung auf ganz V . ✕

«»» Wähle eine beliebige Basis in V , und setze jede einzelne Komponentenfunktion mit dem vorangehenden Lemma auf ganz V fort. Die Behauptung für die daraus resultierende Fortsetzung des gesamten Vektorfeldes folgt, weil alle Normen in V äquivalent sind. »»»

■ Lokale Lösungen

21 **Lokaler EE-Satz** Das Vektorfeld v sei auf einem Gebiet Ω lokal lipschitzstetig. Dann besitzt jedes zugehörige Anfangswertproblem eine eindeutige maximale Lösung. ✕

«»» Zu jedem Gebiet Ω existiert eine Ausschöpfung

$$K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset \Omega, \quad \bigcup_{n \geq 1} K_n = \Omega,$$

durch kompakte Teilmengen - zum Beispiel

$$K_n = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \Omega^c) \geq 1/n \wedge \|x\| \leq n\}.$$

Aufgrund von Lemma K₁₉ ist die Einschränkung $v|_{K_n}$ gleichmäßig lipschitzstetig, und aufgrund von Lemma L₂₀ kann es von dort zu einem gleichmäßig lipschitzstetigen Vektorfeld v_n auf ganz V fortgesetzt werden.

Ist $x_0 \in \Omega$ ein beliebiger Anfangswert, so ist $x_0 \in K_{n_0}$ für ein $n_0 \geq 1$. Für jedes $n \geq n_0$ existiert dann eine eindeutige globale Lösung φ_n zum Vektorfeld v_n und Anfangswert x_0 , und zu dieser ein größtes offenes Intervall $I_n \ni 0$ mit

der Eigenschaft

$$\varphi_n(I_n) \subset K_n.$$

Eventuell gilt auch $\varphi_n(I_n^-) \subset K_n$, aber das ist unerheblich. Wegen $K_n \subset K_{n+1}$ gilt auch $I_n \subset I_{n+1}$ für $n \geq n_0$ sowie

$$\varphi_m|_{I_n} = \varphi_n, \quad m \geq n.$$

Setze jetzt

$$J := \bigcup_{n \geq n_0} I_n$$

und definiere $\varphi: J \rightarrow \Omega$ durch $\varphi|_{I_n} = \varphi_n$. Aufgrund des Eindeutigkeitsatzes 8 ist φ eine wohldefinierte Lösung zum Anfangswert x_0 innerhalb von Ω .

Um ihre Maximalität zu zeigen, betrachte beispielsweise

$$J_+ = J \cap [0, \infty) = [0, b), \quad 0 < b \leq \infty.$$

Ist $b = \infty$, so ist J_+ sicher maximal. Sei also $b < \infty$. Gäbe es eine Lösung zum selben Anfangswert über den Zeitpunkt b hinaus, so existierte $\lim_{t \nearrow b} \varphi(t)$, und der kompakte Kurvenabschnitt $\varphi([0, b])$ wäre im Innern einer der kompakten Mengen K_n enthalten. Dies aber widerspricht der Definition der Intervalle I_n und J . Somit ist J_+ maximal. \gggg

Der *maximale Fluss* eines Vektorfeldes v ist die Bündelung aller seiner maximalen Lösungskurven. Wir setzen

$$\Xi = \bigcup_{x \in \Omega} J_x \times \{x\} = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \Omega : t \in J_x\},$$

wobei J_x das maximale Existenzintervall der Lösungskurve zum Anfangswert x bezeichnet, und definieren

$$\Phi: \Xi \rightarrow \Omega, \quad (t, x) \mapsto \varphi(t, x).$$

- 22 **Satz** Die Menge Ξ ist eine offene Umgebung von $\{0\} \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \Omega$, und Φ ist ein maximaler Fluss auf Ω bestehend aus maximalen Lösungskurven des Vektorfeldes v . \times

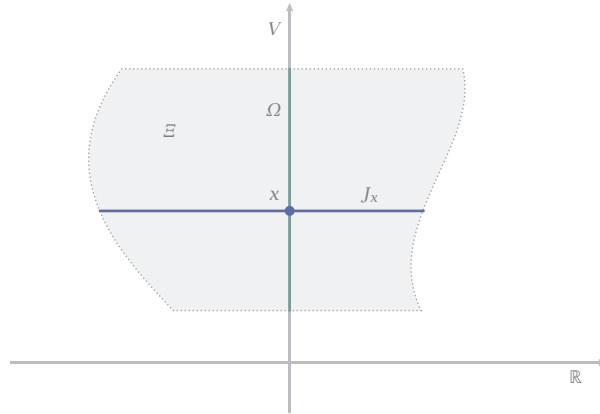
\llll Dies ist als Übung überlassen 6. \gggg

Lokal gilt für den maximalen Fluss dasselbe wie für den globalen Fluss im Flusssatz 13, also

$$\Phi^0(x) = x, \quad \Phi^{t+s} = \Phi^t(\Phi^s(x)),$$

wann immer alle Ausdrücke definiert sind.

Abb 6

Die Menge \mathcal{E} 

17.5

Konjugation von Vektorfeldern und Flüssen

Um eine Differenzialgleichung zu verstehen, kann man nach geeigneten Koordinaten suchen, in denen sie besonders einfach wird – das ist die sogenannte *Transformationsmethode*. Damit stellt sich die Frage, wie sich Vektorfelder und Differenzialgleichungen unter Koordinatentransformationen überhaupt transformieren.

- Transformation von Vektorfeldern

Gegeben seien ein Vektorfeld v auf einem Gebiet Ω in V und ein Diffeomorphismus

$$T: \Omega \rightarrow \Theta$$

von Ω auf ein weiteres Gebiet Θ in V . Das transformierte Vektorfeld w auf Θ ist natürlicherweise dadurch charakterisiert, dass T Lösungskurven φ von v in Lösungskurven ψ von w abbildet. Für die Kurve $\psi = T \circ \varphi$ soll also gelten

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= (T \circ \varphi)' = (DT \circ \varphi)\dot{\varphi} = (DT \circ \varphi)v(\varphi) \\ &\stackrel{!}{=} w(\psi) = w(T \circ \varphi). \end{aligned}$$

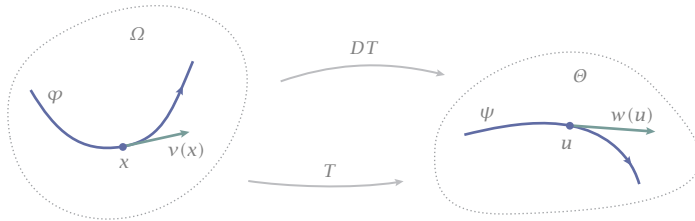
Vergleich beider Gleichungen ergibt

$$w(T \circ \varphi) = (DT \circ \varphi)v(\varphi).$$

Betrachten wir $\varphi = \varphi(t, x)$ zum Zeitpunkt $t = 0$, so erhalten wir

$$w(T(x)) = DT(x)v(x), \quad x \in \Omega.$$

Abb 7 Zum Transformationsgesetz



Damit erhalten wir folgendes

- 23 **Transformationsgesetz** Ein Diffeomorphismus $T: \Omega \rightarrow \Theta$ transformiert ein Vektorfeld v auf Ω in ein Vektorfeld w auf Θ gemäß der Gleichung

$$w \circ T = DT \cdot v. \quad \times$$

Diese Gleichung lässt sich sowohl nach v als auch nach w auflösen. Auflösen nach w ergibt

$$w = DT \cdot v \circ T^{-1} =: T_* v.$$

Man transportiert also v von Ω mit der Tangentialabbildung DT weiter nach Θ , weshalb man $T_* v$ den *push forward* von v nennt.

Auflösen nach v ergibt

$$v = DT^{-1} w \circ T =: T^* w.$$

Man holt also w mit der inversen Tangentialabbildung DT^{-1} von Θ zurück nach Ω , weshalb man $T^* w$ den *pull back* von w nennt. Beide Gleichungen sind äquivalent, aber die zweite ist technisch meist einfacher, da nur die lineare Abbildung DT invertiert wird statt der im Allgemeinen nichtlinearen Abbildung T .

Definition Zwei Vektorfelder v auf Ω und w auf Θ heißen *C^1 -konjugiert*, falls es einen Diffeomorphismus $T: \Omega \rightarrow \Theta$ gibt, so dass $T_* v = w$. \times

Bemerkung a. Der push forward $T_* v$ ist auch erklärt, wenn T nicht surjektiv ist, sondern eine sogenannte *Einbettung*.

b. Der pull back $T^* w$ ist auch erklärt, wenn T nur ein *lokaler*, aber kein globaler Diffeomorphismus ist. Dies ist beispielsweise bei den Polarkoordinaten der Fall – siehe nächstes Beispiel.

c. Praktisch transformiert man Vektorfelder durch direktes Differenzieren der Gleichung $\psi = T \circ \varphi$ statt die Transformationsformel zu bemühen. \rightarrow

► A. Sei $\dot{x} = Ax$ und $y = Tx$ mit einem linearen Isomorphismus $T: V \rightarrow V$. Dann ist

$$\dot{y} = (Tx)' = T\dot{x} = TAx \stackrel{!}{=} By = BTx,$$

also $TA = BT$. Somit erhalten wir

$$A = T^*B = T^{-1}BT, \quad B = T_*A = TAT^{-1},$$

wobei T^* hier *nicht* die adjungierte Abbildung zu T bezeichnet.

B. Betrachte das Vektorfeld v mit $v(x) = x^2$ auf $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Mit

$$T: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*, \quad x = -\frac{1}{y}$$

erhält man

$$\dot{x} = x^2 = \frac{1}{y^2} \stackrel{!}{=} \left(-\frac{1}{y}\right)' = \frac{\dot{y}}{y^2},$$

also $\dot{y} = 1$. Also ist

$$T^*v = 1, \quad T_*1 = v,$$

wenn 1 das konstante Vektorfeld mit Wert 1 bezeichnet.

C. Die Abbildung

$$(r, \theta) \mapsto (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

definiert Polarkoordinaten in der Ebene außerhalb des Nullpunkts. Sie ist ein lokaler, jedoch kein globaler Diffeomorphismus. Daher ist lediglich der pull back definiert. Eine direkte Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta, \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta. \end{aligned}$$

Multiplikation der ersten Gleichung mit $x = r \cos \theta$, der zweiten mit $y = r \sin \theta$ und Addition ergibt

$$x\dot{x} + y\dot{y} = r\dot{r} \cos^2 \theta + r\dot{r} \sin^2 \theta = r\dot{r},$$

also

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}.$$

Analog erhält man

$$\dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2}.$$

Diese Gleichungen sind für $r > 0$ wohldefiniert. ◀

■ **Konjugation von Flüssen**

Können zwei Vektorfelder durch einen Diffeomorphismus ineinander transformiert werden, so betrachtet man diese als *äquivalent*. Ihre Lösungskurven werden dann durch diesen Diffeomorphismus aufeinander abgebildet – das war ja auch der Ausgangspunkt des Transformationsgesetzes. Aber nicht nur das – auch ihre Flüsse sind zueinander konjugiert.

Zunächst die Definition. Flüsse bezeichnen wir von nun an wieder mit kleinen griechischen Buchstaben, da sie ohnehin aus Lösungskurven bestehen.

Definition Zwei Flüsse φ auf Ω und ψ auf Θ heißen *lokal C^1 -konjugiert*, falls es einen Diffeomorphismus $T: \Omega \rightarrow \Theta$ gibt, so dass

$$T \circ \varphi^t = \psi^t \circ T$$

in einem offenen t -Intervall um 0 für jeden Anfangswert in Ω . Mit anderen Worten, es kommutiert das in Abbildung 8 links stehende Diagramm. ✕

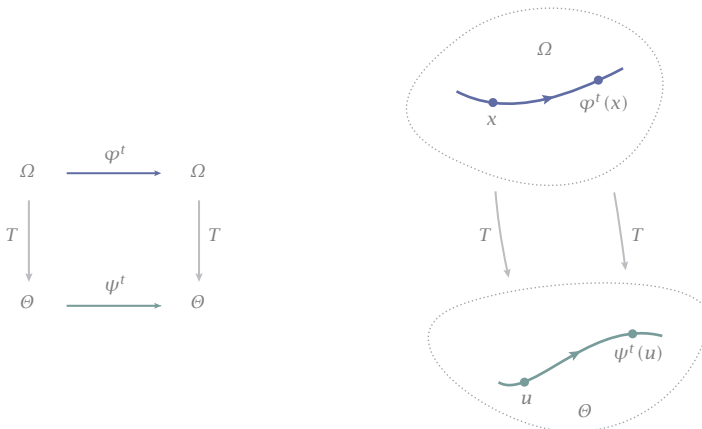
24 **Satz** Zwei Vektorfelder sind C^1 -konjugiert genau dann, wenn ihre Flüsse lokal C^1 -konjugiert sind ✕

⋙⋙⋙⋙ ⇐ Sind die Flüsse lokal konjugiert, so gilt für jedes $x \in \Omega$

$$T \circ \varphi^t = \psi^t \circ T$$

lokal um jeden Punkt auf einem kleinen t -Intervall um 0. Ableiten nach t bei $t = 0$ ergibt dann

Abb 8 Konjugation von Flüssen



$$DT(\varphi^0)\dot{\varphi}^0 = \dot{\psi}^0 \circ T.$$

Mit $\dot{\varphi}^0 = v$ und $\dot{\psi}^0 = w$ folgt

$$DT \cdot v = w \circ T.$$

Also sind auch die Vektorfelder konjugiert.

⇒ Es gelte umgekehrt die letzte Gleichung. Dann gilt lokal um $t = 0$

$$\begin{aligned} (T \circ \varphi^t)' &= DT(\varphi^t)\dot{\varphi}^t = DT(\varphi^t)v(\varphi^t) \\ &= (DT \cdot v) \circ \varphi^t \\ &= (w \circ T) \circ \varphi^t = w(T \circ \varphi^t). \end{aligned}$$

Somit ist $T \circ \varphi^t(x)$ eine lokale Lösungskurve des Vektorfeldes w zum Anfangswert $T(x)$. Dasselbe gilt aber auch für die Kurve $\psi^t(T(x))$. Aufgrund des EE-Satzes ist also $T(\varphi^t(x)) = \psi^t(T(x))$ für kleine t , sprich

$$T \circ \varphi^t = \psi^t \circ T. \quad \gggg$$

Bemerkung Offensichtlich kann man Flüsse auch *topologisch* konjugieren – also per Homöomorphismus –, Vektorfelder aber nicht, da die Jacobische eines Homöomorphismus ja nicht definiert ist. Man nennt daher Vektorfeld *topologisch konjugiert*, wenn ihre Flüsse topologisch konjugiert sind. Dieser wesentlich flexiblere Konjugationsbegriff ist für das Studium dynamischer Systeme wichtig. →

■ Der Rektifizierungssatz

Wir können nun den einfachsten Satz in der Klassifikation von Vektorfeldern beweisen. Er betrifft ihre Gestalt lokal um *reguläre Punkte*.

Definition Ein Punkt p heißt *singulärer Punkt* eines Vektorfeldes v , falls

$$v(p) = 0.$$

Andernfalls heißt er *regulärer Punkt*. ✕

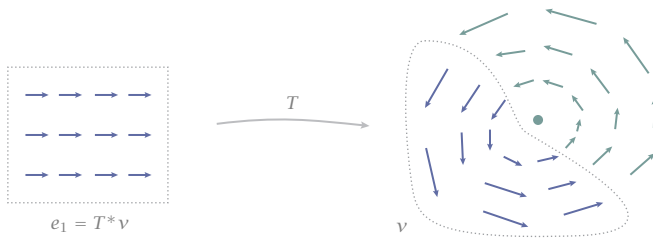
25 **Rektifizierungssatz** Lokal um einen regulären Punkt p ist ein C^1 -Vektorfeld C^1 -konjugiert zu einem konstanten Vektorfeld. ✕

⋄⋄⋄ Wir betrachten den Standardfall eines Vektorfeldes $v = (v_1, \dots, v_n)$ auf dem \mathbb{R}^n . Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass

$$p = 0, \quad v_1(0) \neq 0.$$

Es existiert dann eine Umgebung $I \times U$ von $(0, 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, auf der der Fluss von v erklärt ist und eine C^1 -Abbildung $\varphi: I \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert. Auf einer

Abb 9 Der Rektifizierungssatz



noch festzulegenden kleinen Umgebung W von $0 \in \mathbb{R}^n$ definieren wir damit eine Abbildung

$$T: W \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad u \mapsto T(u) = \varphi^{u_1}(0, \hat{u}),$$

wobei $u = (u_1, \dots, u_n)$ und $\hat{u} = (u_2, \dots, u_n)$. Das Bild von u ist also der Punkt der Lösungskurve zum Anfangswert $(0, \hat{u})$ am Zeitpunkt u_1 - siehe Abbildung 10.

Für diese Abbildung gilt dann

$$\frac{\partial T}{\partial u_1}(0) = \dot{\varphi}^t(0, \hat{u}) \Big|_0 = \dot{\varphi}^0(0) = v(0)$$

und - indem wir erst $t = 0$ setzen und dann nach u_i differenzieren -

$$\frac{\partial T}{\partial u_i}(0) = \frac{\partial \varphi^0}{\partial u_i}(0) = e_i, \quad 2 \leq i \leq n.$$

Also ist

$$DT(0) = \left(\frac{\partial T_i}{\partial u_j} \right) = \begin{pmatrix} v_1(0) & 0 & \dots & 0 \\ v_2(0) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n(0) & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

und somit

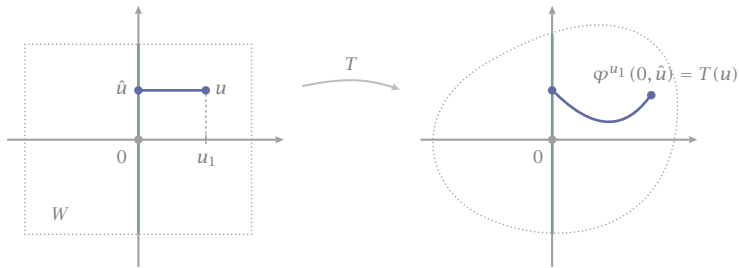
$$\det DT(0) = v_1(0) \neq 0.$$

Also ist T ein *lokaler Diffeomorphismus*. Wählen wir also W hinreichend klein, so ist T ein Diffeomorphismus von W auf eine Umgebung von $T(0) = 0$.

Diese Abbildung T konjugiert die Flüsse von e_1 und v . Der Fluss von e_1 ist

$$\psi^t(u) = u + te_1 = (u_1 + t, u_2, \dots, u_n).$$

Mit der Definition von T folgt

Abb 10 Definition der Abbildung T 

$$\begin{aligned}
 (\varphi^t \circ T)(u) &= \varphi^t \circ \varphi^{u_1}(0, \hat{u}) \\
 &= \varphi^{t+u_1}(0, \hat{u}) \\
 &= T(t + u_1, \hat{u}) = T \circ \psi^t(u).
 \end{aligned}$$

Also gilt

$$\varphi^t \circ T = T \circ \psi^t.$$

Da T die Flüsse von ν und e_1 konjugiert, konjugiert T auch die Vektorfelder selbst ₂₄. >>>>

Damit ist klar, dass reguläre Punkte eines Vektorfeldes *lokal völlig uninteressant* sind. Interessant sind nur die singulären Punkte - wie im richtigen Leben. Dies ist allerdings nur ein *lokales* Bild. Es erlaubt keinerlei Aussage über das globale Verhalten der Lösungskurven - ob es sich beispielsweise um periodische, quasiperiodische oder chaotische Bahnen handelt.

Aufgaben

- 1 Man zeige, dass $E_L = \{\varphi \in C(\mathbb{R}, V) : \|\varphi\|_L < \infty\}$ mit

$$\|\varphi\|_L := \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\varphi(t)\| e^{-L|t|}$$

für jedes $L \geq 0$ einen Banachraum bildet, und $X = \{\varphi \in E_L : \varphi(0) = x_0\}$ für jedes $x_0 \in V$ abgeschlossen in E_L ist.

- 2 **Lokaler Existenz- und Eindeutigkeitsatz** Ist das Vektorfeld v L -lipschitz auf der Kugel $B_r(x_0)$, so besitzt das Awp

$$\dot{x} = v(x), \quad x(0) = x_0$$

für hinreichend kleines $T > 0$ eine eindeutige Lösung $\varphi : [0, T] \rightarrow B_r(x_0)$.

Beweisen sie diesen Satz, indem sie $E_T = \{\varphi \in C([0, T], V)\}$ mit der üblichen Supremumsnorm

$$\|\varphi\|_{[0, T]} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|\varphi(t)\|,$$

$X = \{\varphi \in E_T : \varphi(0) = x_0\}$ betrachten und den Beweis des globalen EE-Satzes 9 entsprechend anpassen.

- 3 Sei v ein lediglich stetiges, aber beschränktes Vektorfeld auf V und

$$\varphi_n : [0, 1] \rightarrow V, \quad n \geq 1,$$

eine Folge von Lösungen von $\dot{x} = v(x)$. Konvergiert $\varphi_n(0)$, so konvergiert eine Teilfolge von φ_n gleichmäßig auf $[0, 1]$ gegen eine Lösung von $\dot{x} = v(x)$. *Hinweis:* Satz von Arzelà-Ascoli 12.1.

- 4 Zeigen sie mit der vorangehenden Aufgabe, dass die stetige Abhängigkeit von Lösungen von den Anfangswerten aus der Existenz und Eindeutigkeit dieser Lösungen folgt (Existenz und Eindeutigkeit impliziert Stetigkeit).

- 5 Für die Lösungskurven eines lokal lipschitzstetigen Vektorfeldes gilt genau eine der drei folgenden Möglichkeiten. Eine Lösungskurve $\varphi : I \rightarrow V$ ist

- eine *konstante Abbildung*: $\varphi(t) = p$ für alle t , oder
- eine *injektive Immersion*, oder
- eine *periodische Immersion*: $\varphi(t + T) = \varphi(t)$ für ein $T > 0$ und alle t .

Hinweis: Eine *Immersion* ist eine differenzierbare Abbildung, deren Ableitung überall maximalen Rang hat.

- 6 Beweisen sie Satz 22 zum maximalen Fluss.

- 7 Beweisen sie den Existenzsatz von Peano 2 auf folgende Weise.

- Wählen sie eine hinreichend kleine abgeschlossene Kugel $\bar{B}_r(x_0)$.
- Wählen sie ein hinreichend kleines Intervall $I = [-\delta, \delta]$.
- Definieren sie auf I Kurven $\varphi_n = T^n \varphi_0$ wie im Satz von Picard-Lindelöf 10.
- Wenden sie auf diese Folge (φ_n) den Satz von Arzelà-Ascoli 12.1 an.
- Der Grenzwert jeder konvergenten Teilfolge ist dann ein Fixpunkt von T .

- 8 Sei Φ der maximale Fluss eines lipschitzstetigen Vektorfeldes v . Dann gilt

$$\Phi_*^t v = v$$

an allen Punkten, wo die linke Seite definiert ist.

- 9 Ist Φ ein bezüglich der Zeit differenzierbarer Fluss auf V , so sind dessen Flusslinien die Lösungskurven eines eindeutig bestimmten Vektorfeldes v auf V .
- 10 Seien v und w Vektorfelder auf V und $T: V \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus. Dann wird durch

$$v \sim w \quad :\Leftrightarrow \quad v = T^* w$$

eine Äquivalenzrelation unter stetigen Vektorfeldern definiert.

- 11 Das Vektorfeld v sei von der Form

$$v(x) = Ax + \hat{v}(x),$$

wobei $\hat{}$ bedeutet, dass der Term bis zur ersten Ableitung bei 0 verschwindet. Dann hat die Zeit-1-Abbildung $\Phi = \Phi^1$ seines Flusses die Form

$$\Phi(x) = \Lambda x + \hat{\Phi}(x)$$

mit $\Lambda = e^A$.

- 12 *Variante des Lemmas von Gronwall* Es gelte

$$u(t) \leq \int_0^t (a(s) + bu(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq T,$$

mit $u, a: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $b \geq 0$. Dann gilt

$$u(t) \leq \int_0^t a(s) e^{b(t-s)} ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

- 13 *Allgemeines Lemma von Gronwall* Seien $u, a: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $b: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und nicht-negativ, und

$$u(t) \leq a(t) + \int_0^t b(s)u(s) ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Dann gilt

$$u(t) \leq a(t) + \int_0^t a(s)b(s) \exp\left(\int_s^t b(r) dr\right) ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

- 14 a. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt und v ein stetiges Vektorfeld auf V , für das mit einer Konstanten $a \geq 0$ gilt

$$\langle v(x), x \rangle \leq a(1 + \|x\|^2), \quad x \in V.$$

Dann gilt für jede Lösungskurve φ von v die Abschätzung

$$\|\varphi^t(x)\| \leq (1 + \|x\|) e^{at}, \quad t \geq 0.$$

- b. Was muss vorausgesetzt werden, damit Entsprechendes für $t \leq 0$ gilt?

- 15 Sei v ein C^1 -Vektorfeld auf V und $\alpha: V \rightarrow \mathbb{R}$ eine positive C^1 -Funktion. Dann besitzen die Vektorfelder v und $w = \alpha v$ dieselben Lösungskurven. Gilt das auch, wenn $\succ C^1 \langle$ durch \succ lokal lipschitz \langle oder \succ stetig \langle ersetzt wird?

- 16 Transformieren sie die Differenzialgleichung

$$\dot{x} = -y + x(1 - x^2 - y^2)$$

$$\dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2)$$

in Polarkoordinaten. Beschreiben sie die Lösungskurven sowohl in den Polarkoordinaten r, φ als auch den kartesischen Koordinaten x, y .

- 17 Sei $\varphi: (a, b) \rightarrow V$ Lösungskurve eines stetigen Vektorfeldes v . Ist die Spur von φ in einer kompakten Teilmenge des Definitionsbereiches von v enthalten, so ist φ gleichmäßig stetig. Ist $b < \infty$, so existiert auch $\lim_{t \nearrow b} \varphi(t)$.

- 18 Sei φ Lösungskurve eines stetigen Vektorfeldes auf einem Gebiet Ω . Ist

$$T = \sup \{t \geq 0 : \varphi([0, t]) \subset \Omega\} < \infty,$$

so existiert zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset \Omega$ eine monoton steigende Folge $t_1 < t_2 < \dots \nearrow T$ mit $\varphi(t_n) \notin K$.

18

Analysis im \mathbb{R}^n

Wir betrachten nun Abbildungen $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m \geq 2$, die man auch als vektorwertige Funktionen bezeichnet. Zunächst formulieren wir den lokalen Umkehrsatz für Abbildungen des \mathbb{R}^n in sich selbst. Wir beweisen ihn – recht ausführlich – zuerst innerhalb der Kategorie der Lipschitzstetigen Abbildungen. Höhere Regularität betrachten wir erst danach und bereitet keine neuen Probleme.

Eine unmittelbare Folge des Umkehrsatzes ist der fundamentale Satz über implizite Funktionen. Er bildet die Grundlage für die Definition gleichungsdefinierter Mannigfaltigkeiten, und daran anknüpfend die Diskussion von Extrema mit Nebenbedingungen und der Methode der Lagrangemultiplikatoren.

18.1

Umkehrabbildungen

Wir betrachten vektorwertige Abbildungen

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto u = \varphi(x).$$

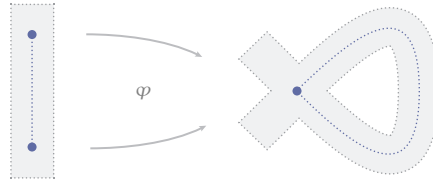
Zuerst wollen wir die Frage studieren, unter welchen Bedingungen eine solche Abbildung *umkehrbar*, also die Gleichung $u = \varphi(x)$ nach x eindeutig auflösbar ist. Mit anderen Worten: Wann können wir das System von m Gleichungen in n Variablen,

$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi_1(x_1, \dots, x_n), \\ u_2 &= \varphi_2(x_1, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ u_m &= \varphi_m(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

eindeutig nach x_1, \dots, x_n auflösen?

Abb 1

Lokal, aber nicht global
injektive Abbildung



Den eindimensionalen Fall kennen wir bereits [7.2](#). Ist I ein Intervall und $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist f umkehrbar dann und nur dann, wenn f streng monoton ist. In diesem Fall ist $J = f(I)$ ein Intervall, die Umkehrfunktion f^{-1} auf $f(I)$ wohldefiniert und ebenfalls stetig und streng monoton [7.13](#).

In höheren Dimensionen steht uns das Monotoniekriterium jedoch nicht zur Verfügung, und die Sache ist komplizierter. So kann man zum Beispiel die Abbildung φ in Abbildung 1 so definieren, dass sie *lokal* injektiv ist. Das heißt, jeder Punkt besitzt eine kleine Umgebung, die bijektiv abgebildet wird. Sie ist aber nicht *global* injektiv, denn die beiden hervorgehobenen Punkte links werden auf denselben Punkt rechts abgebildet. Also ist φ insgesamt nicht umkehrbar.

In einem ersten Schritt vereinfachen wir daher die Aufgabe, indem wir sie *lokalisieren* – was ohnehin bei vielen analytischen Problemen eine sinnvolle Herangehensweise ist. Wir fixieren also einen Punkt x_0 und dessen Bild

$$u_0 = \varphi(x_0)$$

und fragen, ob es offene Umgebungen U von x_0 und V von u_0 gibt, in denen die Gleichung $u = \varphi(x)$ eindeutig nach x auflösbar ist.

Beschränken wir uns auf kleine Umgebungen, so können wir in einem zweiten Schritt das Problem *linearisieren*, indem wir die typischerweise *nichtlineare* Abbildung φ lokal durch ihre *Linearisierung* im Punkt x_0 approximieren. Dies ist ohnehin ein wichtiger Spezialfall des allgemeinen Problems und führt zu der Gleichung

$$u = u_0 + D\varphi(x_0)(x - x_0).$$

Die lineare Algebra lehrt nun, dass diese Gleichung *uneingeschränkt* – also ohne weitere Annahmen für alle u – lösbar ist genau dann, wenn $D\varphi(x_0)$ invertierbar ist, also

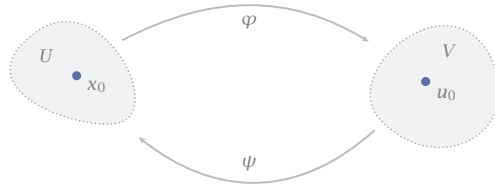
$$\det D\varphi(x_0) \neq 0$$

gilt. Insbesondere müssen u und x von derselben Dimension sein.

Für die lokale Umkehrbarkeit einer differenzierbaren Abbildung φ um einen Punkt x_0 ist es somit sicher sinnvoll zu verlangen, dass $D\varphi(x_0)$ regulär ist. Das fundamentale Ergebnis ist, dass diese Eigenschaft auch *hinreichend* ist.

Abb 2

Abbildung und Umkehrabbildung



1 Umkehrsatz

Es sei $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und

$$\det D\varphi(x_0) \neq 0.$$

Dann existieren Umgebungen U von x_0 und V von $u_0 = \varphi(x_0)$ sowie eine stetig differenzierbare Abbildung $\psi: V \rightarrow U$, so dass

$$\psi \circ \varphi = id_U, \quad \varphi \circ \psi = id_V. \quad \times$$

Im Detail bedeutet dies, dass φ die offene Menge U bijektiv auf die offene Menge V abbildet und deren lokale Umkehrabbildung $\psi = (\varphi|_U)^{-1}$ ebenfalls stetig differenzierbar ist.

■ Etwas Terminologie

Der Satz über die Existenz lokaler Umkehrabbildungen gehört zu den wichtigsten Hilfsmitteln der Analysis. Wir wollen seine wesentlichen Aspekte deshalb auch begrifflich herausstellen.

Definition Eine C^1 -Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **regulär im Punkt x_0** , und der Punkt selbst **regulärer Punkt** der Abbildung φ , wenn

$$\det D\varphi(x_0) \neq 0.$$

Die Abbildung φ heißt **regulär**, wenn sie in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs regulär ist. \times

Ein nicht-regulärer Punkt heißt **singulärer Punkt**, dort ist $\det D\varphi(x_0) = 0$.

Definition Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und nicht leer. Eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Diffeomorphismus**, wenn gilt:

- (i) $\Omega' = \varphi(\Omega)$ ist offen,
- (ii) $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ ist bijektiv,
- (iii) $\varphi^{-1}: \Omega' \rightarrow \Omega$ ist ebenfalls stetig differenzierbar.

Genauer heißt dann φ ein **Diffeomorphismus von Ω auf Ω'** . \times

Analog sind zum Beispiel *Homöomorphismus* und *Lipeomorphismus* definiert, hierfür ist nur *stetig differenzierbar* durch *stetig* respektive *lipschitzstetig* zu ersetzen.

► A. Eine affine Abbildung

$$\Lambda : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \rightarrow u = Ax + b$$

ist ein Diffeomorphismus des \mathbb{R}^n genau dann, wenn $\det A \neq 0$.

B. Ist I ein offenes Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ regulär, so verschwindet die Ableitung f' nirgends. Also ist gemäß dem Satz über Umkehrfunktionen_{8.15} f ein Diffeomorphismus von I auf $I' = f(I)$.

C. Sind $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega'$ und $\psi : \Omega' \rightarrow \Omega''$ Diffeomorphismen, so sind

$$\varphi^{-1} : \Omega' \rightarrow \Omega, \quad \psi \circ \varphi : \Omega \rightarrow \Omega''$$

ebenfalls Diffeomorphismen.

D. Eine reguläre Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ kann kein Diffeomorphismus sein. ◀

2 **Notiz** *Ein Diffeomorphismus φ ist in jedem Punkt seines Definitionsbereichs regulär.* ✕

◀◀◀ Da φ und φ^{-1} beide differenzierbar sind, können wir auf die Identität $\varphi^{-1} \circ \varphi = id$ die Kettenregel_{14.7} anwenden und erhalten

$$(D\varphi^{-1} \circ \varphi)D\varphi = Id$$

auf ganz Ω . Dies geht aber nur, wenn $D\varphi$ in jedem Punkt regulär ist. ▶▶▶

Wie bereits am Beispiel von Abbildung 1 bemerkt, gilt die Umkehrung dieser Feststellung im *Globalen* im Allgemeinen *nicht*. Aus der Regularität, einer lokalen Eigenschaft, kann man nicht auf die globale Eigenschaft der Umkehrbarkeit schließen. Dies ist nur lokal möglich, und das ist die Quintessenz des Umkehrsatzes.

3 **Kurzfassung des Umkehrsatzes** *Lokal um einen regulären Punkt ist eine stetig differenzierbare Abbildung diffeomorph.* ✕

Das bedeutet, dass die Einschränkung auf eine hinreichend kleine Umgebung dieses Punktes einen Diffeomorphismus dieser Umgebung auf sein Bild ergibt. Wichtige Beispiele sind Polar- und Kugelkoordinaten, die wir am Ende dieses Abschnitts betrachten.

■ Rückführung auf einen Spezialfall

Der Beweis des Umkehrsatzes wird übersichtlicher, wenn wir folgenden Spezialfall betrachten. Auf ihn führen wir den allgemeinen Fall zurück.

4 **Spezialfall** Es sei $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und

$$\varphi(0) = 0, \quad D\varphi(0) = \text{Id}.$$

Dann ist φ lokal um 0 diffeomorph. \times

⟨⟨⟨ Beweis des Umkehrsatz mithilfe des Spezialfalls Sei $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1 -Abbildung mit regulärer Ableitung $\Lambda = D\varphi(x_0)$. Verschieben wir den Nullpunkt nach x_0 mittels der Translation $\tau: x \mapsto x + x_0$ und wenden nach φ die affine Transformation $\lambda: u \mapsto \Lambda^{-1}(u - u_0)$ mit $u_0 = \varphi(x_0)$ an, so erhalten wir die *normalisierte Abbildung*

$$\tilde{\varphi} = \lambda \circ \varphi \circ \tau: \tilde{\varphi}(x) = \Lambda^{-1}(\varphi(x + x_0) - u_0).$$

Diese erfüllt die Voraussetzungen des Spezialfalls, denn $\tilde{\varphi}$ ist stetig differenzierbar, $\tilde{\varphi}(0) = 0$, und

$$D\tilde{\varphi}(0) = \Lambda^{-1}D\varphi(x_0) = \text{Id}.$$

Also besitzt $\tilde{\varphi}$ eine stetig differenzierbare lokale Inverse $\tilde{\psi}$. Es gilt also

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi} = \tilde{\psi} \circ \lambda \circ \varphi \circ \tau = \text{id}_{U_0},$$

$$\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi} = \lambda \circ \varphi \circ \tau \circ \tilde{\psi} = \text{id}_{V_0},$$

mit gewissen Umgebungen U_0 und V_0 von 0. Verknüpfen wir die erste Gleichung von links mit τ und von rechts mit τ^{-1} und verfahren analog in der zweiten Gleichung mit λ , so erhalten wir

$$(\tau \circ \tilde{\psi} \circ \lambda) \circ \varphi = \text{id}_U, \quad U = \tau(U_0)$$

$$\varphi \circ (\tau \circ \tilde{\psi} \circ \lambda) = \text{id}_V, \quad V = \lambda^{-1}(V_0).$$

Somit ist φ ein Diffeomorphismus von U auf V mit der stetig differenzierbaren Umkehrabbildung $\psi = \tau \circ \tilde{\psi} \circ \lambda$. \gggg

■ Der Umkehrsatz für lipschitzstetige Abbildungen

Andererseits können wir den Spezialfall 4 etwas allgemeiner fassen. Es stellt sich heraus, dass der Umkehrsatz bereits innerhalb der Kategorie der lipschitzstetigen Abbildungen gilt, ohne dass der Beweis dadurch komplizierter würde.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beliebig, aber nicht leer, und $|\cdot|$ eine beliebige Norm auf \mathbb{R}^n . Für eine lipschitzstetige Abbildung $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist dann

$$[f]_{\Omega} := \sup_{\substack{u \neq v \\ u, v \in \Omega}} \frac{|f(u) - f(v)|}{|u - v|}$$

die bestmögliche Lipschitzkonstante von f auf Ω bezüglich $|\cdot|$. Für eine stetig differenzierbare Abbildung f auf einer konvexen Menge Ω gilt hierfür folgendes

5 Lemma *Ist $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und Ω konvex, so gilt*

$$[f]_{\Omega} = \|Df\|_{\Omega},$$

wobei $\|\cdot\|$ die von $|\cdot|$ induzierte Operatornorm bezeichnet. \times

»»» Mit $u, v \in \Omega$ ist auch $[u, v] \subset \Omega$ aufgrund der Konvexität von Ω . Aufgrund des Schrankensatzes 14.16 gilt dann

$$|f(u) - f(v)| \leq \max_{z \in [u, v]} \|Df(z)\| |u - v| \leq \|Df\|_{\Omega} |u - v|.$$

Also gilt $[f]_{\Omega} \leq \|Df\|_{\Omega}$. — Umgekehrt gilt für $z \in \Omega$ und $h \neq 0$

$$\begin{aligned} |Df(z)h| &= \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{1}{t} (f(z + th) - f(z)) \right| \\ &\leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{|t|} [f]_{\Omega} |th| = [f]_{\Omega} |h|. \end{aligned}$$

Da dies für alle $h \neq 0$ gilt, folgt hieraus $\|Df(z)\| \leq [f]_{\Omega}$. Und da dies für jedes $z \in \Omega$ gilt, folgt auch $\|Df\|_{\Omega} \leq [f]_{\Omega}$. »»»

Für eine Abbildung φ wie im Spezialfall 4 gilt aufgrund der Stetigkeit der ersten Ableitung

$$[\varphi - id]_{B_r(0)} = \|D\varphi - \text{Id}\|_{B_r(0)} \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0.$$

Für hinreichend kleines r ist also $[\varphi - id]_{B_r(0)} < 1$. Dann ist φ bereits injektiv:

Proposition A *Ist $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ lipschitzstetig und $[\varphi - id]_{\Omega} < 1$, so ist φ auf Ω injektiv. \times*

»»» Angenommen, es ist $\varphi(x) = \varphi(y)$ für $x, y \in \Omega$. Dann ist

$$|x - y| = |(\varphi(x) - x) - (\varphi(y) - y)| \leq [\varphi - id]_{\Omega} |x - y|.$$

Wegen $[\varphi - id]_{\Omega} < 1$ folgt hieraus $|x - y| = 0$, also $x = y$. »»»

Das Problem besteht somit nicht im Nachweis der Injektivität von φ , sondern im Nachweis der Stetigkeit der Umkehrabbildung φ^{-1} auf einer offenen Menge. Dies zeigen wir im Folgenden, indem wir die Umkehrabbildung innerhalb der Klasse lipschitzstetiger Abbildungen konstruieren.

Proposition B Sei $\varphi: B_r(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ lipschitzstetig mit

$$\varphi(0) = 0, \quad [\varphi - id]_{B_r(0)} \leq 1/4.$$

Dann existiert eine lipschitzstetige Abbildung $\psi: B_{r/2}(0) \rightarrow B_r(0)$ mit

$$\psi(0) = 0, \quad [\psi - id]_{B_{r/2}(0)} \leq 1/2,$$

so dass $\varphi \circ \psi = id_{B_{r/2}(0)}$. \times

■ Formulierung als Fixpunktproblem

Für den Beweis formulieren wir die Aussage als Fixpunktproblem. Dazu schreiben wir $\varphi = id + \hat{\varphi}$ und die gesuchte Umkehrabbildung als $\psi = id + \hat{\psi}$. Zu lösen ist dann die Gleichung

$$id = \varphi \circ \psi = (id + \hat{\varphi}) \circ (id + \hat{\psi}) = id + \hat{\psi} + \hat{\varphi} \circ (id + \hat{\psi}),$$

was äquivalent ist zu

$$\hat{\psi} = -\hat{\varphi} \circ (id + \hat{\psi}).$$

Zu gegebenem $\hat{\varphi}$ suchen wir also ein $\hat{\psi}$, das in einer hinreichend kleinen Umgebung von 0 definiert ist und diese Gleichung erfüllt.

Die Abbildung $\hat{\psi}$ erscheint hier als *Fixpunkt* des Operators

$$T: u \mapsto Tu = -\hat{\varphi} \circ (id + u),$$

also als Lösung der *Fixpunktgleichung*

$$Tu = u.$$

Wir haben das *Invertierungsproblem* ›Gesucht ist die Inverse der Abbildung φ ‹ somit in das *Fixpunktproblem* ›Gesucht ist ein Fixpunkt des Operators T ‹ umformuliert. Dies ist ein oft angewandter Kunstgriff, da für Fixpunktprobleme vielfältige und weitreichende Sätze zur Verfügung stehen. Einer der vielseitigsten ist der Banachsche Fixpunktsatz, den wir bereits beim Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für gewöhnliche Differenzialgleichungen kennengelernt haben. Wir wiederholen ihn hier der Vollständigkeit halber.

- 6 **Banachscher Fixpunktsatz** Sei E ein Banachraum mit Norm $\|\cdot\|$, sei X eine abgeschlossene Teilmenge von E , und $T: X \rightarrow X$ eine *Kontraktion*. Das heißt, es existiert eine Konstante $\theta \in (0, 1)$, so dass

$$\|Tu - Tv\| \leq \theta \|u - v\|, \quad u, v \in X.$$

Dann besitzt T in X genau einen Fixpunkt ξ . \times

Die Herausforderung bei der Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes besteht darin, im jeweiligen Fall einen geeigneten Banachraum E und eine geeignete Teilmenge X zu finden. Der folgende Beweis gibt dafür ein Beispiel.

⟨⟨⟨ *Beweis von Proposition B* Schreibe also $\varphi = id + \hat{\varphi}$ und $\psi = id + \hat{\psi}$. Die Gleichung $\varphi \circ \psi = id$ ist dann äquivalent zu

$$\hat{\psi} = -\hat{\varphi} \circ (id + \hat{\psi}).$$

Diese Gleichung lösen wir mit dem Banachschen Fixpunktsatz im Banachraum

$$E = C(K, \mathbb{R}^n), \quad K = \bar{B}_{r/2}(0),$$

versehen mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|$. Als Teilmenge betrachten wir

$$X = \{u \in E : u(0) = 0, [u]_K \leq 1/2\}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass X in E abgeschlossen ist. Auf X definieren wir

$$Tu = -\hat{\varphi} \circ (id + u).$$

Nun sind eine Reihe von Aussagen zu verifizieren.

T ist wohldefiniert, also Tu auf K definiert: Für $u \in X$ und $x \in K$ ist

$$|u(x)| = |u(x) - u(0)| \leq [u]_K |x|,$$

also

$$|x + u(x)| \leq (1 + [u]_K) |x| < 2|x| < r.$$

Also gilt $id + u: K \rightarrow B_r(0)$, und $\hat{\varphi} \circ (id + u)$ ist auf K definiert.

T bildet X in X ab: Tu ist sicher wieder stetig und

$$Tu(0) = -\hat{\varphi}(u(0)) = -\hat{\varphi}(0) = 0.$$

Mit $[\hat{\varphi}] := [\hat{\varphi}]_{B_r(0)} \leq 1/4$ haben wir für beliebige $x, y \in K$ die Abschätzung

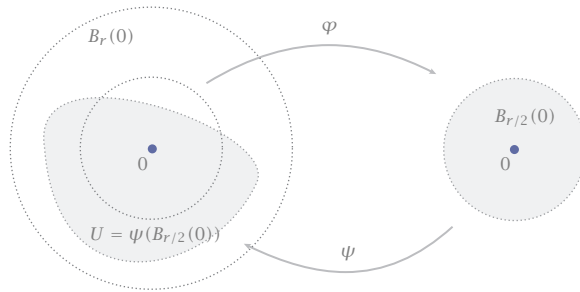
$$\begin{aligned} |Tu(x) - Tu(y)| &= |\hat{\varphi}(x + u(x)) - \hat{\varphi}(y + u(y))| \\ &\leq [\hat{\varphi}] |(x + u(x)) - (y + u(y))| \\ &\leq [\hat{\varphi}] [id + u]_K |x - y| \\ &\leq [\hat{\varphi}] (1 + [u]_K) |x - y|. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$[Tu]_K \leq [\hat{\varphi}] (1 + [u]_K) \leq \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2}.$$

Somit ist $Tu \in X$.

Abb 3
Zum Beweis von
Proposition C



T ist eine Kontraktion auf X bezüglich der Supremumsnorm: Es ist

$$\begin{aligned} |Tu(x) - Tv(x)| &= |\hat{\varphi}(x + u(x)) - \hat{\varphi}(x + v(x))| \\ &\leq [\hat{\varphi}] |(x + u(x)) - (x + v(x))| \\ &= [\hat{\varphi}] |u(x) - v(x)| \\ &\leq [\hat{\varphi}] \|u - v\|_K. \end{aligned}$$

Da dies für alle $x \in K$ gilt, folgt

$$\|Tu - Tv\|_K \leq [\hat{\varphi}] \|u - v\|_K.$$

Wegen $[\hat{\varphi}] \leq 1/4$ ist also T eine Kontraktion auf X .

Abschluss des Beweises: Der Banachsche Fixpunktsatz ist somit anwendbar, und T besitzt einen eindeutigen Fixpunkt $\hat{\psi} \in X$. Die Fixpunktgleichung ist aber äquivalent mit $\varphi \circ \psi = id$. Damit ist Proposition B gezeigt. \gggg

- 7 **Proposition C** Sei $\varphi: B_r(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ lipschitzstetig wie in Proposition B und $V = B_{r/2}(0)$. Dann ist φ ein Lipeomorphismus der Nullpunktsumgebung $U = \psi(V)$ auf V mit Umkehrabbildung $\varphi^{-1} = \psi$. \times

\llll Nach Proposition A ist φ injektiv, und nach Proposition B gibt es eine lipschitzstetige Abbildung $\psi: V \rightarrow B_r(0)$ mit $\varphi \circ \psi = id_V$. Setzen wir also

$$U := \psi(V) \subset B_r(0),$$

so ist $\varphi: U \rightarrow V$ injektiv und surjektiv, also bijektiv, mit lipschitzstetiger Umkehrabbildung $\psi = \varphi^{-1}: V \rightarrow U$. Außerdem ist U offen, denn $U = \varphi^{-1}(V)$ ist das Urbild einer offenen Menge unter der stetigen Abbildung φ . \gggg

■ Regularität

Nun zeigen wir, dass ψ auch differenzierbar ist, wenn φ es ist. Dies geschieht wie im Beweis der Umkehrregel in einer Dimension 8.15, nur tritt an die Stelle der Ableitung φ' die totale Ableitung $D\varphi$.

Proposition D *Ist die Abbildung φ in Proposition C stetig differenzierbar, so ist φ ein Diffeomorphismus von U auf V . \times*

««« Wir hatten gezeigt \S , dass

$$\|D\hat{\varphi}\|_{B_r(0)} = [\hat{\varphi}]_{B_r(0)} \leq 1/4.$$

Somit ist $D\varphi = I + D\hat{\varphi}$ in jedem Punkt invertierbar 6.19. Aufgrund des Lemmas von Hadamard 14.15 gilt nun lokal um jeden Punkt $x_0 \in U$

$$\varphi(x) = \varphi(x_0) + \Lambda(x)(x - x_0)$$

mit

$$\Lambda(x) = \int_0^1 D\varphi((1-t)x_0 + tx) dt.$$

Es ist also

$$\Lambda(x_0) = D\varphi(x_0).$$

Da $\Lambda(x_0)$ invertierbar ist, ist es aus Stetigkeitsgründen auch $\Lambda(x)$ für alle x in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 . Dort gilt dann auch

$$x = x_0 + \Lambda^{-1}(x)(\varphi(x) - \varphi(x_0)).$$

Mit $x = \psi(u)$ und $x_0 = \psi(u_0)$ ist dies gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} \psi(u) &= \psi(u_0) + \Lambda^{-1}(\psi(u))(u - u_0) \\ &= \psi(u_0) + \Lambda^{-1}(\psi(u_0))(u - u_0) \\ &\quad + [\Lambda^{-1}(\psi(u)) - \Lambda^{-1}(\psi(u_0))](u - u_0). \end{aligned}$$

Aufgrund der Stetigkeit von ψ und Λ verschwindet der Ausdruck in eckigen Klammern für $u \rightarrow u_0$. Wir erhalten somit

$$\psi(u) = \psi(u_0) + \Lambda^{-1}(\psi(u_0))(u - u_0) + o(u - u_0).$$

Also 14.5 ist ψ in u_0 differenzierbar mit Ableitung

$$D\psi(u_0) = (D\varphi)^{-1}(\psi(u_0)).$$

Dies zeigt auch, dass $D\psi$ ebenfalls stetig ist. Damit ist alles gezeigt. »»»

Der Kern des Beweises des Umkehrsatzes betraf lipschitzstetige Abbildungen. Die stetige Differenzierbarkeit der Umkehrabbildung war dann wesentlich einfacher zu zeigen. Höhere Ableitungen bereiten keine weiteren Mühen:

- 8 **Zusatz zum Umkehrsatz** *Gelten die Voraussetzungen des Umkehrsatzes 1 und ist φ von der Klasse C^r mit $1 \leq r \leq \infty$, so ist auch die lokale Umkehrabbildung ψ von der Klasse C^r . ✕*

⟨⟨⟨ Die Behauptung gilt für $r = 1$ aufgrund des Umkehrsatzes, und es ist

$$D\psi = (D\varphi)^{-1} \circ \psi.$$

Gilt nun die Behauptung für ein $r \geq 1$ und ist φ von der Klasse C^{r+1} , so sind auf der rechten Seite dieser Formel $(D\varphi)^{-1}$ und ψ von der Klasse C^r . Also gilt dasselbe auch für $D\psi$, und damit ist ψ selbst von der Klasse C^{r+1} . ⟩⟩⟩

Wir merken noch an, dass die Lipschitzstetigkeit für die Existenz einer stetigen Umkehrabbildung tatsächlich nicht notwendig ist. Wissen wir bereits, dass die Abbildung injektiv ist, so ist sie auch offen. Der folgende Satz ist auch als Satz von der Invarianz der Dimension bekannt.

Brouwerscher Umkehrsatz *Ist $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine stetige und injektive Abbildung einer offenen Menge Ω im \mathbb{R}^n , so ist $\Omega' = \varphi(\Omega)$ offen und die Umkehrabbildung $\varphi^{-1}: \Omega' \rightarrow \Omega$ ebenfalls stetig. ✕*

Ein relativ einfacher Beweis basiert auf der Theorie des Abbildungsgrads, doch geht dies über den Rahmen dieser Vorlesung hinaus.

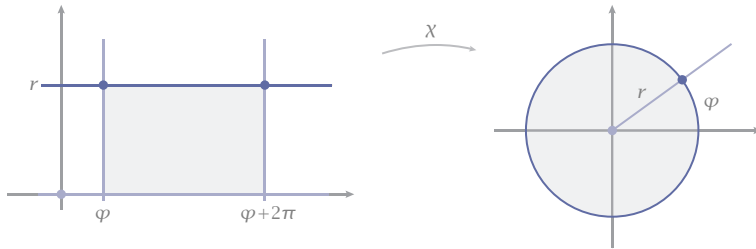
■ Koordinatentransformationen

Einen Diffeomorphismus

$$\varphi: \Omega \rightarrow \Omega', \quad x \mapsto u = \varphi(x),$$

kann man auffassen als eine *Koordinatentransformation*, die auf der Zielmenge Ω' mit Koordinaten u neue Koordinaten x aus der Menge Ω einführt. Koordinatentransformationen sind ein wichtiges Hilfsmittel, um mathematische Probleme zu lösen, und viele mathematische und physikalische Probleme haben ihre eigenen speziellen Koordinatensysteme. Die wichtigsten sind die *Polar-* und *Kugelkoordinaten*.

Abb 4 Polarkoordinaten



Polarkoordinaten In der euklidischen Ebene lässt sich jeder Punkt durch seinen Abstand r zum Nullpunkt und den Winkel φ seines Ortsvektors mit der positiven x -Achse beschreiben. Umgekehrt wird durch

$$\chi: \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

jedem Koordinatenpaar (r, φ) der entsprechende Punkt (x, y) in der Ebene zugeordnet. Für die so definierte Abbildung

$$\chi: [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (r, \varphi) \mapsto (x, y)$$

ist

$$D\chi = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \det D\chi = r.$$

Somit ist χ regulär in allen Punkten mit $r > 0$ und definiert dort einen lokalen Diffeomorphismus.

Für $r = 0$ dagegen ist χ nicht einmal injektiv, denn

$$\chi(0, \varphi) = (0, 0), \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Aber auch für $r > 0$ ist χ nicht injektiv, denn aufgrund der Periodizität der Kreisfunktionen gilt ja

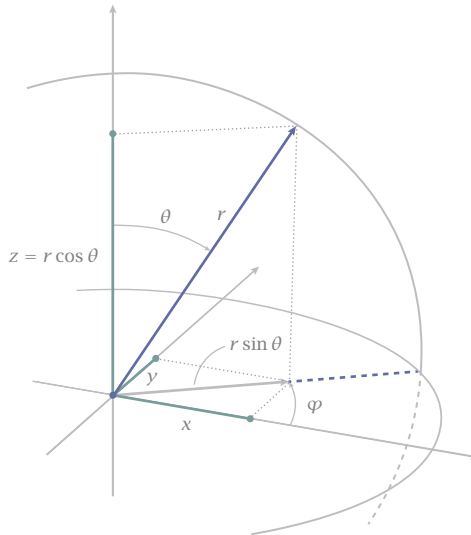
$$\chi(r, \varphi + 2\pi n) = \chi(r, \varphi), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Daher ist χ ein Koordinatensystem nur nach Einschränkung auf geeignete Teilgebiete, wie zum Beispiel $(0, \infty) \times (0, 2\pi)$ oder allgemeiner

$$(0, \infty) \times (\alpha, \alpha + 2\pi), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Für die Umkehrabbildung ist dann jeweils der geeignete Zweig der Arcusfunktionen zu wählen. In vielen Fällen ist eine Rücktransformation jedoch nicht erforderlich, und die Mehrdeutigkeit der Polarkoordinaten kein Problem.

Abb 5
Kugelkoordinaten



► **Beispiel** Gesucht sind *rotationssymmetrische* harmonische Funktionen u in der Ebene. Es soll also

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

gelten, und in Polarkoordinaten soll

$$v(r, \varphi) := u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

nicht von φ abhängen, also $v_\varphi = 0$ gelten. — Eine kleine Rechnung ergibt A-15.4

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{rr} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r^2}v_{\varphi\varphi}.$$

Somit suchen wir eine Lösung der Gleichung

$$v_{rr} + \frac{1}{r}v_r = 0.$$

Deren allgemeine Lösung ist $v = a + b \log r$. Diese Funktion ist allerdings im Nullpunkt stetig und differenzierbar dann und nur dann, wenn $b = 0$. Somit sind die einzigen rotationssymmetrischen und auf ganz \mathbb{R}^2 harmonischen Funktionen die konstanten Funktionen. ◀

Kugelkoordinaten Im euklidischen Raum lässt sich jeder Punkt durch seinen Abstand r zum Nullpunkt und zwei Winkel θ und φ beschreiben, dem **Azimutwinkel** θ seines Ortsvektors zur z-Achse und dem **Polarwinkel** φ seiner Projektion auf die xy -Ebene. Umgekehrt wird durch

$$\chi: \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

jedem Koordinatentripel (r, θ, φ) der entsprechende Punkt (x, y, z) im Raum zugeordnet. Für die so definierte Abbildung

$$\chi: [0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (r, \theta, \varphi) \mapsto (x, y, z)$$

ist

$$D\chi = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \sin \theta \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\det D\chi = r^2 \sin \theta.$$

Diese Jacobideterminante verschwindet somit genau auf der z-Achse.

► Suchen wir im \mathbb{R}^3 nach rotationssymmetrischen harmonischen Funktionen, so führt der Ansatz $u(x, y, z) = v(r)$ zu der Differenzialgleichung

$$v_{rr} + \frac{2}{r}v_r = 0.$$

Die allgemeine Lösung ist in diesem Fall $v_r = -b/r^2$ und damit $v = a + b/r$. Auch in diesem Fall sind die einzigen rotationssymmetrischen und auf ganz \mathbb{R}^3 harmonischen Funktionen die konstanten Funktionen. ◀

18.2

Implizite Funktionen

Der Umkehrsatz₁ sagt aus, dass eine stetig differenzierbare Abbildung

$$f: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n, \quad w = f(x)$$

lokal um $f(x_0) = w_0$ eine stetig differenzierbare Umkehrabbildung genau dann besitzt, wenn $\det Df(x_0) \neq 0$. In diesem Fall werden die n Koordinaten von x

durch die n Gleichungen

$$w_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n,$$

lokal eindeutig und in stetig differenzierbarer Weise als Funktionen von w in der Nähe von w_0 bestimmt. Daher sagt man auch *›n Gleichungen bestimmen im Allgemeinen eindeutig n Unbekannte‹*.

Nun betrachten wir in gleicher Weise eine Abbildung

$$f: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m, \quad w = f(x)$$

mit $m \neq n$. Ist $n < m$, so handelt es sich um ein *überbestimmtes System*, das nicht für alle w in der Nähe von w_0 gelöst werden kann, wenn überhaupt. Dies ist bereits bei linearen Gleichungen offensichtlich. Diesen Fall werden wir daher nicht weiter betrachten.

Bleibt der Fall $n > m$. Da die Anzahl der Gleichungen kleiner ist als die Anzahl der Koordinaten, spricht man von einem *unterbestimmten System*. Um die Notation zu vereinfachen, schreiben wir die Dimension des Urbildraumes als $n + m$ mit $m \geq 1$ und $n \geq 1$, und betrachten eine Abbildung

$$f: \mathbb{R}^{n+m} \hookrightarrow \mathbb{R}^m, \quad w = f(x).$$

Die Vermutung liegt nahe, dass hier durch m Gleichungen auch nur m Koordinaten von x bestimmt werden, während n Koordinaten frei gewählt werden können. Somit sind keine eindeutigen Lösungen zu erwarten, sondern *Familien* von Lösungen, die von n Parametern abhängen.

Wir betrachten wieder die Linearisierung des Problems lokal um $w_0 = f(x_0)$. Statt $w = f(x)$ betrachten wir also

$$w = w_0 + Df(x_0)(x - x_0), \tag{1}$$

wobei die Jacobische

$$Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_l}(x_0) \right)_{1 \leq k \leq m, 1 \leq l \leq n+m}$$

durch eine $m \times (n + m)$ -Matrix dargestellt wird. Diese ist natürlich nicht invertierbar. Hat sie aber *maximalen Rang* m , so gibt es eine Umordnung der Spalten von $Df(x_0)$ derart, dass die hintere $m \times m$ -Untermatrix

$$A = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_l}(x_0) \right)_{1 \leq k \leq m, n+1 \leq l \leq n+m}$$

maximalen Rang m hat und somit invertierbar ist. Nummerieren wir die Koordinaten entsprechend dieser Umordnung um und schreiben

$$x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = (u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m) = (u, v),$$

so geht Gleichung (1) über in

$$w = w_0 + B(u - u_0) + A(v - v_0), \quad (2)$$

wobei die Matrix B aus den ersten n Spalten von $Df(x_0)$ besteht. Da A regulär sein soll, können wir diese Gleichung nach v auflösen und erhalten

$$v = v_0 + A^{-1}(w - w_0) - A^{-1}B(u - u_0).$$

Für jedes feste w ist die Lösungsmenge von (2) somit ein n -dimensionaler affiner Unterraum, wo die n Koordinaten u eindeutig die übrigen m Koordinaten v bestimmen.

Soweit das linearisierte Problem. Der Satz über implizite Funktionen sagt nun aus, dass *lokal* dasselbe auch für das nichtlineare Problem gilt.

Um die Formulierung dieses Satzes zu vereinfachen, gehen wir davon aus, dass wir die Koordinaten bereits so nummeriert haben, dass die hintere quadratische Untermatrix von $Df(x_0)$ maximalen Rang hat, und bezeichnen diese Koordinaten wie zuvor mit (u, v) . Dementsprechend sei

$$f_u = \left(\frac{\partial f_k}{\partial u_l} \right)_{1 \leq k \leq m, 1 \leq l \leq n}, \quad f_v = \left(\frac{\partial f_k}{\partial v_l} \right)_{1 \leq k, l \leq m}.$$

Mit den obigen Bezeichnungen ist also $Df = (f_u | f_v) = (B | A)$.

9 Satz über implizite Funktionen (IFS) Sei

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^m, \quad w = f(u, v)$$

stetig differenzierbar und $w_0 = f(u_0, v_0)$. Ist

$$\det f_v(u_0, v_0) \neq 0,$$

so existieren eine Umgebung $U \times V$ von (u_0, v_0) sowie eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\varphi : U \rightarrow V, \quad u \mapsto v = \varphi(u),$$

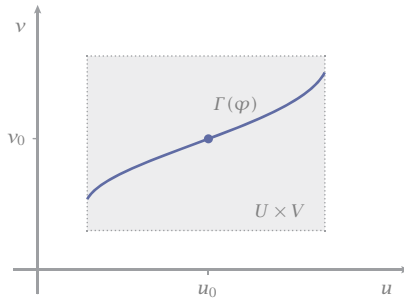
so dass

$$\{(u, v) \in U \times V : f(u, v) = w_0\} = \{(u, \varphi(u)) : u \in U\} = \Gamma(\varphi). \quad \times$$

Innerhalb des ›Fensters‹ $U \times V$ um (u_0, v_0) sind die einzigen Lösungen der Gleichung $f(u, v) = w_0$ also genau diejenigen, die auf dem Graphen $\Gamma(\varphi)$ von φ liegen. *Andere Lösungen gibt es in $U \times V$ nicht.* Insbesondere ist $\varphi(u_0) = v_0$. In diesem Sinne wird die implizite Gleichung $f(u, v) = w_0$ lokal eindeutig nach v aufgelöst durch die stetig differenzierbare Funktion $v = \varphi(u)$.

Diese Funktion φ lässt sich allerdings nur in den wenigsten Fällen explizit angeben. Es handelt sich eben um eine nur *implizit* durch f definierte Funktion.

Abb 6 Satz über implizite Funktionen



Wir wissen aber immerhin, dass $f(u, \varphi(u))$ konstant ist, wodurch wir praktisch ebenso viel über φ erfahren können wie durch eine explizite Formel.

⟨⟨⟨⟨ *Beweis des Satzes* Wir erhalten diesen Satz aus dem Umkehrsatz ₁, indem wir die Abbildung f geeignet erweitern. Wir definieren dazu in einer Umgebung von (u_0, v_0) die Abbildung

$$F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad F(u, v) = (u, f(u, v)).$$

Diese ist ebenfalls stetig differenzierbar, und es ist

$$F(u_0, v_0) = (u_0, f(u_0, v_0)) = (u_0, w_0).$$

Die Jacobimatrix von F ist

$$DF = \begin{pmatrix} I & 0 \\ f_u & f_v \end{pmatrix},$$

denn die erste Komponente von F ist die Identität in u . Aufgrund der Rechenregeln für Determinanten ist daher

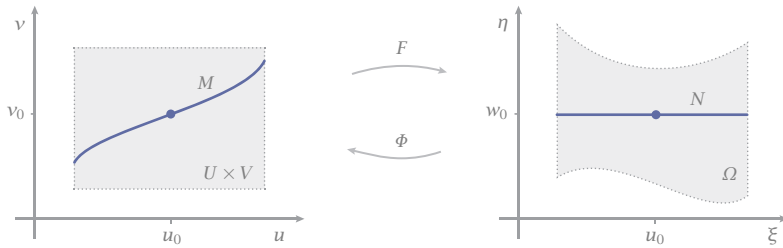
$$\det DF(u_0, v_0) = \det f_v(u_0, v_0) \neq 0.$$

Also ist der Umkehrsatz ₁ anwendbar und F ein lokaler Diffeomorphismus.

Es gibt also eine offene Umgebung $U \times V$ von (u_0, v_0) , die von F diffeomorph auf eine Umgebung Ω von (u_0, w_0) abgebildet wird. Da F in der ersten Komponente die Identität ist, hat die Menge Ω die in Abbildung 7 skizzierte vertikal gescherte Gestalt, und die Umkehrabbildung ist von der Form

$$\Phi: \Omega \rightarrow U \times V, \quad \Phi(\xi, \eta) = (\xi, \varphi(\xi, \eta)).$$

Aus Stetigkeitsgründen können wir U auch noch so klein wählen, dass der horizontale Schnitt

Abb 7 Erweiterte Abbildung F und ihre Umkehrabbildung Φ 

$$N := U \times \{w_0\}$$

ganz in Ω enthalten ist.

Betrachte nun die Menge M aller Lösungen der Gleichung $f(u, v) = w_0$ im Fenster $U \times V$, also

$$M = \{(u, v) \in U \times V : f(u, v) = w_0\}.$$

Deren Bild unter F ist die Menge

$$F(M) = \{(\xi, \eta) \in \Omega : \eta = w_0\} = U \times \{w_0\} = N.$$

Da F umkehrbar ist mit Umkehrabbildung Φ , folgt hieraus

$$\begin{aligned} M &= \Phi(N) \\ &= \{(\xi, \varphi(\xi, w_0)) : (\xi, w_0) \in \Omega\} \\ &= \{(u, \varphi(u, w_0)) : u \in U\} \\ &= \Gamma(\varphi_0) \end{aligned}$$

mit

$$\varphi_0 : U \rightarrow V, \quad u \mapsto v = \varphi(u, w_0).$$

Dies ist die im Satz mit φ bezeichnete gesuchte Abbildung. \gggg

10 Zusatz Für die Ableitung der impliziten Funktion φ gilt

$$\varphi_u(u) = -f_v^{-1} f_u \Big|_{(u, \varphi(u))}.$$

Ist außerdem f von der Klasse C^r mit $1 \leq r \leq \infty$, so gilt dies auch für φ . \times

\llll Für $u \in U$ gilt ja $f(u, \varphi(u)) = w_0$. Da f und φ stetig differenzierbar sind, können wir die Kettenregel_{14.7} anwenden und erhalten

$$0 = D(f(u, \varphi(u))) = f_u + f_v \varphi_u,$$

wobei f_u und f_v an der Stelle $(u, \varphi(u))$ ausgewertet werden. Da im vorangehenden Beweis F als Diffeomorphismus von $U \times V$ nach Ω konstruiert wurde, ist $\det f_v \neq 0$ für alle $u \in U$. Wir können daher die letzte Gleichung nach φ_u auflösen und erhalten die Behauptung. Die Regularitätsaussage folgt unmittelbar aus dem entsprechenden Ergebnis für den Umkehrsatz 8. \gggg

Tatsächlich haben wir im vorangehenden Beweis eine stärkere Aussage bewiesen. Die Menge $M = \{(u, v) \in U \times V : f(u, v) = w_0\}$ können wir ebensogut für alle w in einer hinreichend kleinen Umgebung von w_0 betrachten. Dazu müssen wir nur φ als Funktion von u wie auch w betrachten. Dies führt zu folgendem Satz.

11 Erweiterter Satz über implizite Funktionen (IFs) Sei

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^m, \quad w = f(u, v)$$

stetig differenzierbar und $w_0 = f(u_0, v_0)$. Gilt $\det f_v(u_0, v_0) \neq 0$, so existieren Umgebungen $U \times V$ von (u_0, v_0) und W von w_0 sowie eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\Phi : U \times W \rightarrow V, \quad v = \Phi(u, w),$$

so dass für jedes $w \in W$

$$\{(u, v) \in U \times V : f(u, v) = w\} = \{(u, \Phi(u, w)) : u \in U\}.$$

Ist außerdem f von der Klasse C^r mit $1 \leq r \leq \infty$, so gilt dies auch für Φ . \times

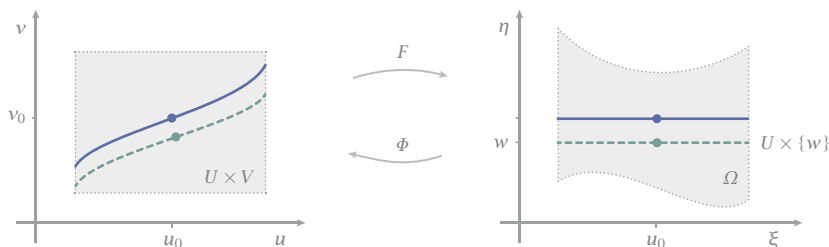
In dem Fenster $U \times V$ ist also nicht nur die Menge $\{f = w_0\}$ der Graph einer Abbildung. Dasselbe gilt auch für jede Menge $\{f = w\}$ mit w in einer hinreichend kleinen Umgebung von w_0 , und die Abhängigkeit von w ist ebenso regulär wie die Abbildung f . Alle diese Mengen werden durch die Abbildung Φ beschrieben.

\llll Im vorangehenden Beweis wählen wir die Umgebung U noch so klein, dass Ω ein Rechteck $U \times W$ mit einer Umgebung W von w_0 enthält. Dann können wir überall im Beweis w_0 durch $w \in W$ ersetzen und erhalten damit die implizite Lösungsfunktion

$$\Phi : U \times W \rightarrow V, \quad (u, w) \mapsto v = \Phi(u, w).$$

Alles Weitere ist dann klar. \gggg

Abb 8 Zum allgemeinen Satz über implizite Funktionen



■ Skalare Funktionen

Als erste Anwendung des Satzes über implizite Funktionen betrachten wir skalare Funktionen. Sei zunächst

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto f(x, y)$$

eine Funktion zweier Variablen, (x_0, y_0) ein Punkt im Definitionsbereich von f und $c_0 = f(x_0, y_0)$ sein Bildpunkt. Wir wollen wissen, wie die *Niveaumengen*

$$f^{-1}(c) = \{(x, y) : f(x, y) = c\}$$

für c in der Nähe von c_0 lokal um (x_0, y_0) aussehen.

Ist

$$f_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

so können wir die Gleichung $c = f(x, y)$ lokal nach y auflösen und jede Niveaumenge als Graph einer Funktion $g: y = g(x)$ darstellen. Ist

$$f_x(x_0, y_0) \neq 0,$$

so können wir diese Gleichung lokal nach x auflösen und jede Niveaumenge als Graph einer Funktion $h: x = h(y)$ darstellen. Sind beide Bedingungen erfüllt, so sind beide Darstellungen möglich. Außerdem gilt dann

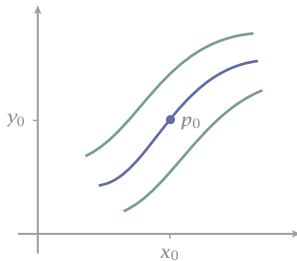
$$g'(x_0) = -\frac{f_x}{f_y} \Big|_{(x_0, y_0)} \neq 0, \quad h'(y_0) = -\frac{f_y}{f_x} \Big|_{(x_0, y_0)} \neq 0.$$

Das lokale Bild entspricht somit qualitativ dem in Abbildung 9.

Gilt dagegen

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \quad f_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

so ist auch $g'(x_0) = 0$. Die Niveaulinie durch p_0 hat somit einen *Flachpunkt* und sieht im Allgemeinen wie in Abbildung 10 links aus. Entsprechendes gilt, wenn die Rollen von x und y vertauscht sind.

Abb 9 Niveaulinien im Fall $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ und $f_x(x_0, y_0) \neq 0$ 

Der nächste Satz überträgt diese Betrachtungen auf Funktionen $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$.

Satz Sei $f: \mathbb{R}^{n+1} \hookrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $n \geq 1$ und

$$\nabla f(p_0) \neq 0.$$

Dann ist lokal um p_0 jede Niveaumenge $f^{-1}(c)$ mit c in einer hinreichend kleinen Umgebung von $c_0 = f(p_0)$ darstellbar als Graph einer stetig differenzierbaren Funktion $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$. \times

«»»» Wegen $\nabla f(p_0) \neq 0$ ist mindestens eine partielle Ableitung von f nicht Null. Nennen wir diese Koordinate v und die restlichen n Koordinaten u , so ist der IFS anwendbar, und lokal auf jeder Niveaulinienfläche die Koordinate v als Funktion der Koordinaten u darstellbar. «»»»

Lokal um einen Punkt p_0 mit

$$\nabla f(p_0) = 0$$

gelten solche Aussagen im Allgemeinen *nicht*. Dies zeigen die folgenden beiden Beispiele.

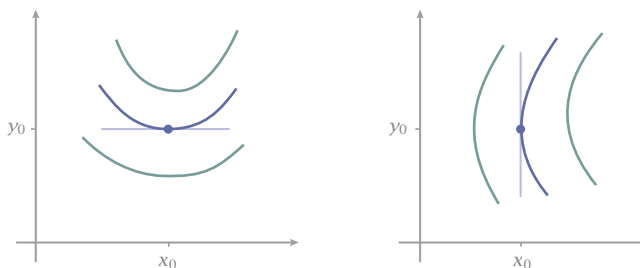
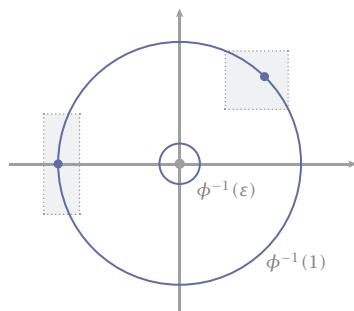
Abb 10 Niveaulinien im Fall $f_x(x_0, y_0) = 0$ respektive $f_y(x_0, y_0) = 0$ 

Abb 11 Niveaulinien von $x^2 + y^2$ mit zwei regulären Punkten

► A. Betrachte

$$\phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(x, y) = x^2 + y^2.$$

Der Gradient von ϕ verschwindet im Nullpunkt und sonst nicht. Die Niveaumengen dieser Funktion sind

$$\phi^{-1}(c) = \begin{cases} \text{Kreislinie,} & c > 0, \\ \text{Nullpunkt,} & c = 0, \\ \text{leere Menge,} & c < 0. \end{cases}$$

Also sind in keiner Umgebung von 0 die Niveaumengen von ϕ als Graphen einer Funktion auf einem offenen Intervall darstellbar. In jedem anderen Punkt ist dies möglich: auf den beiden Koordinatenachsen gibt es jeweils eine Möglichkeit, innerhalb der vier offenen Quadranten deren zwei.

B. Dasselbe gilt für

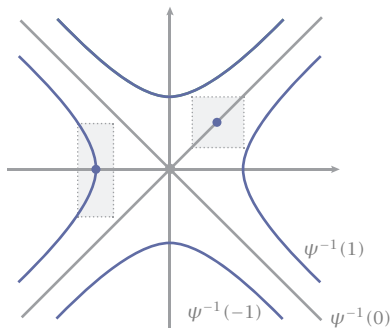
$$\psi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(x, y) = x^2 - y^2.$$

Die Niveaumengen dieser Funktion sind

$$\psi^{-1}(c) = \begin{cases} \text{zwei Hyperbelbögen durch } x\text{-Achse,} & c > 0, \\ \text{beide Winkelhalbierende,} & c = 0, \\ \text{zwei Hyperbelbögen durch } y\text{-Achse,} & c < 0. \end{cases}$$

C. Die klassische newtonsche Bewegungsgleichung eines reibungsfreien Teilchens der Masse 1 auf der reellen Achse unter dem Einfluss eines Potentials $V: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist

$$\ddot{x} = -V'(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Abb 12 Niveaulinien von $x^2 - y^2$ mit zwei regulären Punkten

Als System erster Ordnung lauten die Gleichungen

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -V'(x).\end{aligned}$$

Die *Gesamtenergie* dieses System ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie,

$$E: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad E(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + V(x).$$

Diese ist konstant entlang jeder Lösung, denn

$$\frac{d}{dt}E(x, \dot{x}) = E_x \dot{x} + E_{\dot{x}} \ddot{x} = V'(x) \dot{x} - \dot{x} V'(x) = 0.$$

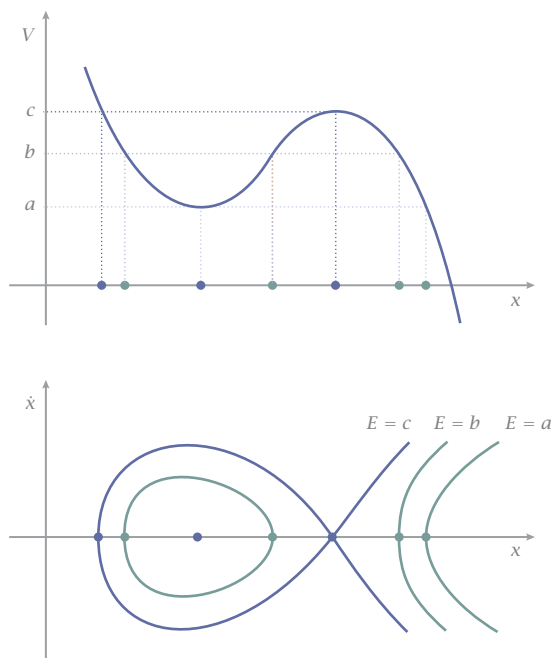
Das ist der klassische *Energieerhaltungssatz*. Jede Lösungskurve ist somit in einer Niveaumenge der Energiefunktion enthalten, und die Niveaumengen liefern bereits Aufschlüsse über die Lösungen der Differenzialgleichung $\ddot{x} = -V'(x)$.

Betrachte also die Niveaumengen von E . Wegen $\nabla E = (V'(x), \dot{x})^\top$ liegen kritische Punkte genau dann vor, wenn

$$V'(x) = 0 \wedge \dot{x} = 0.$$

Diese entsprechen kritischen Punkten des Potentials V auf der x -Achse. Alle anderen Punkte sind regulär, und die zugehörigen Niveaulinien sind reguläre, stetig differenzierbare Kurven. Wegen $E(x, -y) = E(x, y)$ verlaufen diese symmetrisch zur x -Achse und schneiden die x -Achse immer senkrecht, da

$$E_{\dot{x}} = 0 \Leftrightarrow \dot{x} = 0,$$

Abb 13 Ein Potential V und sein Phasenportrait

während an diesen Stellen $V'(x) \neq 0$. Mit diesen Überlegungen lässt sich bereits das sogenannte *Phasenportrait* zur Gleichung $\ddot{x} = -V'(x)$ vollständig beschreiben. ◀

■ Reguläre Punkte

Die Formulierung des IFS geht davon aus, dass bereits eine geeignete Zerlegung der Koordinaten in $x = (u, v)$ vorliegt. Im Allgemeinen ist diese jedoch nicht gegeben, und oft gibt es auch mehr als eine solche Zerlegung. Wir formulieren den IFS daher ein weiteres Mal ohne Bezug auf spezielle Koordinaten.

Zentral ist hier der Begriff des *regulären Punktes*. Bisher hatten wir erklärt, dass ein Punkt p regulär heißt für eine stetig differenzierbare Abbildung

$$f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n \end{array} \right\} \text{ genau dann, wenn } \left\{ \begin{array}{l} f'(p) \neq 0 \\ \nabla f(p) \neq 0 \\ \det Df(p) \neq 0 \end{array} \right\} .$$

Wir verallgemeinern nun diese Definition auf beliebige Abbildungen $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$.

Definition Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Ein Punkt p im Definitionsbereich von f heißt *regulärer Punkt* von f , falls $Df(p)$ surjektiv ist. Andernfalls heißt er *singulärer oder kritischer Punkt* von f . \times

Bemerkungen a. Für eine C^1 -Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist $Df(p)$ surjektiv genau dann, wenn $\text{rang } Df(p) = m$. Somit beinhaltet diese Definition die obigen Spezialfälle.

b. Andererseits gilt

$$\text{rang } Df(p) \leq \min \{n, m\}.$$

Im Fall $n < m$ kann also f keine regulären Punkte haben.

c. Insbesondere haben Kurven $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ für $m \geq 2$ keine regulären Punkte im Sinne dieser Definition. Der früher eingeführte Begriff des regulären Punktes einer Kurve_{13,12} fällt somit *nicht* darunter. Der Begriff ›regulär‹ wird in so vielen Kontexten verwendet, dass solche Kollisionen manchmal auftreten. \rightarrow

12 Niveaufächensatz Sei $f: \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar mit $n \geq 1$. Dann ist lokal um einen regulären Punkt jede Niveaumenge von f der Graph einer stetig differenzierbaren Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. \times

⟨⟨⟨ Nach Voraussetzung ist $\text{rang } Df(p) = m$. Durch geeignete Nummerierung der Koordinaten können wir daher erreichen, dass die letzten m Spalten von $Df(p)$ linear unabhängig sind. Schreiben wir jetzt $x = (u, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ wie üblich, so gilt

$$\text{rang } f_v(p) = m \Leftrightarrow \det f_v(p) \neq 0.$$

Wir können damit den IFS₁₁ anwenden und erhalten eine Umgebung

$$X = U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

von p , eine Umgebung $W \subset \mathbb{R}^m$ von $f(p)$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $\Phi: U \times W \rightarrow V$, so dass für jedes $w \in W$

$$\begin{aligned} f^{-1}(w) \cap X &= \{(u, v) \in X : f(u, v) = w\} \\ &= \{(u, v) \in X : v = \Phi(u, w), u \in U\} \\ &= \Gamma(\Phi(\cdot, w)). \end{aligned}$$

Somit ist lokal um p jede Niveaumenge von f der Graph einer stetig differenzierbaren Abbildung. \gggg

Bemerkung Der Satz gilt im Prinzip auch für $n = 0$. In diesem Fall ist der Umkehrsatz₁ anwendbar, und die Niveaumengen bestehen aus isolierten Punkten. \rightarrow

18.3

Mannigfaltigkeiten

Der Graph einer stetig differenzierbaren Funktion $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}$ respektive $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}$ ist ein eindimensionales Kurvenstück in der Ebene respektive ein zweidimensionales Flächenstück im Raum. Aber nicht alle Kurven oder Flächen sind als Graphen einer einzigen Funktion darstellbar. Das zeigen schon die Kreislinie \mathbb{S}^1 und die Sphäre \mathbb{S}^2 .

Man kann diese Mengen aber als *Niveaumengen* einer einzigen, stetig differenzierbaren Funktion beschreiben. So können wir die n -dimensionale Einheits-sphäre schreiben als $\mathbb{S}^n = g^{-1}(1)$ mit

$$g: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2.$$

Jeder Punkt in \mathbb{S}^n ist ein *regulärer* Punkt von g , da $Dg(x) = 2x \neq 0$ für $x \neq 0$. Somit ist die Sphäre \mathbb{S}^n *lokal* immer als Graph einer Funktion $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}$ darstellbar¹². Der Begriff der Mannigfaltigkeit verallgemeinert diese Überlegung.

- 13 **Definition** Sei $n \geq 0$ und $m \geq 1$. Eine nichtleere Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^{n+m}$ heißt *Mannigfaltigkeit der Kodimension m* , wenn es eine offene Umgebung Ω von M in \mathbb{R}^{n+m} und eine C^1 -Abbildung $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ohne singuläre Punkte gibt, so dass $M = g^{-1}(0) := \{x \in \Omega : g(x) = 0\}$. \times

Bemerkungen a. Der Wert 0 hat keine besondere Bedeutung und kann durch jeden anderen Wert ersetzt werden.

b. Mannigfaltigkeiten der Kodimension 1 werden auch *Hyperflächen* genannt. Im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 spricht man von *Kurven* respektive *Flächen*.

c. Im Fall $n = 0$ besteht M aus isolierten Punkten. Es ist aber sinnvoll, auch solche Objekte als Mannigfaltigkeiten zu betrachten.

d. Genauer haben wir hier *gleichungsdefinierte Untermannigfaltigkeiten* des \mathbb{R}^{n+m} definiert. Der differenzialtopologische Begriff der Mannigfaltigkeit ist wesentlich allgemeiner, aber wir benötigen ihn hier nicht. \rightarrow

Bevor wir zu den Beispielen kommen, stellen wir fest, dass *lokal* jede Mannigfaltigkeit wie ein euklidischer Raum aussieht.

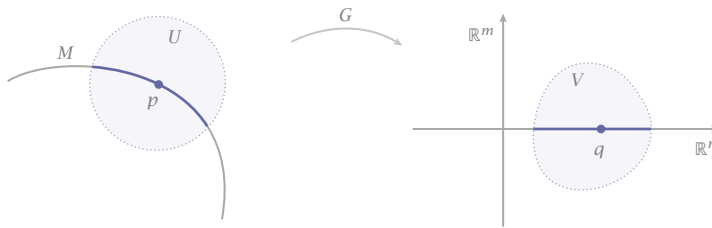
- 14 **Satz** Sei M eine Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^{n+m} der Kodimension m . Dann existiert zu jedem Punkt in M eine Umgebung U und ein Diffeomorphismus

$$F: U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

so dass

$$F(M \cap U) = (\mathbb{R}^n \times 0^m) \cap V. \quad \times$$

Abb 14 Trivialisierende Koordinaten



Man sagt, der Diffeomorphismus F *trivialisert* lokal die Mannigfaltigkeit, da ein Ausschnitt um p diffeomorph auf einen Ausschnitt des \mathbb{R}^n abgebildet wird.

««« Sei $M = g^{-1}(0)$ mit einer C^1 -Abbildung $g: \mathbb{R}^{n+m} \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ ohne singuläre Punkte. Sei $p \in M$. Dann hat $Dg(p)$ Rang m , und wir können die Koordinaten so umordnen, dass die hintere $m \times m$ -Untermatrix von $Dg(p)$ maximalen Rang hat. Setzen wir in einer Umgebung von p jetzt

$$G: \mathbb{R}^{n+m} \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+m}, \quad (u, v) \mapsto (x, y) = (u, g(u, v)),$$

so ist

$$\det DG(p) = \det \begin{pmatrix} I & 0 \\ g_u & g_v \end{pmatrix} (p) = \det(g_v(p)) \neq 0.$$

Also ist G ein lokaler Diffeomorphismus von einer Umgebung U von p auf eine Umgebung $V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Für diesen gilt

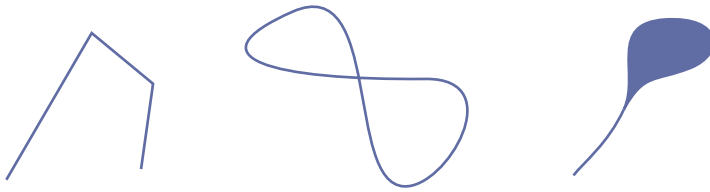
$$G(M \cap U) = G(g^{-1}(0) \cap U) = V \cap \{y = 0\}.$$

Also leistet G das Gewünschte. »»»

Man kann jede solche Abbildung G - beziehungsweise ihre Umkehrabbildung - als ein lokales *Koordinatensystem* auf M betrachten. Die Anzahl n dieser *Koordinaten* ist überall dieselbe und wird als *Dimension* der Mannigfaltigkeit M bezeichnet. Ihre *Kodimension* m ist die Anzahl der *Gleichungen*, durch die M bestimmt wird. Dies gilt auch für die Dimension 0. Eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit ist eine Menge isolierter Punkte. Ihre Kodimension ist die Dimension des Gesamtraumes.

Die Dimension einer Mannigfaltigkeit hängt nicht von ihrem Umgebungsraum ab, lediglich ihre Kodimension. Die Summe aus Dimension und Kodimension einer Mannigfaltigkeit ist immer die Dimension des Gesamtraumes.

Abb 15 Keine Mannigfaltigkeiten



► **Beispiele** A. Im $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^{n+m}$ ist $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \times \{0\}^m$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension n und Kodimension m .

B. Ist $A: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear und surjektiv, so ist $\ker A = A^{-1}(0)$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension n und Kodimension m .

C. Die Sphären $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sind Mannigfaltigkeiten der Dimension n und Kodimension 1. Dies gilt auch für $\mathbb{S}^0 = \{-1, 1\}$ als Teilmenge von \mathbb{R} .

D. Ist $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ regulär, so ist jede nichtleere Menge $f^{-1}(c)$ eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit, nämlich genau ein Punkt.

E. Der Graph einer C^1 -Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad v = \varphi(u)$$

ist eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^{n+m} . Denn ist $D \subset \mathbb{R}^n$ der offene Definitionsbereich von φ , so ist $\Omega = D \times \mathbb{R}^m$ offen in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ und

$$g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad g(u, v) = v - \varphi(u)$$

stetig differenzierbar. Wegen $g_v = \text{Id}$ sind alle Punkte von g regulär, und es ist

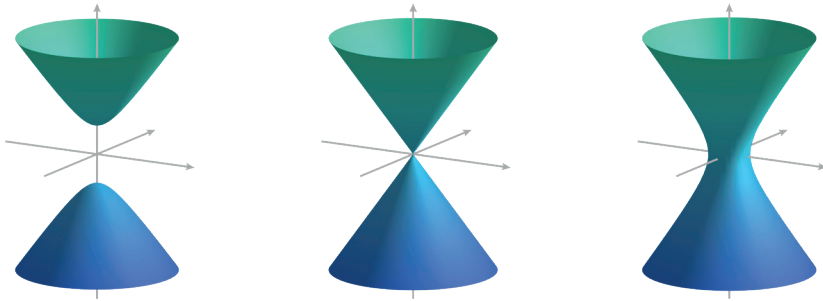
$$\begin{aligned} \Gamma(\varphi) &= \{(u, v) \in \Omega : v = \varphi(u)\} \\ &= \{(u, v) \in \Omega : g(u, v) = 0\} \\ &= g^{-1}(0). \end{aligned}$$

Also ist $\Gamma(\varphi)$ eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^{n+m} .

F. Die Menge $M = \{1/n : n \geq 1\}$ ist eine 0-dimensionale Mannigfaltigkeit in \mathbb{R} , die Menge $M \cup \{0\}$ dagegen *nicht*.

G. Die geometrischen Gebilde in Abbildung 15 sind *keine* Mannigfaltigkeiten, denn solche besitzen keine Ecken, keine Selbstschnitte, und haben überall dieselbe Dimension. ◀

Abb 16 Zweischaliges Hyperboloid, Kegel, und einschaliges Hyperboloid



- 15 ▶ **Hyperboloid und Kegel** Betrachte die Funktion

$$g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2,$$

und ihre Niveaumengen

$$M_c = g^{-1}(c) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = c\}.$$

Jeder Punkt mit Ausnahme des Koordinatenursprungs ist ein regulärer Punkt von g , und dieser liegt auf M_0 . Daher ist jede Menge M_c mit $c \neq 0$ eine Mannigfaltigkeit der Kodimension 1 und Dimension 2, also eine Fläche im \mathbb{R}^3 . Für $c > 0$ ist dies ein *einschaliges Hyperboloid*, für $c < 0$ ein *zweischaliges Hyperboloid*. Für $c = 0$ erhält man einen *Kegel*, der aufgrund seiner Spitze im Nullpunkt keine Mannigfaltigkeit bildet. ◀

■ Reguläre Werte

Die Definition einer Mannigfaltigkeit $M = g^{-1}(0)$ verlangt von der definierenden Funktion g mehr als tatsächlich erforderlich ist. Es genügt, dass jeder Punkt *auf M selbst* ein regulärer Punkt von g ist. Dies führt zum Begriff des *regulären Wertes*.

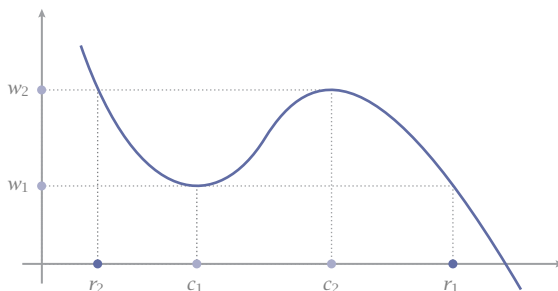
Definition Sei $n \geq 0$ und $m \geq 1$, und $g: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ sei stetig differenzierbar. Ein Punkt $w \in \mathbb{R}^m$ heißt *regulärer Wert* von g , wenn die Menge $g^{-1}(w)$ entweder leer ist oder nur aus regulären Punkten besteht. Andernfalls heißt w ein *singulärer* oder *kritischer Wert* von g . ✕

Bemerkungen a. Ein regulärer Punkt ist also ein Punkt im Definitionsbereich, ein regulärer Wert ein Punkt im Wertebereich einer Abbildung.

b. Der Wert eines regulären Punktes muss kein regulärer Wert sein, denn auch nichtreguläre Punkte können auf denselben Wert abgebildet werden Abb 17.

Abb 17

Zwei kritische Punkte,
zwei reguläre Punkte
sowie zwei kritische
Werte



c. Ob w ein regulärer Wert von g ist, hängt auch vom Definitionsbereich ab. Für die Funktion $g: (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 - z^2$ des letzten Beispiels $_{15}$ ist 0 kein regulärer Wert, da

$$0 \in g^{-1}(0), \quad \nabla g(0) = 0.$$

Entfernen wir den Nullpunkt aus dem Definitionsbereich von g , so wird 0 ein regulärer Wert. Die zugehörige Niveaufäche ist ein Kegel ohne seine Spitze, und diese Menge ist eine Mannigfaltigkeit. \rightarrow

Mit diesem Begriff erhalten wir folgende äquivalente Charakterisierung einer Mannigfaltigkeit.

- 16 Satz** Eine nichtleere Teilmenge M des \mathbb{R}^{n+m} ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension n genau dann, wenn es eine C^1 -Funktion $g: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit regulärem Wert 0 gibt, so dass $M = g^{-1}(0)$. \times

⟨⟨⟨ Ist $M = g^{-1}(0)$ eine Mannigfaltigkeit im Sinne unserer Definition $_{13}$, so ist insbesondere jeder Punkt in $g^{-1}(0)$ ein regulärer Punkt und damit 0 selbst ein regulärer Wert von g .

Sei umgekehrt 0 ein regulärer Wert von g . Dann ist jeder Punkt p in $M = g^{-1}(0)$ ein regulärer Punkt von g und damit $Dg(p)$ surjektiv. Dies ist äquivalent mit der Eigenschaft, dass die Determinante einer geeigneten Auswahl von m Spalten von $Dg(p)$ nicht verschwindet. Diese Determinante hängt stetig von p ab und ist somit auch auf einer offenen Umgebung von p nicht Null. Es existiert also zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebung $U(p)$ in \mathbb{R}^{n+m} , so dass

$$\text{rang } Dg(x) = m, \quad x \in U(p).$$

Setzen wir $\Omega = \bigcup_{p \in M} U(p)$, so erhalten wir eine M umfassende offene Menge Ω ohne singuläre Punkte von g . Also ist M eine Mannigfaltigkeit im Sinne unserer Definition $_{13}$. $\rangle\rangle\rangle$

Vereinbarung Im Folgenden heiße eine nichtleere Teilmenge M des \mathbb{R}^{n+m} eine *g-definierte Mannigfaltigkeit*, wenn $M = g^{-1}(0)$ mit einer stetig differenzierbaren Funktion $g: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit regulärem Wert 0. \times

■ Tangentialraum und Normalraum

Jedem Punkt p einer Mannigfaltigkeit M können wir *Tangentialvektoren* zuordnen. Dazu betrachten wir beliebige Kurven auf M durch p und deren Geschwindigkeitsvektoren in diesem Punkt.

- 17 **Definition** Ein Vektor $v \in \mathbb{R}^{n+m}$ heißt *Tangentialvektor* an M im Punkt p , wenn es eine C^1 -Kurve $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ gibt mit

$$\gamma(0) = p, \quad \dot{\gamma}(0) = v.$$

Die Menge aller Tangentialvektoren an M im Punkt p heißt der *Tangentialraum* von M an p und wird mit T_pM bezeichnet. \times

Man stellt sich Tangentialvektoren üblicherweise als im Punkt p angeheftete ›gebundene‹ Ortsvektoren vor. Tatsächlich handelt es sich um ›ungebundene‹ Vektoren, also Elemente eines Vektorraumes. Der Raum T_pM ist ein *Vektorraum* derselben Dimension wie M :

- 18 **Satz** Sei M eine *g-definierte Mannigfaltigkeit*. Dann ist

$$T_pM = \ker Dg(p), \quad p \in M.$$

Insbesondere ist jeder Tangentialraum T_pM ein Vektorraum derselben Dimension wie M . \times

⟨⟨⟨⟨ Sei $G: U \rightarrow V$ ein lokaler trivialisierender Diffeomorphismus um p 14, so dass

$$G(M \cap U) = (\mathbb{R}^n \times 0^m) \cap V.$$

Für die Umkehrabbildung $\Phi = G^{-1}$ um $q = F(p)$ gilt dann $g \circ \Phi \equiv 0$ entlang aller Kurven in $(\mathbb{R}^n \times 0^m) \cap V$. Insbesondere gilt

$$(g \circ \Phi)(q + te_i) \equiv 0, \quad 1 \leq i \leq n,$$

auf einem t -Intervall um 0, und damit

$$Dg(p)D\Phi(q)e_i = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Die Vektoren $D\Phi(q)e_i$ liegen somit sämtlich im Kern von $Dg(p)$. Außerdem sind sie linear unabhängig, da $D\Phi(q)$ regulär ist. Da der Kern von $Dg(p)$ aber

Dimension n hat, folgt

$$\text{span} \{D\Phi(q)e_i : 1 \leq i \leq n\} = \ker Dg(p).$$

Auf der anderen Seite ist klar, dass der Raum links die Geschwindigkeitsvektoren sämtlicher möglicher Kurven auf M durch p enthält, also

$$T_p M = \text{span} \{D\Phi(q)e_i : 1 \leq i \leq n\}$$

gilt. Also ist $T_p M = \ker Dg(p)$. \gggg

Versehen wir den \mathbb{R}^{n+m} mit einem beliebigen Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, so ist auch die Orthogonalität zweier Vektoren und das orthogonale Komplement einer Teilmenge erklärt. Damit können wir auch den *Normalraum* einer Mannigfaltigkeit definieren.

Definition Sei M eine Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^{n+m} . Ist dieser mit einem Skalarprodukt versehen, so heißt das orthogonale Komplement zum Tangentialraum $T_p M$ der *Normalraum* von M in p und wird mit $T_p^\perp M$ bezeichnet. Seine Elemente heißen die *Normalenvektoren* von M in p . \times

Für jeden Punkt $p \in M$ gilt also

$$T_p M \oplus T_p^\perp M = \mathbb{R}^{n+m}.$$

19 Satz Sei M eine g -definierte Mannigfaltigkeit der Dimension n im \mathbb{R}^{n+m} . Ist dieser mit einem Skalarprodukt versehen, so ist

$$T_p^\perp M = \text{span} \{\nabla g_1(p), \dots, \nabla g_m(p)\}, \quad p \in M. \quad \times$$

Die Gradienten der Komponentenfunktionen von g bezüglich dieses Skalarproduktes stehen also überall senkrecht auf der Niveaumenge $M = g^{-1}(0)$ und spannen in jedem Punkt deren Normalraum auf.

\llll Nach dem letzten Satz ist $T_p M = \ker Dg(p)$. Für jede Komponentenfunktion g_k von g gilt also

$$Dg_k(p)v = \langle \nabla g_k(p), v \rangle = 0, \quad v \in T_p M.$$

Also ist

$$\nabla g_k(p) \in T_p^\perp M, \quad 1 \leq k \leq m.$$

Andererseits sind alle diese Gradienten linear unabhängig, da g im Punkt p regulär ist. Da der Normalraum $T_p^\perp M$ genau die Dimension m hat, müssen diese m linear unabhängigen Vektoren diesen Raum aufspannen. \gggg

► Wir betrachten noch einmal

$$g: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \|x\|^2.$$

Der Gradient von g verschwindet nur im Nullpunkt, und dort ist $g(0) = 0$. Also ist 1 ein regulärer Wert von g , und $\mathbb{S}^n = g^{-1}(1)$ eine Mannigfaltigkeit der Kodimension 1 und Dimension n . Ein Normalenvektor im Punkt $x \in \mathbb{S}^n$ ist x selbst. Somit gilt

$$T_x^\perp \mathbb{S}^n = \text{span} \{x\}, \quad T_x \mathbb{S}^n = \{x\}^\perp.$$

Die *Tangentialebene* an \mathbb{S}^n im Punkt x ist übrigens die zu $T_x M$ parallele affine Ebene durch den Punkt x , also

$$\begin{aligned} x + T_x \mathbb{S}^n &= x + \{x\}^\perp = x + \{v : \langle v, x \rangle = 0\} \\ &= \{v : \langle v - x, x \rangle = 0\} \\ &= \{v : \langle v, x \rangle = 1\}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

18.4

Extrema mit Nebenbedingungen

Ein oft auftretendes Problem ist, Extremwerte einer skalaren Funktion zu bestimmen, während gleichzeitig eine Anzahl von Nebenbedingungen in Form von Gleichungen einzuhalten sind.

Ein anschauliches Beispiel ist die Aufgabe, auf einer Fläche diejenigen Punkte mit dem größten oder kleinstem Abstand zu einem Referenzpunkt zu finden. Als Zielfunktion dient hier bequemerweise das *Quadrat* des euklidischen Abstands, also

$$f(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

Die Fläche selbst soll durch m Gleichungen

$$g_i(x) = 0, \quad 1 \leq i \leq m.$$

beschrieben werden. Ist 0 ein regulärer Wert der Vektorfunktion

$$g = (g_1, \dots, g_m)^\top : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

so handelt es sich bei dieser Fläche um eine durch g bestimmte Mannigfaltigkeit M der Kodimension m . Es geht dann darum, Extremwerte der *Einschränkung* $f|_M$ von f auf M zu bestimmen. Die primäre Aufgabe ist dabei, deren *kritischen*

Punkte zu finden. Die Frage, ob dort ein Maximum oder Minimum vorliegt, ergibt sich meist aus geometrischen Überlegungen.

Naheliegender ist die Idee, die Mannigfaltigkeit M mehr oder weniger geschickt zu parametrisieren und dadurch die Nebenbedingungen aufzulösen. Die Zielfunktion könnte man dann wie gewohnt untersuchen^{15,14}. Dies ist allerdings im Allgemeinen sehr mühsam – und auch nicht nötig. Denn solche kritischen Punkte lassen sich geometrisch sehr einfach charakterisieren.

Im Folgenden hat der Gesamtraum wieder die Dimension n . Eine Mannigfaltigkeit der Kodimension m hat jetzt also die Dimension $n - m$.

- 20 Satz** Sei M eine Mannigfaltigkeit und f eine in einer Umgebung von M stetig differenzierbare skalare Funktion. Dann besitzt $f|_M$ einen kritischen Punkt in $p \in M$ genau dann, wenn

$$\nabla f(p) \in T_p^\perp M. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Die Einschränkung der Funktion f auf M besitzt im Punkt $p \in M$ einen kritischen Punkt genau dann, wenn sie entlang aller Kurven auf M durch p dort einen kritischen Punkt besitzt. Somit müssen sämtliche Richtungsableitungen in *tangentialen* Richtungen an M verschwinden:

$$Df(p)v = \langle \nabla f(p), v \rangle = 0, \quad v \in T_p M.$$

Also gilt $\nabla f(p) \perp T_p M$ und damit $\nabla f(p) \in T_p^\perp M$. ⟩⟩⟩

Dies ist ein abstraktes geometrisches Resultat. Es ist unabhängig davon, wie die Mannigfaltigkeit M gegeben ist. Konkreter wird es für gleichungsdefinierte Mannigfaltigkeiten.

- 21 Korollar** Sei M eine g -definierte Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^n der Kodimension m und $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ in einer Umgebung von M stetig differenzierbar. Dann besitzt $f|_M$ einen kritischen Punkt in $p \in M$ genau dann, wenn es reelle Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ gibt, genannt *Lagrangemultiplikatoren*, so dass

$$\nabla f(p) = \lambda_1 \nabla g_1(p) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(p). \quad \times$$

⟨⟨⟨ Für einen kritischen Punkt p von $f|_M$ gilt ja^{19, 20}

$$\nabla f(p) \in T_p^\perp M = \text{span} \{ \nabla g_1(p), \dots, \nabla g_m(p) \}.$$

Also ist $\nabla f(p)$ eine Linearkombination von $\nabla g_1(p), \dots, \nabla g_m(p)$. ⟩⟩⟩

Für die praktische Anwendung formulieren wir dieses Ergebnis noch einmal für den Standardfall. Aus kritischen Punkten der Funktion f mit Nebenbedingungen werden kritische Punkte einer Hilfsfunktion F ohne Nebenbedingungen, wobei allerdings die Dimension des Problems vergrößert wird.

Satz Es seien $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ auf einem gemeinsamen Definitionsbereich stetig differenzierbar und 0 ein regulärer Wert von g . Dann besitzt f unter der Nebenbedingung $g = 0$ einen kritischen Punkt p genau dann, wenn die *erweiterte Funktion*

$$F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, \lambda) = f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle$$

einen kritischen Punkt (p, μ) besitzt. \times

««« Besitzt F einen kritischen Punkt (p, μ) , so ist erstens

$$0 = \partial_{\lambda_k} F(p, \mu) = g_k(p), \quad 1 \leq k \leq m,$$

und zweitens

$$0 = \partial_{x_l} F(p, \mu) = \partial_{x_l} f(p) + \sum_{k=1}^m \mu_k \partial_{x_l} g_k(p), \quad 1 \leq l \leq n.$$

Ersteres ist äquivalent mit $p \in M = g^{-1}(0)$, und Letzteres ist äquivalent mit

$$0 = \nabla F(p, \mu) = \nabla f(p) + \sum_{k=1}^m \mu_k \nabla g_k(p),$$

also mit

$$\nabla f(p) \in T_p^\perp M.$$

Also ist p ein kritischer Punkt von f unter den Nebenbedingungen $g = 0$. - Die Umkehrung beweist man mit denselben Argumenten. »»»

Damit erhalten wir folgendes Verfahren zur Lösung von Extremalaufgaben mit Nebenbedingungen. Sind die Zielfunktion f und die Nebenbedingungen $g = (g_1, \dots, g_m) = 0$ gegeben, und ist 0 ein regulärer Wert von g , so bilden wir die erweiterte Funktion

$$F = f + \langle \lambda, g \rangle$$

und bestimmen deren kritische Punkte bezüglich x und λ . Dies führt zu einem System aus $n + m$ Gleichungen für ebensoviele Unbekannte x_1, \dots, x_n und $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, und zwar

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{x_k} f(x) + \lambda_1 \partial_{x_k} g_1(x) + \dots + \lambda_m \partial_{x_k} g_m(x), & 1 \leq k \leq n, \\ 0 &= g_l(x), & 1 \leq l \leq m. \end{aligned}$$

Dieses ist zu lösen. Der Erfolg ist allerdings nicht garantiert, da es sich im Allgemeinen um *nichtlineare* Gleichungen handelt. — Dazu zwei Beispiele.

► *Youngsche Ungleichung* Betrachte

$$f(u, v) = \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q},$$

wobei

$$p, q > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Auf dem positiven Quadranten $\{(u, v) : u, v > 0\}$ besitzt f keine lokalen Extrema. Wir beschränken uns deshalb auf die Teilmenge mit $uv = 1$, stellen also die Nebenbedingung

$$g(u, v) = uv - 1 = 0.$$

Die erweiterte Funktion ist dann

$$F(u, v, \lambda) = \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} + \lambda(uv - 1).$$

Für die kritischen Punkte erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} u^{p-1} + \lambda v &= 0, \\ v^{q-1} + \lambda u &= 0, \\ uv &= 1. \end{aligned}$$

Multiplizieren der ersten Gleichung mit u und der zweiten mit v ergibt $u^p = v^q$, und zusammen mit $uv = 1$ folgt $u = v = 1$. Offensichtlich handelt es sich hierbei um ein absolutes Minimum. Als Ergebnis erhalten wir

$$\frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \geq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

für alle $u, v > 0$ mit $uv = 1$.

Um die allgemeine Ungleichung für $u, v > 0$ zu erhalten, setzen wir

$$\tilde{u} = \frac{u}{(uv)^{1/p}}, \quad \tilde{v} = \frac{v}{(uv)^{1/q}}.$$

Es ist $\tilde{u}\tilde{v} = 1$, also

$$\frac{\tilde{u}^p}{p} + \frac{\tilde{v}^q}{q} = \frac{u^p}{puv} + \frac{v^q}{quv} \geq 1.$$

Also gilt allgemein

$$\frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \geq uv, \quad u, v > 0. \quad \blacktriangleleft$$

► *Eigenwerte* Sei $A \in L(\mathbb{R}^n)$ ein symmetrischer Operator bezüglich eines beliebigen Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf dem \mathbb{R}^n . Die quadratische Form

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \langle Ax, x \rangle$$

ist auf dem Gesamtraum unbeschränkt, wenn sie nicht identisch Null ist. Auf der kompakten Einheitskugel $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, x \rangle = 1\}$ nimmt sie aber ihr Minimum und Maximum an, besitzt also dort im Fall $n \geq 2$ mindestens zwei kritische Punkte.

Um diese zu charakterisieren, schreiben wir die Nebenbedingung als

$$g(x) = 1 - \langle x, x \rangle.$$

Die erweiterte Funktion lautet dann

$$F(x, \lambda) = \langle Ax, x \rangle + \lambda(1 - \langle x, x \rangle).$$

Das zugehörige Gleichungssystem ist

$$\begin{aligned} Ax - \lambda x &= 0, \\ \langle x, x \rangle &= 1. \end{aligned}$$

Ein kritischer Punkt der quadratischen Form f auf \mathbb{S}^n ist demnach ein normierter *Eigenvektor* von A , sein Lagrangemultiplikator der zugehörige *Eigenwert*.

Da die quadratische Form kritische Punkte besitzen *muss*, erhalten wir damit einen Beweis, dass jeder symmetrische Operator mindestens einen reellen Eigenwert besitzt.

Eine Erweiterung dieses Arguments liefert sogar die Existenz einer orthonormalen Basis für A . Ist v der im ersten Schritt gefundene normierte Eigenvektor, so suchen wir im nächsten Schritt ein Maximum auf $\mathbb{S}^{n-1} \cap \{v\}^\perp$. Mit anderen Worten, wir betrachten nun die Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} g_0(x) &= 1 - \langle x, x \rangle = 0, \\ g_1(x) &= \langle v, x \rangle = 0. \end{aligned}$$

Eine Maximalstelle auf $g^{-1}(0) = \mathbb{S}^{n-1} \cap \{v\}^\perp$ tritt dann an einem weiteren Eigenvektor auf, der aufgrund der Konstruktion orthogonal zu v ist. Dabei spielt es keine Rolle, ob der zugehörige Eigenwert vom ersten verschieden ist oder nicht.

Fährt man so fort, so erhält man eine orthogonale Basis des Gesamtraumes, bestehend auf Eigenvektoren des Operators A . ◀

Aufgaben

- 1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Gilt in jedem Punkt $x \in \Omega$

$$\langle Df(x)h, h \rangle > 0, \quad h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

so ist f auf Ω injektiv.

- 2 Eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi: \Omega \rightarrow \Omega'$ ist ein Diffeomorphismus genau dann, wenn sie bijektiv und regulär ist.
- 3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beliebig, aber nicht leer, sei $x_0 \in \Omega$, und für $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei

$$[f]_{\Omega} = \sup_{\substack{u \neq v \\ u, v \in \Omega}} \frac{|f(u) - f(v)|}{|u - v|}.$$

Dann gilt:

- a. $L := \{f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n) : f(x_0) = 0, [f]_{\Omega} < \infty\}$ ist ein reeller Vektorraum.
 b. $[\cdot]_{\Omega}$ definiert auf L eine Norm.
 c. Mit dieser Norm ist L vollständig.
- 4 Beweisen sie für die Abbildung φ^{-1} von Proposition C₇ die Lipschitzabschätzung

$$[\varphi^{-1} - id]_{B_{r/2}(0)} \leq \frac{\lambda}{1 - \lambda}, \quad \lambda = [\varphi - id]_{B_r(0)}.$$

- 5 a. Zeigen sie, dass

$$\phi: (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (u, v) = \phi(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

einen Diffeomorphismus auf seine Bildmenge definiert.

- b. Bestimmen sie die Jacobische der Umkehrabbildung.
 c. Skizzieren sie einige Koordinatenlinien $\{x = a\}$ und $\{y = b\}$ von ϕ sowie $\{u = c\}$ und $\{v = d\}$ von ϕ^{-1} .
- 6 Ist $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ von der Klasse C^r , $r \geq 1$, und lokal um x_0 stetig differenzierbar umkehrbar, so ist auch die lokale Umkehrfunktion φ^{-1} von der Klasse C^r .
- 7 Zeigen sie, dass es eine Funktion $\varphi \in C^\infty(I)$ mit $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$ und $\varphi(0) = 0$ gibt, die die Gleichung

$$x\varphi^2(x) + 2x^2 e^{\varphi(x)} = \varphi(x)$$

erfüllt. Bestimmen sie außerdem $\varphi'(0)$.

- 8 a. \mathbb{Z} ist eine Mannigfaltigkeit in \mathbb{R} .
 b. Ebenso die Menge $M = \{1/n : n \geq 1\}$.
 c. Nicht aber $M' = M \cup \{0\}$.
- 9 Zeichnen sie eine Auswahl typischer Niveaumengen zu

- a. $x^4 - 4x^2 + y^2$
 b. $x^2 e^{-x} + y^2$.

Welche davon sind Mannigfaltigkeiten? Welches sind die kritischen Werte?

10 Gegeben ist

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2 + 2y^2 + 1.$$

- a. Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(c)$ eine Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^2 ?
- b. Wie lauten in diesem Fall die Tangentengleichungen?

19

Wegintegrale

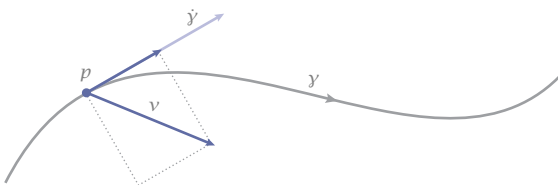
Die entlang eines geradlinigen Weges bei gleichbleibender Krafteinwirkung geleistete Arbeit ist das Produkt aus zurückgelegter Wegstrecke und in Richtung dieser Wegstrecke wirkender Kraftkomponente. Will man allgemeiner die geleistete Arbeit entlang eines beliebigen Weges γ innerhalb eines Kraftfeldes v bestimmen, so ist in jedem Punkt die anliegende Kraft auf den momentanen Geschwindigkeitsvektor zu projizieren und das resultierende Produkt über den Weg zu integrieren. Dies führt zu einem Integral der Form

$$\int_a^b \langle v(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \rangle dt$$

für die geleistete Arbeit.

Mathematisch kann man den Integranden auffassen als die Anwendung der *Linearform* $\langle v, \cdot \rangle$ auf den *Vektor* $\dot{\gamma}$. Die Weiterentwicklung dieses Gedankens führt zum Begriff der *Differenzialform*, die entlang eines Weges zu integrieren ist. Dies vermeidet unter anderem die Einbeziehung eines Skalarprodukt und erlaubt eine koordinatenfreie Interpretation solcher Kurvenintegrale.

Abb 1 Weg in einem Kraftfeld



19.1

Pfaffsche Formen

Sei zunächst V ein Vektorraum endlicher Dimension und $V^* = L(V, \mathbb{R})$ sein Dualraum, also der Raum aller stetigen linearen Abbildungen $V \rightarrow \mathbb{R}$.

1 **Definition** Eine *Pfaffsche Form* oder *1-Form* ist eine Abbildung

$$\alpha : V \rightarrow V^*, \quad x \mapsto \alpha(x),$$

die jedem Punkt in ihrem Definitionsbereich eine Linearform zuordnet. \times

Pfaffsche Formen werden auch *Differenzialformen vom Grad 1* genannt. Für die Anwendung einer 1-Form α am Punkt x auf einen Vektor $h \in V$ schreiben wir $\alpha(x)h$ oder kürzer $\alpha(h)$, wenn der Punkt x keine besondere Rolle spielt.

Wir beschränken uns auf *reellwertige* 1-Formen. Komplexwertige 1-Formen spielen in der Funktionentheorie eine zentrale Rolle und werden dort betrachtet.

2 \triangleright A. Eine differenzierbare Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ definiert eine Pfaffsche Form

$$df : V \rightarrow V^*, \quad x \mapsto df(x),$$

genannt das *Differenzial* von f , indem wir definieren:

$$df(x)h := Df(x)h = \partial_{hf}(x).$$

B. Sei $\nu : V \rightarrow V$ ein stetiges *Vektorfeld*, also eine Abbildung, die jedem Punkt in seinem Definitionsbereich in V einen Vektor *desselben* Vektorraumes zuordnet. Mithilfe eines Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V induziert dies eine 1-Form

$$\alpha_\nu := \langle \nu, \cdot \rangle.$$

C. Insbesondere ist

$$df = \alpha_{\nabla f},$$

denn aufgrund der Definition des Gradienten ist ja

$$df(h) = Df h = \langle \nabla f, h \rangle. \quad \blacktriangleleft$$

■ Der Standardfall

Wie sehen 1-Formen im Standardfall $V = \mathbb{R}^n$ aus? Auf dem \mathbb{R}^n sind die *Koordinatenfunktionen*

$$\pi_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \pi_k(x) = x_k,$$

stetig differenzierbar, und es gilt

$$d\pi_k(h) = D\pi_k(h) = h_k.$$

Für die Standardbasis e_1, \dots, e_n des \mathbb{R}^n gilt insbesondere

$$d\pi_k(e_l) = \delta_{kl}, \quad 1 \leq k, l \leq n.$$

Die Differenziale $d\pi_1, \dots, d\pi_n$ bilden also gerade die zur Standardbasis e_1, \dots, e_n *duale Basis*. Bezeichnen wir jetzt vereinfachend die k -te Koordinatenfunktion mit x_k anstelle von π_k , gelangen wir zur folgenden

Definition Die zur Standardbasis e_1, \dots, e_n des Vektorraumes \mathbb{R}^n *duale Basis* wird mit dx_1, \dots, dx_n bezeichnet. Es gilt also

$$dx_k(e_l) = \delta_{kl}, \quad 1 \leq k, l \leq n. \quad \times$$

Jede 1-Form im \mathbb{R}^n kann damit dargestellt werden als Linearkombination dieser Basisformen, also als

$$\alpha = \sum_{k=1}^n a_k(x) dx_k.$$

Ihre Koeffizienten sind reelle Funktionen, für die

$$a_k = \alpha(e_k)$$

gilt.

- A. Im eindimensionalen Standardfall hat jede Pfaffsche Form die Gestalt

$$\alpha = a(x) dx.$$

Sie ist also durch eine einzige skalare Funktion gegeben.

- B. Das Differential einer C^1 -Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ hat die Darstellung

$$df = \sum_{k=1}^n \partial_k f(x) dx_k,$$

denn $df(e_k) = Df e_k = \partial_k f$. Die partiellen Ableitungen von f sind also gerade die Koeffizienten des Differenzials df bezüglich der Standardbasis.

C. Die im Standardfall durch ein Vektorfeld $v = \sum_{k=1}^n v_k(x) e_k$ induzierte 1-Form α_v ist

$$\alpha_v = \langle v, \cdot \rangle = \sum_{k=1}^n v_k(x) dx_k,$$

denn deren Koeffizienten sind $\alpha_v(e_k) = \langle v, e_k \rangle = v_k$. Dies schreibt man auch gerne als klassisches Skalarprodukt

$$\alpha_v = v \bullet dx$$

aus $v = (v_1, \dots, v_n)$ und $dx = (dx_1, \dots, dx_n)$. ◀

Schließlich erklären wir noch die Regularität von 1-Formen.

Definition Eine 1-Form α heißt *stetig* respektive *von der Klasse C^r* , wenn sie als Abbildung $\alpha: V \rightarrow V^*$ stetig respektive von der Klasse C^r ist. \times

Für eine Basisdarstellung einer 1-Form bedeutet dies, dass sämtliche Koeffizientenfunktionen stetig respektive von der Klasse C^r sind.

19.2

Kurven- und Wegintegrale

Wir definieren nun das Integral von 1-Formen entlang Kurven so, wie wir es in der Einleitung skizziert haben. Dabei betrachten wir stückweise stetig differenzierbare Kurven, die wir in Abschnitt 13.5 wie folgt definiert hatten. Zur Wiederholung:

Definition Eine stetige Kurve $\gamma: I \rightarrow V$ ist *stückweise stetig differenzierbar*, wenn es eine Teilung (t_1, \dots, t_n) des Intervalls I gibt, so dass alle Abschnitte $\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}$ mit $1 \leq k \leq n$ stetig differenzierbar sind. Die Klasse aller dieser Kurven wird mit $D^1(I, V)$ bezeichnet. \times

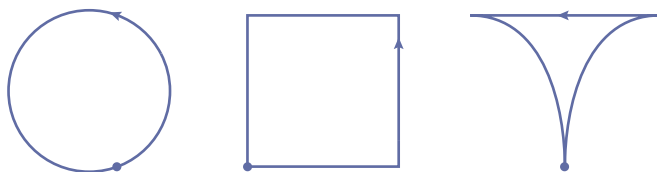
Insbesondere besitzt die Ableitung einer D^1 -Kurve in jedem inneren Teilungspunkt links- und rechtsseitige Grenzwerte. Summe und skalare Vielfache von D^1 -Kurven sind wieder D^1 -Kurven. Somit ist $D^1(I, V)$ ein reeller Vektorraum.

Da wir es im Folgenden nur mit Integralen zu tun haben, müssen wir die Teilungspunkte einer D^1 -Kurve nicht explizit betrachten. Für die Länge einer solchen Kurve gilt zum Beispiel

$$L(\gamma) = \sum_{k=1}^n L(\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}) = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt,$$

denn die endlich vielen Sprungstellen des Integranden an den Teilungspunkten haben keinen Einfluss auf das Integral_{10.12}. Ebenso verhält es sich mit den übrigen Integralen, die wir noch betrachten werden.

Abb 2 Stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurven



Nun zur Definition des Kurvenintegrals.

- 3 **Definition** Sei $\alpha: V \hookrightarrow V^*$ eine stetige 1-Form und $\gamma: [a, b] \rightarrow V$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve im Definitionsbereich von α . Dann heißt

$$\int_{\gamma} \alpha := \int_a^b \alpha(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$

das *Kurvenintegral* von α längs der Kurve γ . \times

An jedem Kurvenpunkt $\gamma(t)$ wird also die 1-Form $\alpha(\gamma(t))$ auf den Vektor $\dot{\gamma}(t)$ angewendet. Das Ergebnis ist eine skalare Funktion, die wie üblich über das Parameterintervall der Kurve integriert wird.

Im Standardfall mit

$$\alpha = \sum_{k=1}^n a_k(x) dx_k, \quad \dot{\gamma} = \sum_{l=1}^n \dot{\gamma}_l(t) e_l$$

ergibt dies

$$\int_{\gamma} \alpha = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n a_k(\gamma(t)) \dot{\gamma}_k(t) \right) dt,$$

da ja

$$dx_k(\dot{\gamma}) = \sum_{l=1}^n \dot{\gamma}_l dx_k(e_l) = \dot{\gamma}_k.$$

- 4 \blacktriangleright *Ein beliebiges Beispiel* Sei $\alpha = y^2 dx + dy$ eine 1-Form auf \mathbb{R}^2 . Betrachte die Kurven

$$\gamma_{\sigma}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma_{\sigma}(t) = (t, t^{\sigma})$$

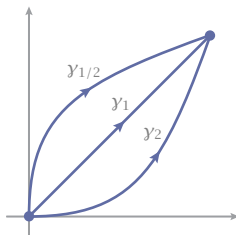
für $\sigma > 0$. Dann erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{\sigma}} \alpha &= \int_0^1 (t^{2\sigma} dx + dy) (1, \sigma t^{\sigma-1})^{\top} dt \\ &= \int_0^1 (t^{2\sigma} + \sigma t^{\sigma-1}) dt \\ &= \frac{t^{2\sigma+1}}{2\sigma+1} + t^{\sigma} \Big|_0^1 \\ &= 1 + \frac{1}{2\sigma+1}. \end{aligned}$$

Das Ergebnis hängt also vom Weg ab, auch wenn alle Kurven denselben Anfangspunkt $(0, 0)$ und denselben Endpunkt $(1, 1)$ haben. \blacktriangleleft

Abb 3

Integrationswege γ_σ
in Beispiel 4



5 \Rightarrow **Windungsform** Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sei

$$v = \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2}.$$

Für die Standardparametrisierung γ des Einheitskreises, also $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ mit $0 \leq t \leq 2\pi$, erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} v &= \int_0^{2\pi} (-\sin t \, dx + \cos t \, dy) (-\sin t, \cos t)^\top dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Ist allgemeiner $m \in \mathbb{Z}$ und γ_m mit $\gamma_m(t) = (\cos mt, \sin mt)$ der m -mal durchlaufene Einheitskreis, so ist

$$\int_{\gamma_m} v = \int_0^{2\pi} m(\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi m.$$

Das Integral misst also, bis auf den Faktor 2π , wie oft sich γ_m um den Nullpunkt herum windet. Dies gilt auch für $m = 0$, denn γ_0 ist eine Punktkurve, die sich *nicht* um den Nullpunkt windet. Wie wir noch sehen werden, gilt dies auch für jede andere geschlossene Kurve, die nicht durch den Nullpunkt hindurch läuft¹³. Aus diesem Grund heißt v auch **Windungsform**. \leftarrow

Wir wollen uns noch davon überzeugen, dass unsere Definition des Kurvenintegrals₃ »natürlich« ist. Das heißt, wir gelangen zu demselben Integral, wenn wir es durch endliche Summen approximieren. Sei dazu (t_1, \dots, t_n) eine Teilung von $[a, b]$. Eine zugehörige Teilungssumme ist dann

$$W_T(\alpha) = \sum_{k=1}^n \alpha(\gamma(\tau_k))(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})),$$

wobei die Auswertungspunkte $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ beliebig gewählt seien.

6 Satz Ist α stetig und γ stückweise stetig differenzierbar, so gilt

$$W_T(\alpha) \rightarrow \int_{\gamma} \alpha = \int_a^b \alpha(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt,$$

wenn die Feinheit der Teilung T gegen Null strebt. \times

⟨⟨⟨ Eine stückweise stetig differenzierbare Kurve γ ist rektifizierbar. Es ist also $L = L(\gamma) < \infty$. Außerdem ist ihre Spur eine kompakte Teilmenge von V . Die stetige 1-Form α entlang γ ist somit *gleichmäßig* stetig_{7.32}. Das heißt, zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\|\alpha \circ \gamma|_u^v\|_* < \frac{\varepsilon}{L}, \quad |u - v| < \delta. \quad (1)$$

Dabei bezeichnet $\|\cdot\|_*$ die durch eine Norm $\|\cdot\|$ auf V induzierte Operatornorm auf V^* . Es gilt also $|\alpha(h)| \leq \|\alpha\|_* \|h\|$. Schreibe jetzt

$$\begin{aligned} W_T(\alpha) &= \sum_{k=1}^n \alpha(\gamma(\tau_k)) (\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})) \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha(\gamma(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{\gamma}(t) dt \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \alpha(\gamma(\tau_k)) \dot{\gamma}(t) dt. \end{aligned}$$

Dann wird mit der Definition des Wegintegrals₃

$$W_T(\alpha) - \int_{\gamma} \alpha = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} [\alpha(\gamma(\tau_k)) - \alpha(\gamma(t))] \dot{\gamma}(t) dt.$$

Ist die Feinheit von T kleiner als δ , so können wir auf jeden Term in eckigen Klammern die Abschätzung (1) anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \left| W_T(\alpha) - \int_{\gamma} \alpha \right| &\leq \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\alpha(\gamma(\tau_k)) - \alpha(\gamma(t))\|_* \|\dot{\gamma}(t)\| dt \\ &< \frac{\varepsilon}{L} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot{\gamma}(t)\| dt \\ &= \frac{\varepsilon}{L} \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt = \varepsilon. \end{aligned}$$

Das war zu zeigen. $\rangle\rangle\rangle$

■ Invarianz

Das Interessante und Wesentliche am Kurvenintegral ist, dass es *unabhängig* von der gewählten Parametrisierung der Kurve ist.

Lemma Sei $\alpha: V \rightarrow V^*$ eine stetige 1-Form, $\gamma: I \rightarrow V$ eine D^1 -Kurve im Definitionsbereich von α und $\varphi: I_* \rightarrow I$ eine orientierungstreue D^1 -Parametertransformation. Dann gilt

$$\int_{\gamma \circ \varphi} \alpha = \int_{\gamma} \alpha. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Seien γ und φ zunächst stetig differenzierbar. Für $I_* = [a_*, b_*]$ gilt

$$I = [a, b] = \varphi(I_*) = [\varphi(a_*), \varphi(b_*)],$$

da φ die Orientierung erhält. Für $\gamma_* = \gamma \circ \varphi$ folgt mit der klassischen Substitutionsregel daher

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_*} \alpha &= \int_{a_*}^{b_*} \alpha(\gamma_*(t)) \dot{\gamma}_*(t) dt \\ &= \int_{a_*}^{b_*} \alpha(\gamma(\varphi(t))) \dot{\gamma}(\varphi(t)) \dot{\varphi}(t) dt \\ &= \int_{\varphi(a_*)}^{\varphi(b_*)} \alpha(\gamma(s)) \dot{\gamma}(s) ds = \int_a^b \alpha(\gamma(s)) \dot{\gamma}(s) ds = \int_{\gamma} \alpha. \end{aligned}$$

Mit einer geeigneten Zerlegung in endlich viele Teilintervalle folgt die Behauptung dann auch für D^1 -Kurven und D^1 -Parametertransformationen. ⟩⟩⟩

Die Unabhängigkeit des Kurvenintegrals einer 1-Form von der gewählten Parametrisierung der Kurve erlaubt es uns, dieses auch für einen *Weg* zu definieren, also eine *Äquivalenzklasse* von parametrisierten Kurven.

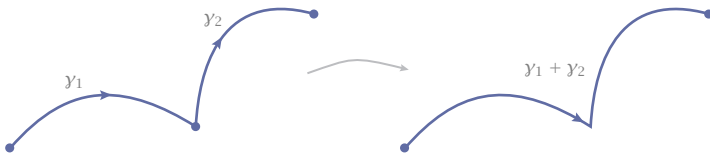
Definition Das *Wegintegral* einer stetigen 1-Form α entlang eines Weges ω ist definiert als

$$\int_{\omega} \alpha := \int_{\gamma} \alpha,$$

wobei γ eine beliebige D^1 -Parametrisierung von ω bezeichnet. \times

Bemerkung Man kann das Wegintegral auch für geeignete *stetige* Kurven definieren und stetige Parametertransformationen betrachten. Uns geht es hier jedoch nicht um möglichst geringe Regularitätsvoraussetzungen. Daher gehen wir darauf nicht ein. \rightarrow

Abb 4 Addition von Kurven



■ Wegadditivität

Das Wegintegral $\int_{\omega} \alpha$ ist nicht nur linear bezüglich der Differentialform α , sondern auch additiv bezüglich des Integrationsweges ω . Dazu definieren wir die Addition geeigneter Wege wie folgt. Seien ω_1 und ω_2 zwei Wege in V , wo der Endpunkt von ω_1 mit dem Anfangspunkt von ω_2 zusammenfällt, und

$$\gamma_1 : [a, b] \rightarrow V, \quad \gamma_2 : [c, d] \rightarrow V$$

zwei stetige Parametrisierungen dieser Wege. Dann ist $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, und wir können das zweite Parameterintervall noch so verschieben, dass $b = c$. Dann definiert

$$\gamma_1 + \gamma_2 : [a, d] \rightarrow V, \quad (\gamma_1 + \gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(t), & a \leq t \leq b, \\ \gamma_2(t), & c \leq t \leq d, \end{cases}$$

eine stetige Kurve in V . Die zugehörige Äquivalenzklasse definieren wir als

$$\omega_1 + \omega_2 := [\gamma_1 + \gamma_2].$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierungen α_{-1} . Sind zudem ω_1 und ω_2 von der Klasse D^1 , so ist es auch $\omega_1 + \omega_2$.

Ist ferner $\omega = [\gamma]$, und bezeichnet γ_- die in umgekehrter Richtung durchlaufene Kurve γ , so ist durch $-\omega := [\gamma_-]$ der umgekehrt durchlaufene Weg definiert.

Rechenregeln Seien $\alpha : V \rightarrow V^*$ eine stetige 1-Form und $\omega, \omega_1, \omega_2$ stückweise stetig differenzierbare Wege im Definitionsbereich von α . Dann gilt

$$\int_{-\omega} \alpha = - \int_{\omega} \alpha, \quad \int_{\omega_1 + \omega_2} \alpha = \int_{\omega_1} \alpha + \int_{\omega_2} \alpha,$$

falls die Summe von ω_1 und ω_2 erklärt ist. Weiter gilt

$$\left| \int_{\omega} \alpha \right| \leq L(\omega) \max_{p \in \omega} \|\alpha(p)\|_*,$$

wenn die Länge bezüglich einer Norm $\|\cdot\|$ auf V bestimmt wird und $\|\cdot\|_*$ die zugehörige induzierte Norm auf V^* bezeichnet. \times

««« Wir beweisen nur die letzte Behauptung, der Rest ist Routine. Mit einer beliebigen Parametrisierung $\gamma: [a, b] \rightarrow V$ von ω gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\omega} \alpha \right| &= \left| \int_a^b \alpha(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |\alpha(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)| dt \\ &\leq \int_a^b \|\alpha(\gamma(t))\|_* \|\dot{\gamma}(t)\| dt \\ &\leq \max_{p \in \omega} \|\alpha(p)\|_* \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt. \end{aligned}$$

Das letzte Integral ist gerade die Länge $L(\omega)$ von ω . »»»

19.3

Wegintegrale exakter 1-Formen

Die explizite Bestimmung eines klassischen Integrals ist aufgrund des Hauptsatzes _{10.16} gleichbedeutend mit dem Auffinden einer Stammfunktion. Entsprechendes gilt auch für Wegintegrale, wenn die betreffende 1-Form *exakt* ist.

Definition Eine 1-Form α heißt *exakt*, wenn es eine C^1 -Funktion f gibt, so dass

$$\alpha = df$$

auf dem gemeinsamen offenen Definitionsbereich. Jede solche Funktion f heißt eine *Stammfunktion* von α . ✕

► **1-Formen auf einem Intervall** Ist $\alpha = a(x) dx$ stetig auf dem Intervall I und $x_0 \in I$, so definiert aufgrund des Stammfunktionensatzes _{10.14} ¹

$$f(x) := \int_{x_0}^x a(t) dt, \quad x \in I,$$

eine stetig differenzierbare Funktion f auf I mit der Eigenschaft, dass

$$df(x) = f'(x) dx = a(x) dx.$$

Somit ist *jede* auf einem Intervall stetige 1-Form exakt. ◀

¹ Im Folgenden verwenden wir dt für das klassische Integral und dx für 1-Formen.

► **Zentralfeld auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$** Eine 1-Form der Gestalt

$$\alpha = \varphi(\|x\|) \sum_{k=1}^n x_k dx_k$$

mit einer stetigen Funktion $\varphi: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ist exakt. Eine Stammfunktion f auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist zum Beispiel gegeben durch

$$f(x) = F(\|x\|) = \int_1^{\|x\|} t\varphi(t) dt.$$

Denn für die euklidische Norm gilt

$$d(\|x\|) = \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{\|x\|} dx_k, \quad x \neq 0,$$

und somit ist

$$df(x) = F'(\|x\|)d(\|x\|) = \varphi(\|x\|) \sum_{k=1}^n x_k dx_k. \quad \blacktriangleleft$$

Die Wegintegrale exakter 1-Formen sind nun leicht zu berechnen. Es gilt folgende Verallgemeinerung des Hauptsatzes 10.16.

7 Hauptsatz für Wegintegrale Ist die 1-Form α exakt mit Stammfunktion f , so gilt

$$\int_{\omega} \alpha = \int_{\omega} df = f \Big|_{\omega_a}^{\omega_b}$$

für jeden stückweise stetig differenzierbaren Weg ω im Definitionsbereich von α mit Anfangspunkt ω_a und Endpunkt ω_b . Das Wegintegral einer exakten 1-Form hängt also nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab, nicht aber von dessen Verlauf. ✕

⟨⟨⟨⟨ Sei ω zunächst C^1 und $\gamma: [a, b] \rightarrow V$ eine C^1 -Parametrisierung von ω . Dann ist $f \circ \gamma$ ebenfalls stetig differenzierbar, und es gilt

$$df(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) = Df(\gamma(t))\gamma'(t) = (f \circ \gamma)'(t).$$

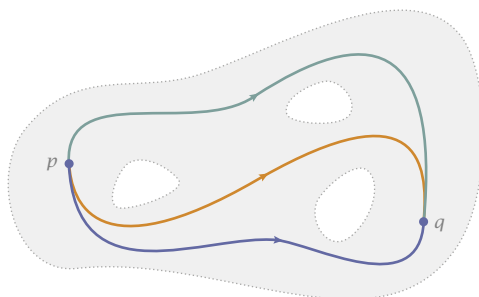
Also ist

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \alpha &= \int_{\gamma} df = \int_a^b df(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) dt \\ &= \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) dt = f \circ \gamma \Big|_a^b = f \Big|_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} = f \Big|_{\omega_a}^{\omega_b}. \end{aligned}$$

Mit einer geeigneten Zerlegung in endlich viele Teilintervalle folgt die Behauptung dann auch für stückweise stetig differenzierbare Wege, weil sich die Randwerte an den inneren Zerlegungspunkten aufheben. ⟩⟩⟩⟩

Abb 5

Verschiedene Wege
von p nach q



Die Wegunabhängigkeit ist somit eine *notwendige* Bedingung für die Exaktheit einer 1-Form. Die 1-Form in Beispiel 4 und die Windungsform v in Beispiel 5 können deshalb nicht exakt sein.

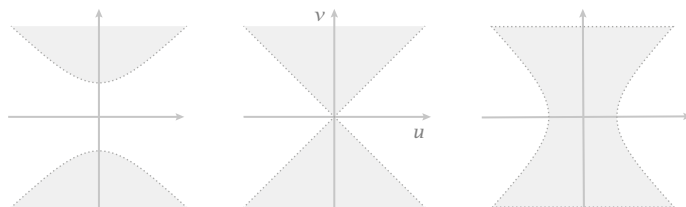
Wir werden gleich sehen, dass umgekehrt die Bedingung der Wegunabhängigkeit auch *hinreichend* ist, wenn der Definitionsbereich nicht in mehrere Komponenten zerfällt.

Definition Eine Teilmenge M von V heißt *wegzusammenhängend*, wenn es zu je zwei Punkten in M eine ganz in M verlaufende stückweise differenzierbare Kurve gibt, die diese Punkte verbindet. ✕

- ▶ A. Jedes reelle Intervall ist wegzusammenhängend.
- B. Jede konvexe Menge ist wegzusammenhängend.
- C. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist wegzusammenhängend für $n \geq 2$, nicht aber für $n = 1$.
- D. Nur die Menge rechts in Abbildung 6 ist wegzusammenhängend. ◀

Offene und wegzusammenhängende Mengen spielen eine wichtige Rolle in der Analysis und haben deshalb eine eigene Bezeichnung.

Definition Ein *Gebiet* ist eine nichtleere, offene und wegzusammenhängende Menge. ✕

Abb 6 Die Menge Ω_ε für $\varepsilon < 0$, $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon > 0$ 

- ▶ A. Jede nichtleere offene konvexe Menge ist ein Gebiet.
- B. Die Menge $\Omega_\varepsilon = \{(u, v) : v^2 > u^2 - \varepsilon\}$ ist nur für $\varepsilon > 0$ ein Gebiet.
- C. Die Vereinigung zweier Gebiete ist wieder ein Gebiet genau dann, wenn ihr Durchschnitt nicht leer ist. ◀

Das nächste Lemma zeigt, dass hinsichtlich Stammfunktionen die Gebiete in höheren Dimensionen dieselbe Rolle spielen wie die Intervalle in einer Dimension.

- 8 **Lemma** *Auf einem Gebiet Ω ist eine differenzierbare Abbildung $f: \Omega \rightarrow W$ konstant genau dann, wenn Df verschwindet.* ✕

◀◀◀ ⇒ Das ist trivial, unabhängig davon, ob Ω ein Gebiet ist oder nicht.

⇐ Fixiere einen Punkt $x_0 \in \Omega$ und betrachte einen weiteren Punkt $x \in \Omega$. Es existiert eine stückweise differenzierbare Kurve $\gamma: [a, b] \rightarrow \Omega$ mit

$$\gamma(a) = x_0, \quad \gamma(b) = x.$$

Dann ist auch $g = f \circ \gamma: [a, b] \rightarrow W$ stückweise differenzierbar. Da Df nach Voraussetzung überall verschwindet, gilt also auch stückweise

$$g'(t) = Df(\gamma(t))\gamma'(t) = 0.$$

Somit ist g sogar C^1 und wegen $g' = 0$ auch konstant. Also ist $g(a) = g(b)$, was gleichbedeutend ist mit $f(x) = f(x_0)$. Da $x \in \Omega$ beliebig war, ist f konstant auf ganz Ω . ▶▶▶

Auf einem *Gebiet* ist eine differenzierbare Abbildung somit konstant genau dann, wenn ihre Ableitung überall verschwindet. Für eine skalare Funktion ist dies gleichbedeutend damit, dass ihr Differenzial verschwindet. Somit gilt folgendes

- Korollar** *Auf einem Gebiet unterscheiden sich die Stammfunktionen einer exakten 1-Form nur durch eine additive Konstante.* ✕

Wir zeigen nun, dass auf einem Gebiet die Wegunabhängigkeit von 1-Form-Integralen auch *hinreichend* für die Exaktheit der 1-Form ist.

- 9 **Satz** *Sei α eine stetige 1-Form auf einem Gebiet Ω . Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*
- (i) α ist exakt auf Ω .
 - (ii) Das Wegintegral von α ist unabhängig vom Verlauf des Weges.
 - (iii) Das Wegintegral von α verschwindet für jeden geschlossenen Weg. ✕

⟨⟨⟨ (i) ⇒ (ii) Das ist der Hauptsatz 7.

(ii) ⇒ (iii) Ein geschlossener Weg hat denselben Anfangs- und Endpunkt wie ein punktförmiger Weg. Das Wegintegral über einen Punktweg ist aber immer Null. Also gilt dies auch für beliebige geschlossene Wege.

(iii) ⇒ (ii) Seien ω_1 und ω_2 zwei D^1 -Wege in Ω mit gleichem Anfangs- und Endpunkt. Dann ist $\omega_1 - \omega_2$ ein geschlossener Weg, und es gilt

$$0 = \int_{\omega_1 - \omega_2} \alpha = \int_{\omega_1} \alpha - \int_{\omega_2} \alpha.$$

Das ist gleichbedeutend mit der Behauptung.

(ii) ⇒ (i) Dies ist der wesentliche Teil des Satzes. Da nach Voraussetzung jedes Wegintegral von α nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt, können wir eine Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \int_{x_0}^x \alpha$$

definieren, indem wir einen beliebigen Punkt $x_0 \in \Omega$ fixieren und das Integral über einen *beliebigen* Weg in Ω von x_0 nach x bilden. Zu zeigen ist, dass dies eine Stammfunktion von α definiert.

Betrachte $x \in \Omega$. Für alle hinreichend kleinen h liegt $[x, x+h]$ ganz in Ω , und aufgrund der Wegunabhängigkeit des Integrals ist

$$f(x+h) - f(x) = \int_{x_0}^{x+h} \alpha - \int_{x_0}^x \alpha = \int_{[x, x+h]} \alpha.$$

Parametrisieren wir $[x, x+h]$ durch $t \mapsto x + th$ mit $0 \leq t \leq 1$, so folgt

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 \alpha(x+th)h dt.$$

Subtrahieren wir $\alpha(x)h$, so erhalten wir

$$f(x+h) - f(x) - \alpha(x)h = \int_0^1 [\alpha(x+th) - \alpha(x)]h dt.$$

Aufgrund der Stetigkeit von α ist aber $[\alpha(x+th) - \alpha(x)]h = o(h)$, also

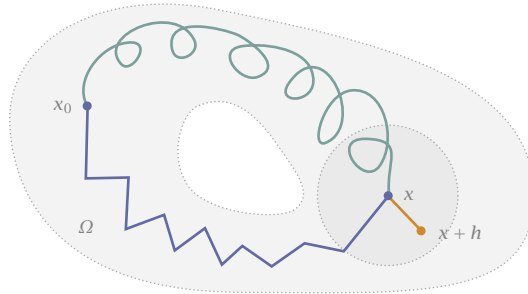
$$f(x+h) = f(x) + \alpha(x)h + o(h).$$

Somit ist f im Punkt x total differenzierbar, und es gilt

$$df(x)h = Df(x)h = \alpha(x)h.$$

Somit ist $df = \alpha$, was zu zeigen war. ⟩⟩⟩

Abb 7

Definition von $\int_{x_0}^x \alpha$ 

19.4 Lokal exakte 1-Formen

Der letzte Satz 9 charakterisiert exakte 1-Formen eindeutig über die Wegunabhängigkeit. Doch ist das Kriterium wenig praktikabel, da man nicht alle Wegintegrale überprüfen kann. Dagegen ist es leicht, eine *notwendige* Bedingung zu formulieren.

- 10 **Integrabilitätsbedingung** Ist eine 1-Form $\alpha = \sum_{k=1}^n a_k dx_k$ exakt und stetig differenzierbar, so erfüllen ihre Koeffizienten die **Integrabilitätsbedingung**

$$\partial_l a_k = \partial_k a_l, \quad 1 \leq k, l \leq n. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Nach Voraussetzung ist

$$\alpha = df = \sum_{k=1}^n \partial_k f dx_k$$

mit einer stetig differenzierbaren Funktion f . Ist α stetig differenzierbar, so sind alle partiellen Ableitungen von f nochmals stetig differenzierbar. Somit ist f sogar C^2 , und mit dem Lemma von Schwarz 14.18 gilt

$$\partial_l a_k = \partial_l (\partial_k f) = \partial_k (\partial_l f) = \partial_k a_l, \quad 1 \leq k, l \leq n. \quad \rangle\rangle\rangle$$

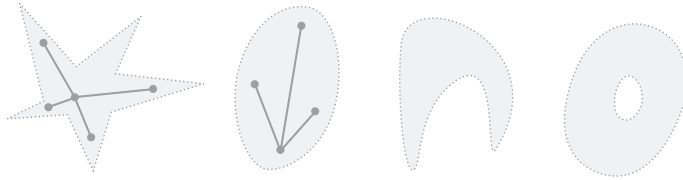
Definition Eine stetig differenzierbare 1-Form heißt **geschlossen**, wenn sie die Integrabilitätsbedingungen 10 erfüllt. \times

Korollar Jede stetig differenzierbare exakte 1-Form ist geschlossen. \times

- 11 \triangleright A. Auf dem \mathbb{R}^2 ist $u dx + v dy$ geschlossen, falls $\partial_y u = \partial_x v$.
 B. Somit ist $y^2 dx + dy$ nicht geschlossen, da $\partial_y (y^2) = 2y \neq 0 = \partial_x (1)$.
 C. Die Windungsform v_ξ ist geschlossen, denn

$$\partial_x \left(\frac{-x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = \partial_y \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Abb 8 Sternförmige und nicht sternförmige Mengen



D. Auf dem \mathbb{R}^3 ist $\alpha = u dx + v dy + w dz$ geschlossen, falls

$$\partial_y w = \partial_z v, \quad \partial_z u = \partial_x w, \quad \partial_x v = \partial_y u.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\nabla \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{pmatrix} = 0.$$

Man nennt dies auch die *Rotation* des Vektorfelds $(u, v, w)^T$. ◀

■ Das Lemma von Poincaré

Die Frage stellt sich, ob umgekehrt jede geschlossene 1-Form exakt ist. Die Antwort hierauf hat einen lokalen und einen globalen Aspekt. Lokal ist dies immer der Fall, wenn das Definitionsgebiet folgende geometrische Gestalt hat.

Definition Eine Teilmenge M des \mathbb{R}^n heißt *sternförmig*, wenn es einen Punkt $m \in M$ gibt, so dass $[m, x] \subset M$ für alle $x \in M$. Jeder solche Punkt m heißt ein *Zentrum* von M . ✕

Jede sternförmige Menge ist wegzusammenhängend, aber natürlich ist nicht jede wegzusammenhängende Menge sternförmig – siehe Abbildung 8.

- ▶ A. Jedes Intervall ist sternförmig bezüglich jedes seiner Punkte.
- B. Die geschlitzte Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus (0, \infty)$ ist sternförmig mit Zentrum 0.
- C. Die gepunktete Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist *nicht* sternförmig.
- D. Die Sphären \mathbb{S}^n , $n \geq 0$, sind *nicht* sternförmig.
- E. Eine Menge ist sternförmig bezüglich jedes ihrer Punkte genau dann, wenn sie konvex ist. ◀

12 **Lemma von Poincaré** Jede geschlossene 1-Form auf einem sternförmigen Gebiet ist exakt. ✕

Zunächst eine Vorüberlegung. Falls $\alpha = df$, also

$$\alpha(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x) dx_k = \sum_{k=1}^n \partial_k f(x) dx_k,$$

so gilt auch

$$\alpha(tx)x = \sum_{k=1}^n a_k(tx)x_k = \sum_{k=1}^n \partial_k f(tx)x_k = \partial_t f(tx).$$

Somit können wir f aus α rekonstruieren, indem wir $\alpha(tx)x$ über $[0, 1]$ integrieren. Diese Beobachtung ist die Grundlage des folgenden Beweises.

⟨⟨⟨ Beweis des Lemmas von Poincaré Sei α eine geschlossene 1-Form auf einer offenen sternförmigen Menge Ω . Durch Translation der Koordinaten können wir erreichen, dass Ω sternförmig bezüglich 0 ist. Dann ist

$$f(x) = \int_0^1 \alpha(tx)x dt = \int_0^1 \sum_{l=1}^n a_l(tx)x_l dt$$

für jedes $x \in \Omega$ wohldefiniert, denn der Integrationsweg $[0, x]$ ist in Ω enthalten und die Koeffizienten von α sind stetig differenzierbar auf Ω . Also definiert dies eine Funktion $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Da die Koeffizienten a_k in jeder Variablen x_k stetig differenzierbar sind, ist es auch f 14.19, und wir erhalten $\partial_k f$ durch Differenziation unter dem Integral. Es gilt also

$$\begin{aligned} \partial_k f(x) &= \int_0^1 \sum_{l=1}^n \partial_k (a_l(tx)x_l) dt \\ &= \int_0^1 \left(a_k(tx) + t \sum_{l=1}^n \partial_k a_l(tx)x_l \right) dt. \end{aligned}$$

Aufgrund der Integrabilitätsbedingung ist aber $\partial_k a_l = \partial_l a_k$, und weiter ist

$$a_k(tx) + t \sum_{l=1}^n \partial_l a_k(tx)x_l = \partial_t (ta_k(tx)).$$

Also erhalten wir insgesamt

$$\partial_k f(x) = \int_0^1 \partial_t (ta_k(tx)) dt = ta_k(tx) \Big|_0^1 = a_k(x).$$

Somit gilt

$$df = \sum_{k=1}^n \partial_k f dx_k = \sum_{k=1}^n a_k dx_k = \alpha.$$

Das war zu zeigen. ⟩⟩⟩

Auf sternförmigen Gebieten ist jede geschlossene 1-Form also exakt. Dies können sehr große Gebiete sein. Auf jeden Fall schließt es aber kleine Umgebungen eines jeden Punktes ein. Somit erhalten wir folgendes lokales Resultat.

Korollar *Jede geschlossene 1-Form ist lokal exakt.* ✕

Die Frage, wann aus der lokalen auch die globale Exaktheit folgt, betrachten wir im nächsten Abschnitt.

19.5 Global exakte 1-Formen

Eine geschlossene und damit lokal exakte 1-Form ist nicht notwendigerweise auch global exakt. Zum Beispiel ist die Windungsform ω_5 geschlossen ω_5 und daher *lokal* exakt. Sie ist aber *nicht global* exakt, da ihr Integral längs dem geschlossenen Einheitskreis nicht Null ist ω_5 .

Wir wissen bereits, dass notwendig und hinreichend für die Exaktheit einer Form die Unabhängigkeit ihrer Wegintegrale vom *Verlauf* der Wege ist ω_9 . Als Erstes stellen wir nun fest, dass dies für lokal exakte Formen jedenfalls immer dann gilt, wenn diese Wege ineinander deformiert werden können. Hierzu benötigen wir den Begriff der *Homotopie* von Kurven.

Definition *Zwei stetige Kurven $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow \Omega$ mit gemeinsamen Anfangspunkt p und Endpunkt q heißen *homotop in Ω* , wenn es eine stetige Abbildung*

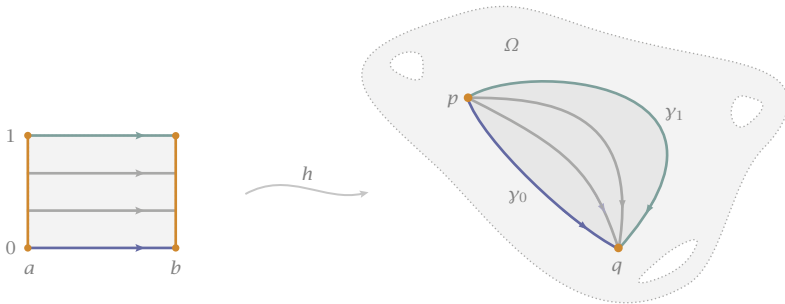
$$h: [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \Omega, \quad (s, t) \mapsto h(s, t) =: h_s(t),$$

gibt, so dass

$$h_0 = \gamma_0, \quad h_1 = \gamma_1$$

sowie $h_s(a) = p$ und $h_s(b) = q$ für alle $0 \leq s \leq 1$. ✕

Für jedes $s \in [0, 1]$ ist also h_s eine stetige Kurve von p nach q innerhalb von Ω , die für $s = 0$ mit γ_0 und für $s = 1$ mit γ_1 übereinstimmt. Da h auch stetig in s ist, erhalten wir eine stetige Deformation der Kurve γ_0 in die Kurve γ_1 , wobei die Endpunkte fixiert sind. Wichtig ist, dass diese Homotopie ganz in Ω verläuft. Die Kurven γ_s dürfen nicht über ›Löcher‹ in Ω hinweggezogen werden – siehe Abbildung 9.

Abb 9 Homotopie von γ_0 und γ_1 in Ω 

► Sind $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$ zwei Kurven in Ω mit gemeinsamen Anfangs- und Endpunkt, und gilt

$$[\gamma_0(t), \gamma_1(t)] \subset \Omega, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

so sind sie homotop mittels der Homotopie $h : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \Omega$ mit

$$h(s, t) = (1 - s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t). \quad \blacktriangleleft$$

Da wir entlang den Kurven in einer Homotopie integrieren wollen, benötigen wir noch etwas mehr als nur deren Stetigkeit.

Definition Zwei Kurven $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \rightarrow \Omega$ mit gleichem Anfangs- und Endpunkt sind *D^1 -homotop*, wenn es eine Homotopie $h : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \Omega$ dieser Kurven gibt, die auf jedem horizontalen oder vertikalen Schnitt des Rechtecks $[0, 1] \times [a, b]$ stückweise stetig differenzierbar ist. ✕

Ein *horizontaler Schnitt* ist hierbei eine Teilmenge

$$\{s\} \times [a, b] \subset [0, 1] \times [a, b].$$

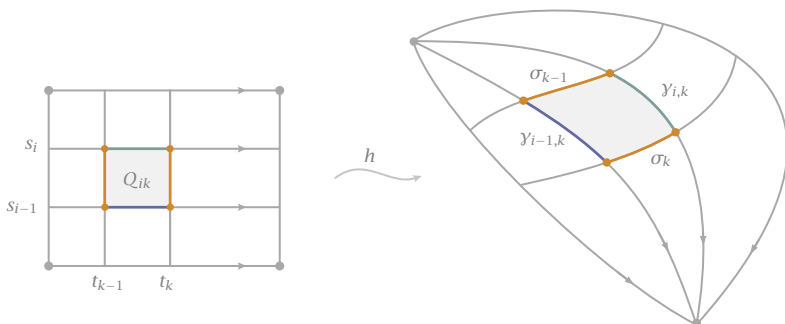
Entsprechend sind vertikale Schnitte erklärt.

Homotopiesatz Sei α eine lokal exakte 1-Form auf Ω . Dann gilt

$$\int_{\gamma_0} \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha,$$

wann immer die Kurven γ_0 und γ_1 D^1 -homotop in Ω sind. ✕

Abb 10 Zum Beweis des Homotopiesatzes



⋈⋈⋈ Sei $Q = [0, 1] \times [a, b]$ und $h: Q \rightarrow \Omega$ eine D^1 -Homotopie von γ_0 und γ_1 in Ω . Zuerst zeigen wir, dass sich Q so in endlich viele achsenparallele Rechtecke zerlegen lässt, dass α auf dem Bild jedes dieser Rechtecke exakt ist.

Angenommen, dies ist nicht möglich. Dann können wir eine fallende Folge abgeschlossener Rechtecke $Q \supset Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$ konstruieren, jedes ein Viertel so groß wie das vorangehende, so dass α auf dem Bild von Q_k keine Stammfunktion besitzt. Der Durchschnitt aller Q_k ist dann ein Punkt $r \in Q$. Nach dem Lemma von Poincaré₁₂ ist aber α in einer offenen Umgebung U von $h(r)$ exakt. Diese Umgebung enthält aber die Bilder der Q_k mit k hinreichend groß. Somit erhalten wir einen Widerspruch.

Es gibt somit Teilungen (s_1, \dots, s_m) von $[0, 1]$ und (t_1, \dots, t_n) von $[a, b]$ so, dass α in einer Umgebung des Bildes jedes Rechtecks

$$Q_{ik} = [s_{i-1}, s_i] \times [t_{k-1}, t_k], \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq k \leq n,$$

exakt ist. Wir zeigen nun, dass die Integrale entlang der Kurven $\gamma_i := h_{s_i}$ für sukzessive Teilungspunkte unverändert bleiben, also

$$\int_{\gamma_{i-1}} \alpha = \int_{\gamma_i} \alpha, \quad 1 \leq i \leq m,$$

gilt. Daraus folgt dann die Behauptung.

Betrachte dazu die Kurvenabschnitte

$$\gamma_{i,k} = h(s_i, \cdot) \Big|_{[t_{k-1}, t_k]}, \quad 1 \leq k \leq n,$$

sowie die Verbindungskurven

$$\sigma_k = h(\cdot, t_k) \Big|_{[s_{i-1}, s_i]}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Diese sind sämtlich stückweise stetig differenzierbar, und es gilt

$$\gamma_{i-1,k} + \sigma_k = \sigma_{k-1} + \gamma_{i,k}.$$

Gemeinsam bilden diese Kurven den Rand des Bildes des Rechtecks Q_{ik} unter h . Nach Konstruktion ist α exakt in einer Umgebung dieser Menge, und daher das Wegintegral entlang beider Kurven gleich. Es gilt also

$$\int_{y_{i-1,k}} \alpha + \int_{\sigma_k} \alpha = \int_{\sigma_{k-1}} \alpha + \int_{y_{i,k}} \alpha.$$

Da dies für jedes $1 \leq k \leq n$ gilt, ergibt Aufsummieren über k und Kürzen der Integrale über $\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}$ die Gleichung

$$\sum_{k=1}^n \int_{y_{i-1,k}} \alpha + \int_{\sigma_m} \alpha = \int_{\sigma_0} \alpha + \sum_{k=1}^n \int_{y_{i,k}} \alpha. \quad (2)$$

Die Integrale über σ_0 und σ_n sind aber Null, da es sich um Punktkurven handelt. Also folgt

$$\int_{y_{i-1}} \alpha = \sum_{k=1}^n \int_{y_{i-1,k}} \alpha = \sum_{k=1}^n \int_{y_{i,k}} \alpha = \int_{y_i} \alpha.$$

Da wir in endlich vielen Schritten von y_0 zu y_1 gelangen, ist damit alles bewiesen. \gggg

Der Homotopiesatz gilt für beliebige D^1 -homotope Kurven mit festem Anfangs- und Endpunkt. Für *geschlossene* Kurven kann man aber diese letzte Forderung fallen lassen. Dies führt zum Begriff der *freien Homotopie*.

Definition Zwei *geschlossene* Kurven $\gamma_0, \gamma_1: [a, b] \rightarrow \Omega$ heißen *frei homotop* in Ω , wenn es eine *stetige* Abbildung

$$h: [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \Omega, \quad (s, t) \mapsto h(s, t) = h_s(t),$$

gibt, so dass

$$h_0 = \gamma_0, \quad h_1 = \gamma_1,$$

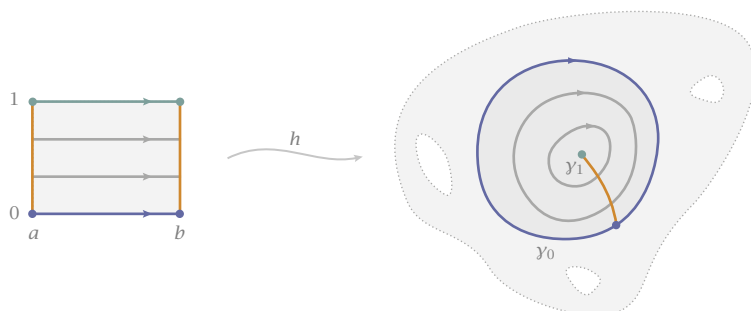
und jede Kurve h_s für $0 \leq s \leq 1$ geschlossen ist. \times

Alle Kurven h_s der Homotopie verlaufen also in Ω und sind geschlossen. *Frei D^1 -homotope Kurven* sind analog zu D^1 -homotopen Kurven definiert.

13 Freier Homotopiesatz Sei α eine lokal exakte 1-Form auf Ω . Sind γ_0 und γ_1 zwei geschlossene, in Ω frei D^1 -homotope Kurven, so gilt

$$\int_{\gamma_0} \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha. \quad \times$$

\llll Der Beweis ist identisch mit dem letzten Beweis, bis auf die Bemerkung über die σ -Integrale in (2). Diese sind nicht Null, sondern *gleich*. Die Folgerung hieraus gilt also ebenfalls. \gggg

Abb 11 Freie Homotopie von γ_0 zu einer Punktcurve γ_1 

Ein wichtiger Spezialfall dieses Satzes ergibt sich für *nullhomotope Kurven*. Dies sind geschlossene Kurven, die frei homotop zu einer Punktcurve sind. Da das Kurvenintegral einer beliebigen 1-Form über eine Punktcurve verschwindet, erhalten wir folgenden

- 14 **Satz** Ist α eine lokal exakte 1-Form auf Ω , so ist

$$\int_{\gamma} \alpha = 0$$

für jede in Ω D^1 -nullhomotope Kurve γ . \times

Wir kommen nun zurück zu der Frage, wann eine lokal exakte 1-Form auch global exakt ist. Wir wissen bereits, dass dies genau dann der Fall ist, wenn ihr Wegintegral entlang jedes geschlossenen Weges verschwindet. Aufgrund des letzten Satzes ist dies sicher immer dann der Fall, wenn jede geschlossene Kurve nullhomotop ist. Dies ist nun eine rein topologische Frage und betrifft ausschließlich die Geometrie des Gebietes.

Definition Eine wegzusammenhängende Teilmenge M in \mathbb{R}^n heißt *einfach zusammenhängend*, wenn jede geschlossene Kurve in M nullhomotop ist. \times

Abb 12 Einfach zusammenhängende Menge, und nicht



- ▶ A. Eine sternförmige Menge ist einfach zusammenhängend.
- B. Die Sphären \mathbb{S}^n sind einfach zusammenhängend für $n \geq 2$.
- C. Der punktierte Raum $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist einfach zusammenhängend.
- D. Die punktierte Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist *nicht* einfach zusammenhängend.
- E. Ebensovienig ist die Kreislinie \mathbb{S}^1 einfach zusammenhängend.
- F. Der Raum \mathbb{R}^3 ohne eine der Koordinatenachsen ist ebenfalls nicht einfach zusammenhängend. ◀

15 **Satz** Auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet Ω ist jede lokal exakte 1-Form auch global exakt. Insbesondere gilt

$$\int_{\gamma} \alpha = 0$$

für jede geschlossene D^1 -Kurve in Ω . ✕

◀◀◀ Das Wegintegral einer lokal exakten 1-Form entlang eines beliebigen geschlossenen Weges ist invariant unter freien Homotopien. In einem einfach zusammenhängenden Gebiet ist jede solche Kurve nullhomotop, und damit jedes solche Wegintegral Null. Also ist die lokal exakte 1-Form auch global exakt. ▶▶▶

Bemerkung Der letzte Satz bietet auch eine Möglichkeit zu zeigen, dass ein Gebiet *nicht* einfach zusammenhängend ist. Dies ist der Fall, wenn das Wegintegral einer geschlossenen 1-Form entlang eines einzigen geschlossenen Weges *nicht* Null ist. Eine geeignete 1-Form hierfür ist meist die Windungsform ω . →

Als letzten Satz erwähnen wir eine Anwendung aus der klassischen Mechanik. Tatsächlich standen solche Anwendungen am Anfang der Entwicklung des Kalküls der Wegintegrale.

Satz Auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet im \mathbb{R}^3 ist jedes stetig differenzierbare Vektorfeld V mit $\nabla \times V = 0$ ein Gradientenfeld, also

$$V = \nabla U$$

mit einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion U . ✕

◀◀◀ Die Bedingung $\nabla \times V = 0$ ist gleichbedeutend damit, dass die dem Vektorfeld V mittels des Standardskalarprodukts zugeordnete 1-Form α_V geschlossen ist ₁₁. Also ist α_V lokal exakt. Auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet ist sie dann auch global exakt ₁₅. Es gibt also eine stetig differenzierbare Funktion U mit $dU = \alpha_V$. Dies ist aber gleichbedeutend mit

$$\nabla U = V.$$

Da außerdem $V \in C^1$ ist, ist U selbst C^2 . ▶▶▶

Aufgaben

- 1 Man zeige, dass die Definition von $\omega_1 + \omega_2$ unabhängig von der Wahl der Repräsentanten der beiden einzelnen Wege ist.

◀

► *Lösung*

- 2 a. Bestimmen sie $\int_{\gamma} y^3 dx + x^3 dy$ für
 $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t^\alpha, t), \quad \alpha \geq 1.$
- b. Bestimmen sie $\int_{\gamma} x_3 dx_1 + x_1 dx_2 + x_2 dx_3$ für
 $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t).$

► *Lösung* a. Parametrisieren ergibt

$$\int_{\gamma} y^3 dx + x^3 dy = \int_0^1 (\alpha t^{\alpha+2} + t^{3\alpha}) dt = \frac{3\alpha^2 + 2\alpha + 3}{(\alpha + 3)(3\alpha + 1)}.$$

b. Man erhält zunächst

$$\int_0^1 (-2\pi t \sin 2\pi t + 2\pi \cos^2 2\pi t + \sin 2\pi t) dt.$$

Das Integral über $\sin 2\pi t$ ergibt Null, das über $2\pi \cos^2 2\pi t$ ergibt π . Also erhält man mit partieller Integration im ersten Term

$$\pi + t \cos 2\pi t \Big|_0^1 - \int_0^1 \cos 2\pi t dt = \pi + 1. \quad \blacktriangleleft$$

- 3 Beweisen oder widerlegen sie: Sind α und $\tilde{\alpha}$ geschlossene respektive exakte 1-Formen auf \mathbb{R}^n , so auch $\alpha + \tilde{\alpha}$ und $f\alpha$, wobei $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

► *Lösung* a. Für $\alpha + \tilde{\alpha}$ gilt dasselbe wegen der Linearität der beteiligten Operationen.

b. Dies ist im Allgemeinen nicht richtig. Betrachte zum Beispiel auf dem \mathbb{R}^2

$$\alpha = dx, \quad f\alpha = f dx.$$

α ist geschlossen und exakt, aber $f\alpha$ nicht, falls $f_y \neq 0$. Denn dann erfüllt $f\alpha$ nicht die Integrabilitätsbedingung und kann erst recht nicht exakt sein. ◀

- 4 Für eine stetige 1-Form $\alpha: V \rightarrow V^*$ und einen stückweise stetig differenzierbaren Weg ω im Definitionsbereich von α gilt

$$\left| \int_{\omega} \alpha \right| \leq L(\omega) \max_{p \in \omega} \|\alpha(p)\|_*,$$

wenn die Länge bezüglich einer Norm $\|\cdot\|$ auf V bestimmt wird und $\|\cdot\|_*$ die zugehörige induzierte Norm auf V^* bezeichnet.

► *Lösung* Mit einer beliebigen Parametrisierung $\gamma: [a, b] \rightarrow V$ von ω gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\omega} \alpha \right| &= \left| \int_a^b \alpha(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |\alpha(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t)| dt \\ &\leq \int_a^b \|\alpha(\gamma(t))\|_* \|\dot{\gamma}(t)\| dt \\ &\leq \max_{p \in \omega} \|\alpha(p)\|_* \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| dt. \end{aligned}$$

Das letzte Integral ist gerade die Länge $L(\omega)$ von ω . ◀

- 5 Bestimmen sie zu einer auf dem Rechteck $[0, 1] \times [0, 1]$ geschlossenen 1-Form $\alpha = f dx + g dy$ eine Stammfunktion.

► *Lösung* Da die Form geschlossen ist, kann man zur Erlangung einer Stammfunktion entlang eines beliebigen Weges in $[0, 1] \times [0, 1]$ integrieren, zum Beispiel von $(0, 0)$ über $(x, 0)$ nach (x, y) . Man erhält so die Stammfunktion

$$\Phi(x, y) = \int_0^x f(t, 0) dt + \int_0^y g(x, t) dt. \quad \blacktriangleleft$$

- 6 Sei $\alpha = \sum_{k=1}^n a_k dx_k$ geschlossen auf \mathbb{R}^n mit positiv homogenen Koeffizienten vom Grad $\lambda \neq -1$; es ist also

$$a_k(tx) = t^\lambda a_k(x), \quad t > 0.$$

Dann definiert

$$f(x) = \frac{1}{1 + \lambda} \sum_{k=1}^n x_k a_k(x)$$

auf \mathbb{R}^n eine Stammfunktion f von α .

► **Lösung** Aus der Homogenitätsgleichung und der Geschlossenheit von α folgt durch Differenzieren nach t

$$\lambda t^{\lambda-1} a_i(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_i(tx)}{\partial x_k} x_k = \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_k(tx)}{\partial x_i} x_k.$$

Auswerten bei $t = 1$ ergibt also

$$\lambda a_i(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_k(x)}{\partial x_i} x_k.$$

Damit erhalten wir für die partiellen f -Ableitungen

$$(1 + \lambda) \frac{\partial f}{\partial x_i} = a_i + \sum_{k=1}^n \frac{\partial a_k(x)}{\partial x_i} x_k = (1 + \lambda) a_i.$$

Im Fall $\lambda \neq -1$ ist also $f_{x_i} = a_i$ wie gefordert. ◀

- 7 a. Jede geschlossene stetige Kurve in einem Gebiet ist *in diesem Gebiet* homotop zu einem Polygon.
 b. Sei $n \geq 3$. Trifft ein Polygon im \mathbb{R}^n den Nullpunkt nicht, so gibt es auch eine Nullpunktsgerade, die das Polygon nicht trifft.
 c. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist für $n \geq 3$ einfach zusammenhängend, für $n = 2$ nicht.

► **Lösung** a. Eine geschlossene stetige Kurve ist eine kompakte Menge. Es existiert deshalb eine endlich Überdeckung durch offene Kugeln, welche sämtlich im vorgegebenen Gebiet enthalten sind. Innerhalb jeder einzelnen Kugel kann man nun problemlos die Kurve stetig in ein Geradensegment deformieren, siehe das Beispiel auf Seite 151.
 b. Jede Seite des Polygons definiert eine eindeutige Ebene durch den Nullpunkt. Diese endlich vielen Ebenen füllen den Raum nicht aus, wenn $n \geq 3$. Somit gibt es eine Nullpunktsgerade, die diese Ebenen nur im Nullpunkt trifft und *nicht* das Polygon.
 c. Sei γ eine beliebige geschlossene Kurve im $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $n \geq 3$. Dann können wir γ zuerst in ein Polygon deformieren, ohne dabei den Nullpunkt zu treffen. Dann wählen wir eine Nullpunktsgerade, die dieses Polygon nicht trifft, und ziehen dieses linear auf einen Punkt dieser Geraden zusammen. In dieser Punkt nicht Null, so wird auch bei dieser Zusammenziehung der Nullpunkt nicht getroffen. Also ist γ nullthomotop.

Dagegen ist $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nicht einfach zusammenhängend, weil das Integral der geschlossenen Windungsform um den Nullpunkt herum nicht Null ist. ◀

- 8 Das homöomorphe Bild einer einfach zusammenhängenden Menge ist wieder einfach zusammenhängend ist.

► **Lösung** Sei $\phi: U \rightarrow V$ ein Homöomorphismus und U einfach zusammenhängend. Ist η eine geschlossene Kurve in V , so ist die zurückgeholte Kurve $\gamma = h^{-1} \circ \eta$ eine geschlossene Kurve in U . Dazu existiert eine Homotopie h von γ mit einer Punktcurve. Dann ist auch $\varphi \circ h$ eine Homotopie von $\varphi \circ \gamma = \eta$ mit einer Nullkurve. Somit ist V einfach zusammenhängend. ◀

- 9 Seien $U \subset \mathbb{R}^n$ und $V \subset \mathbb{R}^m$ offen und $\varphi: V \rightarrow U$ stetig differenzierbar. Einer 1-Form α auf U wird dann eine 1-Form $\varphi^* \alpha$ auf V zugeordnet durch

$$(\varphi^* \alpha)(\gamma)(h) = \alpha(\varphi(\gamma))(D\varphi(\gamma)h).$$

- a. Ist $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i dx_i$ so ist

$$\varphi^* \alpha = \sum_{i=1}^n (a_i \circ \varphi) d\varphi_i.$$

Drücken sie dies auch in der Basis dy_1, \dots, dy_m aus.

- b. Es gilt $\varphi^* df = d(f \circ \varphi)$.

- c. Ist γ eine C^1 -Kurve in V , so gilt

$$\int_{\varphi \circ \gamma} \alpha = \int_{\gamma} \varphi^* \alpha.$$

► **Lösung** a. Es ist $(\varphi^* dx_i)(h) = (dx_i)(D\varphi \cdot h) = D\varphi_i \cdot h = d\varphi_i(h)$. Also ist

$$\varphi^* dx_i = d\varphi_i = \sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} dy_k$$

und allgemein aufgrund der Linearität der Operationen

$$\varphi^* \alpha = \sum_{i=1}^n (a_i \circ \varphi) \sum_{k=1}^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} dy_k = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{i=1}^n (a_i \circ \varphi) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} \right) dy_k.$$

- b. Mit der vorangehenden Formel ist

$$\begin{aligned} \varphi^* df &= \varphi^* \left(\sum_{i=1}^n f_{x_i} dx_i \right) = \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^n (f_{x_i} \circ \varphi) \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k} dy_k \\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial y_k} dy_k = d(f \circ \varphi). \end{aligned}$$

- c. Es ist

$$\begin{aligned} \int_{\varphi \circ \gamma} \alpha &= \int_a^b (\alpha \circ \varphi \circ \gamma)(D\varphi(\gamma) \cdot \dot{\gamma}) dt \\ &= \int_a^b ((\alpha \circ \varphi) \circ \gamma)(D\varphi(\gamma) \cdot \dot{\gamma}) dt \\ &= \int_a^b (\varphi^* \alpha \circ \gamma)(\dot{\gamma}) dt \\ &= \int_{\gamma} \varphi^* \alpha. \end{aligned}$$

- 10 Sei Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet in \mathbb{R}^2 und $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch. Dann besitzt die 1-Form $u_x dy - u_y dx$ eine Stammfunktion v auf Ω , die ebenfalls harmonisch ist und für die

$$v_x = -u_y, \quad v_y = u_x$$

gilt.

► *Lösung* Die 1-Form $\alpha = u_x dy - u_y dx$ ist geschlossen, denn

$$d\alpha = u_{xx} dx \wedge dy - u_{yy} dy \wedge dx = (u_{xx} + u_{yy}) dx \wedge dy = 0,$$

da u harmonisch ist. Auf dem einfach zusammenhängenden Gebiet Ω ist sie damit auch exakt, es gibt also eine C^2 -Funktion v mit

$$\alpha = dv = v_x dx + v_y dy.$$

Somit ist

$$v_x = -u_y, \quad v_y = u_x.$$

Wir wie im dritten Band sehen werden, sind dies die Cauchy-riemann-Gleichungen für eine komplex differenzierbare Funktion $f = u + iv$. ◀

20

Das Lebesgueintegral

Wir erklären nun das *Lebesgueintegral* für Funktionen

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

Dabei gehen wir wie beim Cauchyintegral vor, indem wir das Integral zuerst für Treppenfunktionen definieren. Dabei genügt es, Maße für Intervalle zu betrachten. Eine allgemeine Maßtheorie wird nicht benötigt.

Dieses Integral wird auf solche nichtnegativen Funktionen ausgedehnt, die sich *punktweise* von unten durch Treppenfunktionen approximieren lassen. Dabei spielt gleichmäßige Konvergenz keine Rolle. Lassen wir auch den Wert ∞ zu, so ist das Integral für *jede* solche Funktion erklärt. Erst im dritten Schritt wird das Integral für allgemeine Funktionen als Differenz der Integrale ihres Positiv- und Negativteils erklärt. Diese Teilintegrale müssen allerdings endlich sein, damit deren Differenz wohldefiniert und endlich ist.

Das Lebesgueintegral ist von vornherein auf dem ganzen \mathbb{R}^n erklärt. Das Integral über messbare Teilmengen erhält man hieraus durch Multiplikation mit deren charakteristischen Funktionen. Es gibt daher kein uneigentliches Lebesgueintegral, vielmehr ist das ›eigentliche Integral‹ ein Spezialfall des allgemeinen Lebesgueintegrals.

Die besondere Bedeutung des Lebesgueintegrals für die Analysis liegt darin, dass es mit Grenzübergängen unter sehr allgemeinen Bedingungen vertauscht.

20.1

Intervallfunktionen

Ein *Intervall* im \mathbb{R}^n oder kurz *n-Intervall* ist das kartesische Produkt

$$I = I^1 \times \dots \times I^n$$

aus n reellen Intervallen I^1, \dots, I^n .¹ Diese können offen, einseitig offen, abgeschlossen, beschränkt, unbeschränkt, zu einem Punkt entartet oder leer sein. Sind sie *alle* offen respektive abgeschlossen respektive beschränkt respektive kompakt, so ist es auch ihr Produkt. Ist dagegen *ein* reelles Intervall I^j entartet respektive leer, so ist auch das Produkt I entartet respektive leer.

Die Vereinigung zweier n -Intervalle ist im Allgemeinen kein n -Intervall. Für Durchschnitte gilt jedoch folgendes Lemma, dessen Beweis als Übung überlassen wird.

- 1 **Lemma** Ist $(I_k)_{k \geq 1}$ eine Folge beliebiger n -Intervalle, so ist auch deren Durchschnitt ein n -Intervall. \times

■ Intervallfunktionen

Sei \mathcal{J}^n die Familie aller *beschränkten* n -Intervalle. Unbeschränkte Intervalle bleiben also außen vor.

Definition Eine *Intervallfunktion* ist eine Funktion $\mu: \mathcal{J}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Diese heißt

- (i) *additiv*, wenn für alle $I_1, I_2 \in \mathcal{J}^n$

$$I_1 \cap I_2 = \emptyset \wedge I_1 \cup I_2 \in \mathcal{J}^n \quad \Rightarrow \quad \mu(I_1 \cup I_2) = \mu(I_1) + \mu(I_2),$$

- (ii) *monoton*, wenn für alle $I_1, I_2 \in \mathcal{J}^n$

$$I_1 \subset I_2 \quad \Rightarrow \quad \mu(I_1) \leq \mu(I_2),$$

- (iii) *regulär*, wenn zu jedem Intervall $I \in \mathcal{J}^n$ und $\varepsilon > 0$ ein offenes Intervall $I_* \supset I$ existiert, so dass

$$|\mu(I_*) - \mu(I)| < \varepsilon. \quad \times$$

¹ Im Folgenden bezeichnet ein Hochindex 1-Intervalle, ein Tiefindex n -Intervalle.

Abb 1

Entartete und
nichtentartete
2-Intervalle

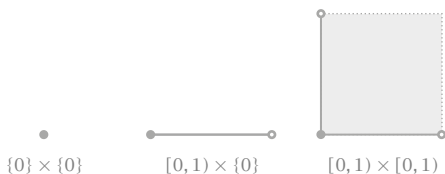


Abb 2

Intervall als Vereinigung
von Intervallen



Man beachte, dass für die Additivität nur solche Intervalle betrachtet werden, deren Vereinigung wieder ein Intervall ist. — Nun einige einfache Bemerkungen.

- 2 **Lemma** Ist eine Intervallfunktion μ additiv, so ist $\mu(\emptyset) = 0$. \times

⟨⟨⟨ Da $\emptyset \in \mathcal{J}^n$ und $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset$, gilt auch $\mu(\emptyset) = \mu(\emptyset \cup \emptyset) = \mu(\emptyset) + \mu(\emptyset)$. Daraus folgt die Behauptung. ⟩⟩⟩

- 3 **Lemma** Eine Intervallfunktion μ ist additiv genau dann, wenn für je endlich viele disjunkte Intervalle $I_1, \dots, I_m \subset \mathcal{J}^n$ gilt:

$$I = \bigcup_{1 \leq k \leq m} I_k \in \mathcal{J}^n \Rightarrow \mu(I) = \sum_{1 \leq k \leq m} \mu(I_k). \quad \times$$

Man beachte, dass $I = I_1 \cup \dots \cup I_m$ wieder ein Intervall sein muss.

⟨⟨⟨ Der Beweis ist elementar, aber etwas umständlich, da man nicht direkt per Induktion vorgehen kann. Vielmehr zerlegt man zuerst die Intervalle I_k so in kleinere Intervalle, dass sich $\mu(I_k)$ durch Induktion als Summe ihrer Maße darstellen lässt. Danach erhält man ebenso das Gesamtmaß $\mu(I)$ durch Induktion – siehe Abbildung 2. Die Details übergehen wir. ⟩⟩⟩

- 4 **Lemma** Eine additive Intervallfunktion μ ist monoton genau dann, wenn sie nichtnegativ ist. \times

⟨⟨⟨ Ist μ monoton, so gilt für jedes Intervall $I \in \mathcal{J}^n$ wegen $\emptyset \subset I$ auch $\mu(\emptyset) \leq \mu(I)$. Wegen $\mu(\emptyset) = 0$ ist also μ nichtnegativ.

Sei umgekehrt μ nichtnegativ. Sind $J \subset I$ zwei Intervalle in \mathcal{J}^n , so ist die Differenz $I \setminus J$ darstellbar als Vereinigung disjunkter Intervalle J_1, \dots, J_m A-9. Mit $I = J \cup J_1 \cup \dots \cup J_m$, der Additivität 3 und Nichtnegativität von μ folgt

$$\mu(I) = \mu(J) + \mu(J_1) + \dots + \mu(J_m) \geq \mu(J).$$

Also ist μ auch monoton. ⟩⟩⟩

Lemma Eine monotone Intervallfunktion μ ist regulär genau dann, wenn es zu jedem Intervall $I \in \mathcal{J}^n$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein offenes Intervall $I_* \supset I$ gibt, so dass $\mu(I_*) \leq \mu(I) + \varepsilon$. \times

Abb 3

Darstellung von $I \setminus J$ 

««« Ist μ monoton, so gilt für $I_* \supset I$ immer $\mu(I_*) \geq \mu(I)$. Es muss also nur noch $\mu(I_*) \leq \mu(I) + \varepsilon$ gefordert werden, um $|\mu(I_*) - \mu(I)| < \varepsilon$ zu erhalten. »»»

■ Maße

Wir spezifizieren nun diejenigen Intervallfunktionen, die sich für die Definition eines Integrals eignen.

Definition Ein *Maß* ist eine additive, monotone, reguläre Intervallfunktion. ✕

Insbesondere ist also ein Maß μ immer nichtnegativ mit $\mu(\emptyset) = 0$. In der Maßtheorie ist der Begriff des Maßes wesentlich allgemeiner. Die hier gewählte Definition reicht aber für unsere Bedürfnisse.

► *Beispiele für Maße* A. Bezeichnet $|\cdot|$ die euklidische Länge eines eindimensionalen Intervalls, so wird für $I = I^1 \times \dots \times I^n \in \mathcal{J}^n$ durch

$$\lambda_n(I) = \lambda_n(I^1 \times \dots \times I^n) := \prod_{1 \leq \nu \leq n} |I^\nu|$$

das *Volumenmaß* λ_n auf \mathbb{R}^n erklärt. Für $n = 1$ sprechen wir auch vom *Längenmaß*, für $n = 2$ vom *Flächenmaß*.

B. Sei $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ eine *diskrete Menge*, also eine Menge ohne Häufungspunkte. Eine beliebige Funktion

$$m : \Lambda \rightarrow (0, \infty)$$

ordnet jedem Punkt $p \in \Lambda$ eine *Masse* $m(p)$ zu. Mit der Definition

$$m(I) := \sum_{p \in I \cap \Lambda} m(p), \quad I \in \mathcal{J}^n,$$

dehnen wir m zu einem Maß aus, genannt *diskrete Masseverteilung* auf Λ . Man beachte, dass $I \cap \Lambda$ immer endlich ist, auch wenn Λ unendlich ist.

C. Die *konstante Verteilung* $\nu : \Lambda \rightarrow \{1\}$ ist ein Spezialfall einer diskreten Masseverteilung. In diesem Fall ist

$$\nu(I) = \text{card}(I \cap \Lambda),$$

also die Anzahl der Punkte in Λ , die in I liegen. Daher spricht man auch von einem **Zählmaß**. Zählmaße auf \mathbb{N} oder \mathbb{Z} erlauben es, Reihen als Integrale zu betrachten. Alle Sätze über das Lebesgueintegral gelten damit entsprechend auch für Reihen.

D. Jede monoton steigende Funktion $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert auf \mathcal{J}^1 durch

$$\begin{aligned}\mu_\varphi([a, b]) &:= \varphi_+(b) - \varphi_-(a), & \mu_\varphi((a, b]) &:= \varphi_+(b) - \varphi_+(a), \\ \mu_\varphi([a, b)) &:= \varphi_-(b) - \varphi_-(a), & \mu_\varphi((a, b)) &:= \varphi_-(b) - \varphi_+(a),\end{aligned}$$

das sogenannte **Lebesgue-Stieltjes-Maß** μ_φ zur **Verteilungsfunktion** φ_{A-10} . Ist zum Beispiel s eine Sprungstelle von φ , so ist

$$\mu_\varphi(\{s\}) = \varphi_+(s) - \varphi_-(s) > 0$$

die Sprunghöhe von φ in diesem Punkt.

E. Ein Maß μ_r auf \mathbb{R}^r und ein Maß μ_s auf \mathbb{R}^s definieren ein **Produktmaß** $\mu_{r,s} = \mu_r \times \mu_s$ auf \mathbb{R}^{r+s} . Denn jedes $I \in \mathcal{J}^{r+s}$ hat eine eindeutige Darstellung

$$I = I_r \times I_s, \quad I_r \in \mathcal{J}^r, \quad I_s \in \mathcal{J}^s,$$

und

$$\mu_{r,s}(I) = \mu_{r,s}(I_r \times I_s) := \mu_r(I_r) \mu_s(I_s)$$

ergibt ein wohldefiniertes Maß auf \mathcal{J}^{r+s} . Für das Volumenmaß gilt beispielsweise

$$\lambda_2 = \lambda_1 \times \lambda_1, \quad \lambda_3 = \lambda_2 \times \lambda_1 = \lambda_1 \times \lambda_1 \times \lambda_1.$$

F. Ist $A \in \mathcal{J}^n$ mit $\lambda(A) > 0$ fest gewählt, so definiert

$$\lambda_A(I) := \frac{\lambda(I \cap A)}{\lambda(A)}$$

das **relative Volumenmaß** λ_A . Für jedes Intervall $I \supset A$ gilt dann $\lambda_A(I) = 1$. ◀

Im Folgenden bezeichnet λ_n oder kürzer λ immer das Volumenmaß, auch wenn wir dies nicht jedes Mal erwähnen.

■ Nullmengen

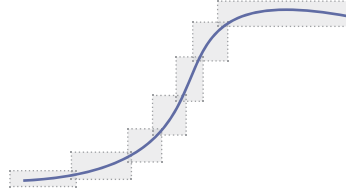
Ein Charakteristikum des zu definierenden Integrals ist, dass alles ignoriert werden kann, was auf **Nullmengen** stattfindet. Diese Mengen spielen deshalb eine wichtige Rolle.

Definition Sei μ ein Maß auf \mathcal{J}^n . Eine Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt **μ -Nullmenge**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge von n -Intervallen $(I_k)_{k \geq 1}$ gibt, so dass

$$N \subset \bigcup_{k \geq 1} I_k, \quad \sum_{k \geq 1} \mu(I_k) < \varepsilon. \quad \times$$

Abb 4

Überdeckung einer
 λ -Nullmenge



Bemerkungen a. Eine μ -Nullmenge N kann also durch abzählbar viele Intervalle mit beliebig kleinem Gesamtmaß überdeckt werden. Dabei ist N eine völlig beliebige Menge. Sie kann zum Beispiel auch unbeschränkt sein.

b. Wird N bereits durch *endlich* viele Intervalle derart überdeckt, so ist N ebenfalls eine μ -Nullmenge. Denn wir können diese durch leere Intervalle zu einer abzählbar unendlichen Folge $(I_k)_{k \geq 1}$ ergänzen, die wegen $\mu(\emptyset) = 0$ die gewünschten Eigenschaften hat.

c. Jede Teilmenge einer μ -Nullmenge ist ebenfalls eine μ -Nullmenge.

d. Es hängt immer vom Maß μ ab, ob eine Menge eine Nullmenge ist. \rightarrow

5 **Lemma** Die abzählbare Vereinigung von μ -Nullmengen ist wieder eine μ -Nullmenge. \times

⟨⟨⟨ Sei $(N_k)_{k \geq 1}$ eine Folge von Nullmengen, N deren Vereinigung und $\varepsilon > 0$. Dann existiert zu jedem $k \geq 1$ eine Folge von Intervallen $(I_{k,l})_{l \geq 1}$ mit

$$N_k \subset \bigcup_{l \geq 1} I_{k,l}, \quad \sum_{l \geq 1} \mu(I_{k,l}) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Die Vereinigung aller dieser Intervalle $I_{k,l}$ ist wieder abzählbar $_{3.19}$, und es gilt

$$N = \bigcup_{k \geq 1} N_k \subset \bigcup_{k,l \geq 1} I_{k,l}.$$

Außerdem gilt

$$\sum_{k,l \geq 1} \mu(I_{k,l}) = \sum_{k \geq 1} \left(\sum_{l \geq 1} \mu(I_{k,l}) \right) < \sum_{k \geq 1} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Da also zu jedem $\varepsilon > 0$ eine solche Überdeckung existiert, ist N ebenfalls eine μ -Nullmenge. $\rangle\rangle\rangle$

- ▶ A. Jedes Intervall $I \in \mathcal{J}^n$ mit $\mu(I) = 0$ ist eine μ -Nullmenge.
- B. Jede abzählbare Menge ist eine λ_n -Nullmenge für jedes $n \geq 1$.
- C. Insbesondere ist \mathbb{Q} eine λ_1 -Nullmenge in \mathbb{R} .
- D. Jede Hyperebene im \mathbb{R}^n ist eine λ_n -Nullmenge.
- E. Der Graph einer stetigen Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine λ_2 -Nullmenge.

F. Ist m eine beliebige Masseverteilung auf der diskreten Menge $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, so ist *jede Menge* $N \subset \mathbb{R}^n$, die keinen Punkt von Λ enthält, eine m -Nullmenge.

G. Ist die monoton steigende Funktion $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konstant auf einem Intervall I , so ist der offene Kern von I eine μ_φ -Nullmenge. \blacktriangleleft

Im Beweis des Satzes von Tonelli _{21.1} benötigen wir noch folgende äquivalente Charakterisierung einer μ -Nullmenge.

- 6 **Lemma** *Eine Menge N ist eine μ -Nullmenge genau dann, wenn es eine Überdeckung (I_k) durch Intervalle gibt, so dass deren μ -Gesamtmaß endlich ist und jeder Punkt von N von unendlich vielen Intervallen überdeckt wird. \times*

$\lll \Rightarrow$ Zu jedem $k \geq 1$ existiert eine Überdeckung $(I_{k,l})_{l \geq 1}$ von N mit Gesamtmaß kleiner als $1/2^k$. Die *gesamte* Familie $(I_{k,l})_{k,l \geq 1}$ ist dann eine Überdeckung von N mit endlichem Gesamtmaß, wobei jeder Punkt von Intervallen beliebig kleinen Maßes überdeckt wird. Also wird jeder Punkt unendlich oft überdeckt.

\Leftarrow Sei (I_k) eine solche Überdeckung. Zu $\varepsilon > 0$ existiert dann ein K mit

$$\sum_{k \geq K} \mu(I_k) < \varepsilon,$$

und $(I_k)_{k \geq K}$ ist immer noch eine Überdeckung von N . Also ist N eine μ -Nullmenge. \ggg

■ μ -fast überall

Nun vereinbaren wir noch einige Redeweisen.

Eine Funktion f heißt μ -definiert auf \mathbb{R}^n , wenn es eine μ -Nullmenge N gibt, so dass f auf N^c definiert ist. Ist (f_k) eine Folge μ -definierter Funktionen, so gibt es auch *eine* gemeinsame μ -Nullmenge N , so dass *alle* f_k auf N^c definiert sind ₅. Man sagt dann auch, die Folge $(f_k)_{k \geq 1}$ sei μ -definiert.

Allgemeiner sagt man, eine Eigenschaft gilt μ -fast überall auf \mathbb{R}^n , wenn es eine μ -Nullmenge N gibt, so dass diese Eigenschaft auf N^c gilt. So heißen zum Beispiel zwei Funktionen f und g μ -fast überall gleich, geschrieben $f =_\mu g$, wenn es eine μ -Nullmenge N gibt, so dass f und g auf N^c definiert sind und dort übereinstimmen. Entsprechend sind $f \leq_\mu g$ und $f \geq_\mu g$ erklärt.

Schließlich heißt eine Funktionenfolge (f_k) μ -fast überall konvergent oder kurz μ -konvergent gegen eine Funktion f , wenn es eine μ -Nullmenge N gibt, so dass alle f_k auf N^c definiert sind und dort punktweise gegen f konvergieren. Dafür schreiben wir auch $f_k \rightarrow_\mu f$. Entsprechend ist eine μ -monotone Funktionenfolge definiert.

Abb 5
Differenz zweier
Intervalle



■ Zulässige Mengen

Vereinigung und Differenz von Intervallen sind im Allgemeinen *keine* Intervalle. Daher betrachten wir nun die größere Familie der *zulässigen Mengen*, die ebenfalls sämtlich beschränkt sind.

Definition Jede Vereinigung von endlich vielen Intervallen in \mathbb{J}^n heißt eine *zulässige Menge* im \mathbb{R}^n . Ihre Familie wird mit \mathcal{Z}^n bezeichnet. ✕

- 7 **Satz** Die Familie \mathcal{Z}^n bildet einen *Mengenkörper*: Vereinigung, Durchschnitt und Differenz endlich vieler zulässiger Mengen sind wieder zulässige Mengen. ✕

⟨⟨⟨ Seien $M = I_1 \cup \dots \cup I_m$ und $N = J_1 \cup \dots \cup J_n$ zulässige Mengen. Es ist klar, dass deren Vereinigung wieder eine zulässige Menge ist. Ihr Durchschnitt ist

$$M \cap N = \bigcup_{k,l} (I_k \cap J_l).$$

Jeder Schnitt $I_k \cap J_l$ ist ein beschränktes n -Intervall ${}_1$, und die Vereinigung ist endlich. Also ist $M \cap N$ ebenfalls zulässig.

Ihre Differenz können wir darstellen als

$$M \setminus N = (I_1 \cup \dots \cup I_m) \setminus (J_1 \cup \dots \cup J_n) = \bigcup_{1 \leq k \leq m} \left\{ \bigcap_{1 \leq l \leq n} I_k \setminus J_l \right\}.$$

Jede Differenz $I_k \setminus J_l$ ist eine zulässige Menge, wie man elementar beweist. Durchschnitt und Vereinigung ergeben hieraus wieder zulässige Mengen, wie bereits gezeigt wurde. Also ist auch $M \setminus N$ zulässig. ⟩⟩⟩

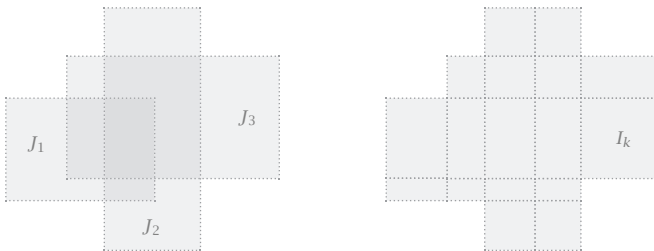
Wichtig für die Definition des Integrals ist die Beobachtung, dass zulässige Mengen immer als Vereinigung *disjunkter* Intervalle geschrieben werden können. Der Beweis des folgenden Lemmas ist als Übung überlassen.

- 8 **Lemma** Jede zulässige Menge $M = J_1 \cup \dots \cup J_n$ kann geschrieben werden als Vereinigung paarweise disjunkter Intervalle I_1, \dots, I_m mit

$$I_k \cap J_l \neq \emptyset \Rightarrow I_k \subset J_l$$

für alle k, l . Jedes I_k ist also ganz oder gar nicht in jedem J_l enthalten. ✕

Abb 6 Darstellung einer zulässigen Menge



20.2 Treppenfunktionen

Wie beim Cauchyintegral definieren wir das Lebesgueintegral zunächst für besonders einfache Funktionen. Die Klasse dieser Funktionen hängt nicht vom Maß μ ab.

Definition Eine *Treppenfunktion* auf dem \mathbb{R}^n ist eine Funktion der Gestalt

$$s = \sum_{1 \leq k \leq m} c_k \chi_{I_k}$$

mit endlich vielen Intervallen $I_k \in \mathcal{J}^n$ und reellen Zahlen $c_k \in \mathbb{R}$. Der Raum aller solchen Treppenfunktionen wird mit \mathcal{T}^n bezeichnet. \times

Bemerkung Einige oder alle Koeffizienten c_k dürfen hierbei Null sein. Man muss also nicht solche Konstanzintervalle ›aussortieren‹, auf denen s verschwindet. \rightarrow

Jede Treppenfunktion s nimmt nur endlich viele Werte an und ist damit *beschränkt*. Ihr *Träger*, definiert als die *abgeschlossene* Menge

$$\text{supp}(s) := \{s \neq 0\}^- = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) \neq 0\}^- ,$$

ist ebenfalls beschränkt, somit kompakt, und eine zulässige Menge.

Jede Treppenfunktion s besitzt unendlich viele solcher Darstellungen. Insbesondere gibt es auch immer Darstellungen mit disjunkten Intervallen I_k 8. Diese nennen wir ein *mit s verträgliches System*, und die einzelnen Intervalle heißen *Konstanzintervalle* von s . Ein gemeinsames verträgliches System gibt es auch für jede endliche Zahl von Treppenfunktionen:

- 9 **Lemma** Zu je endlich vielen Treppenfunktionen gibt es immer ein gemeinsames verträgliches System von Konstanzintervallen. \times

⟨⟨⟨ Seien s_1, \dots, s_n Treppenfunktionen und $I_{k,1}, \dots, I_{k,l_k}$ die Konstanzintervalle von s_k . Die Vereinigung dieser endlich vielen Intervalle ist eine zulässige Menge. Es gibt daher 8 paarweise disjunkte Intervalle J_1, \dots, J_r so, dass

$$\bigcup_{1 \leq i \leq r} J_i = \bigcup_{1 \leq k \leq n} \bigcup_{1 \leq l \leq l_k} I_{k,l},$$

wobei jedes J_i ganz oder gar nicht in jedem dieser $I_{k,l}$ enthalten ist. Somit ist jedes J_i Konstanzintervall jeder Treppenfunktion s_k . Also bildet J_1, \dots, J_r ein mit allen s_1, \dots, s_n verträgliches System. ⟩⟩⟩

10 **Lemma** Sind s und t Treppenfunktionen, so sind es auch αs für $\alpha \in \mathbb{R}$ sowie

$$s + t, \quad st, \quad \max(s, t), \quad \min(s, t), \quad |s|.$$

Somit bildet \mathcal{T}^n eine reelle Algebra. ✕

⟨⟨⟨ Betrachte zum Beispiel $\max(s, t)$. Wählen wir zu s und t ein gemeinsames verträgliches System von Konstanzintervallen I_1, \dots, I_m 9 , so ist

$$s = \sum_{1 \leq k \leq m} a_k \chi_{I_k}, \quad t = \sum_{1 \leq k \leq m} b_k \chi_{I_k}.$$

Dann gilt

$$\max(s, t) = \sum_{1 \leq k \leq m} \max(a_k, b_k) \chi_{I_k}.$$

Also ist $\max(s, t)$ ebenfalls eine Treppenfunktion. ⟩⟩⟩

■ Integral

Das Lebesgueintegral einer Treppenfunktion wird wie beim Cauchyintegral definiert. Der einzige Unterschied ist, dass wir Intervalle mit einem allgemeineren Maß als nur dem Volumenmaß messen.

Definition Sei

$$s = \sum_{1 \leq k \leq m} c_k \chi_{I_k}$$

eine Treppenfunktion mit disjunkten Intervallen $I_k \in \mathcal{J}^n$. Dann ist das *Lebesgueintegral* von s *bezüglich eines Maßes* μ oder kurz das μ -Integral von s definiert als die reelle Zahl

$$I_\mu(s) := \sum_{1 \leq k \leq m} c_k \mu(I_k). \quad \text{✕}$$

Das Integral von Treppenfunktionen ist immer *endlich*, da alle Intervalle beschränkt sind und die Summe endlich ist.

Diese Definition ist natürlich erst gerechtfertigt, wenn wir zeigen, dass der Wert des Integrals nicht von der Darstellung von s abhängt. Der Beweis beruht darauf, dass es zu je zwei verschiedenen verträglichen Systemen von Konstanzintervallen einer Treppenfunktion immer ein weiteres solches System gibt, dessen Intervalle ganz oder gar nicht in den vorliegenden Intervallen enthalten sind g . Der Rest ist dann Routine.

- ▶ A. Für das Längenmaß λ ist dies das Cauchyintegral $_{10.1}$.
- B. Für eine Masseverteilung m auf einer diskreten Menge Λ ist

$$I_m(s) = \sum_{p \in \Lambda} s(p)m(p),$$

wobei wegen der Kompaktheit des Trägers von s die Summe sich nur über die endlich vielen Punkte in $\Lambda \cap \text{supp}(s)$ erstreckt. Die Summe ist also endlich, auch wenn Λ keine endliche Menge ist.

C. Bezüglich des Zählmaßes ν auf \mathbb{N} ist jede Funktion $a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit beschränktem Träger eine Treppenfunktion, und

$$I_\nu(a) = \sum_{n \geq 1} a(n). \quad \blacktriangleleft$$

- 11 Satz** Das μ -Integral auf \mathcal{J}^n ist linear, monoton, und erfüllt die Dreiecksungleichung. Für Treppenfunktionen s, t und reelle Zahlen α gilt also
- (i) *Linearität:* $I_\mu(\alpha s + t) = \alpha I_\mu(s) + I_\mu(t)$,
 - (ii) *Monotonie:* $s \leq t \Rightarrow I_\mu(s) \leq I_\mu(t)$,
 - (iii) *Dreiecksungleichung:* $|I_\mu(s)| \leq I_\mu(|s|)$. \blacktriangleright

◀◀◀ Die letzten beiden Eigenschaften folgen aus der Positivität des Maßes. So ist zum Beispiel mit einem verträglichen Intervallsystem

$$|I_\mu(s)| = \left| \sum_{1 \leq k \leq m} c_k \mu(I_k) \right| \leq \sum_{1 \leq k \leq m} |c_k| \mu(I_k) = I_\mu(|s|).$$

Alles andere ist Routine. ▶▶▶

■ Ausdehnung des Maßes

Die charakteristische Funktion einer zulässigen Menge ist ebenfalls eine Treppenfunktion g . Wir können damit jedes Intervallmaß μ ausdehnen zu einer Funktion

$$\tilde{\mu}: \mathcal{Z}^n \rightarrow [0, \infty), \quad \tilde{\mu}(M) := I_\mu(\chi_M).$$

Für ein Intervall $I \in \mathcal{J}^n$ gilt insbesondere

$$\tilde{\mu}(I) = I_\mu(\chi_I) = 1 \cdot \mu(I) = \mu(I),$$

denn χ_I ist eine Treppenfunktion mit Konstanzintervall I und Wert 1. Somit gilt $\tilde{\mu}|_{\mathcal{J}^n} = \mu$, und $\tilde{\mu}$ definiert eine Fortsetzung von μ auf \mathcal{Z}^n . Im Weiteren schreiben wir hierfür ebenfalls wieder μ .

- 12 **Satz** Die auf \mathcal{Z}^n ausgedehnte Funktion μ ist ebenfalls additiv, monoton und regulär. Für zulässige Mengen M und N mit $N \subset M$ gilt außerdem

$$\mu(M \setminus N) = \mu(M) - \mu(N). \quad \times$$

⟨⟨⟨ Sind M und N zulässig und $N \subset M$, so ist auch $O = M \setminus N$ zulässig ⁷, und $M = N \cup O$ ist eine disjunkte Vereinigung zulässiger Mengen. Aufgrund der Additivität ist dann

$$\mu(M) = \mu(N) + \mu(O) = \mu(N) + \mu(M \setminus N).$$

Da alle Terme endlich sind, folgt hieraus die letzte Behauptung. Alles Weitere ist als Übung überlassen. ⟩⟩⟩

20.3

Drei Hilfssätze

Für den weiteren Aufbau der Theorie benötigen wir drei Resultate über Folgen von nichtnegativen Treppenfunktionen. Die ersten beiden werden auch als *erster und zweiter Hauptsatz von Lebesgue* bezeichnet.

Mit \mathcal{T}_+^n bezeichnen wir im Folgenden den Raum aller nichtnegativen Treppenfunktionen.

- 13 **Lemma A** Sei (s_k) eine steigende Folge in \mathcal{T}_+^n . Gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I_\mu(s_k) < \infty,$$

so gilt auch $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k <_\mu \infty$. \times

⟨⟨⟨ Zu zeigen ist, dass

$$N = \{x \in \mathbb{R}^n : s_k(x) \rightarrow \infty\}$$

eine Nullmenge bildet. Sei dazu $I = \lim_{k \rightarrow \infty} I_\mu(s_k) < \infty$ und $M > 0$. Für jedes k ist

$$E_k = \{s_k > M\} := \{x \in \mathbb{R}^n : s_k(x) > M\}$$

die Vereinigung endlich vieler Konstanzintervalle von s_k und damit zulässig. Ferner ist $s_k \geq M \chi_{E_k}$ und deshalb

$$I \geq I_\mu(s_k) \geq I_\mu(M \chi_{E_k}) = M I_\mu(\chi_{E_k}) = M \mu(E_k).$$

Für alle k gilt somit

$$\mu(E_k) \leq \frac{I}{M}.$$

Wegen der Monotonie der Folge (s_k) bildet (E_k) eine monoton steigende Folge zulässiger Mengen, und es gilt

$$N \subset \bigcup_{k \geq 0} E_k = \bigcup_{k \geq 1} (E_k \setminus E_{k-1}) \cup E_0.$$

Die Mengen E_0 und $E_k \setminus E_{k-1}$ für $k \geq 1$ sind sämtlich zulässig und disjunkt, für deren Maße gilt deshalb ¹²

$$\sum_{k=1}^n \mu(E_k \setminus E_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (\mu(E_k) - \mu(E_{k-1})) = \mu(E_n) - \mu(E_0).$$

Zusammen mit $\mu(E_k) \leq 1/M$ folgt hieraus

$$\sum_{k \geq 1} \mu(E_k \setminus E_{k-1}) + \mu(E_0) \leq \frac{I}{M}.$$

Stellen wir jetzt noch jede dieser Mengen als endliche Vereinigung disjunkter Intervalle dar ⁸, so erhalten wir eine abzählbare Familie disjunkter Intervalle, die N überdecken und deren Maßsumme kleiner ist als I/M . Da I fest und M beliebig ist, ist N eine Nullmenge. \gggg

14 Lemma B Sei (s_k) eine fallende Folge in \mathcal{T}_+^n . Gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k =_{\mu} 0,$$

so gilt auch $\lim_{k \rightarrow \infty} I_{\mu}(s_k) = 0$. \times

\llll Sei $s_0 \geq s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq 0$ eine solche Folge. Aufgrund der Monotonie des μ -Integrals ¹¹ gilt dann auch

$$I_{\mu}(s_0) \geq I_{\mu}(s_1) \geq I_{\mu}(s_2) \geq \dots \geq 0.$$

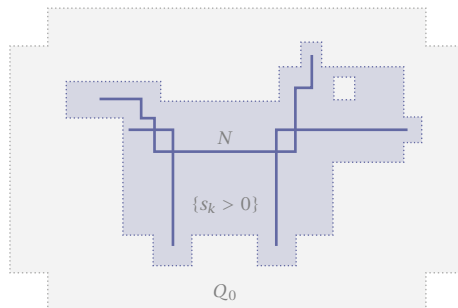
Zum Beweis des Lemmas genügt es daher zu zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \geq 0$ gibt, so dass $I_{\mu}(s_n) < \varepsilon$.

Aufgrund der Monotonie und Nichtnegativität der Treppenfunktionen s_k sind ihre Träger alle enthalten im Träger $Q_0 = \text{supp}(s_0)$. Diese Menge ist zulässig sowie abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Außerdem existiert aufgrund der Monotonie der Folge der punktweise Limes der s_k , und nach Voraussetzung ist $N = \{\lim s_k > 0\}$ eine Nullmenge. Diese ist notwendigerweise in Q_0 enthalten.

Wir können auch noch annehmen, dass jedes s_k ein verträgliches System von Konstanzintervallen besitzt, welches Q_0 überdeckt. Gegebenenfalls ergänzen wir endlich viele geeignete Intervalle und weisen s_k dort den Wert 0 zu.

Abb 7

Zum Beweis von
Lemma B



Sei nun $\varepsilon > 0$. Wir fassen dann alle Konstanzintervalle aller s_k , auf denen diese kleiner als ε sind, zu einer abzählbaren Familie zusammen und bezeichnen sie mit I_1, I_2, \dots . Diese überdecken $Q_0 \setminus N$, da dort $s_k \searrow 0$. Ferner sei J_1, J_2, \dots eine Überdeckung von N durch n -Intervalle mit der Eigenschaft, dass

$$\sum_{l \geq 1} \mu(J_l) < \varepsilon/2.$$

Aufgrund der Regularität von μ existieren dazu *offene* Intervalle $\tilde{I}_l \supset I_l$ und $\tilde{J}_l \supset J_l$ mit

$$\sum_{l \geq 1} \mu(\tilde{I}_l \setminus I_l) + \sum_{l \geq 1} \mu(\tilde{J}_l) < \varepsilon.$$

Beide Familien zusammen bilden eine offene Überdeckung der kompakten Menge Q_0 . Nach dem Satz von Heine-Borel 10.10 – der im \mathbb{R}^n genau wie in \mathbb{R} gilt und bewiesen wird A-2 – gibt es auch eine endliche Teilüberdeckung. Es gilt also

$$Q_0 \subset \tilde{I}_1 \cup \dots \cup \tilde{I}_r \cup \tilde{J}_1 \cup \dots \cup \tilde{J}_s$$

mit einer geeigneten Auswahl und Ummummerierung dieser Intervalle.

Zu jedem \tilde{I}_l existiert nun ein Index k_l , so dass $s_{k_l}|I_l < \varepsilon$. Wir setzen $n = \max(k_1, \dots, k_r)$ und zeigen, dass $I_\mu(s_n)$ klein wird. Sei dazu

$$A = \bigcup_{1 \leq l \leq r} I_l, \quad B = \bigcup_{1 \leq l \leq r} (\tilde{I}_l \setminus I_l) \cup \bigcup_{1 \leq l \leq s} \tilde{J}_l.$$

Dann ist $\chi_A + \chi_B \geq 1$ auf Q_0 und deshalb

$$I_\mu(s_n) \leq I_\mu((\chi_A + \chi_B)s_n) = I_\mu(\chi_A s_n) + I_\mu(\chi_B s_n).$$

Aufgrund der Wahl von n und der Monotonie der Folge (s_k) ist

$$s_n|I_l \leq s_{k_l}|I_l < \varepsilon$$

für jedes l und deshalb auch $s_n|A < \varepsilon$. Also gilt

$$I_\mu(\chi_A s_n) \leq \varepsilon I_\mu(\chi_{Q_0}) = \varepsilon \mu(Q_0).$$

Andererseits gilt

$$\mu(B) \leq \sum_{1 \leq l \leq r} \mu(\tilde{I}_l \setminus I_l) + \sum_{1 \leq l \leq s} \mu(\tilde{J}_l) < \varepsilon$$

und deshalb

$$I_\mu(\chi_B s_n) \leq \|s_n\| I_\mu(\chi_B) \leq \|s_0\| \mu(B) \leq \varepsilon \|s_0\|,$$

wobei $\|\cdot\|$ die Supremumsnorm bezeichnet. Also gilt insgesamt

$$I_\mu(s_n) \leq \varepsilon(\mu(Q_0) + \|s_0\|).$$

Da $\mu(Q_0)$ und $\|s_0\|$ unabhängig von n sind, ist die Behauptung bewiesen. \gggg

15 Lemma C Seien $(s_k), (t_k)$ zwei monoton steigende Folgen in \mathcal{T}_+^n . Gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k \leq_\mu \lim_{k \rightarrow \infty} t_k,$$

so gilt auch $\lim_{k \rightarrow \infty} I_\mu(s_k) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} I_\mu(t_k)$. \times

\llll Betrachte

$$u_{n,m} := \max(s_n - t_m, 0).$$

Dies sind nichtnegative Treppenfunktionen, die für jedes feste n bezüglich m monoton fallen mit $\lim_{m \rightarrow \infty} u_{n,m} =_\mu 0$. Also gilt mit Lemma B₁₄ auch

$$\lim_{m \rightarrow \infty} I_\mu(u_{n,m}) = 0.$$

Wegen $u_{n,m} \geq s_n - t_m$ gilt andererseits $I_\mu(u_{n,m}) \geq I_\mu(s_n) - I_\mu(t_m)$, also

$$I_\mu(t_m) \geq I_\mu(s_n) - I_\mu(u_{n,m})$$

für alle m . Also gilt auch 5.9

$$\lim_{m \rightarrow \infty} I_\mu(t_m) \geq I_\mu(s_n) - \lim_{m \rightarrow \infty} I_\mu(u_{n,m}) = I_\mu(s_n).$$

Da dies für jedes n gilt, muss auch $\lim_{m \rightarrow \infty} I_\mu(t_m) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} I_\mu(s_n)$ gelten. Dies gilt auch für uneigentliche Grenzwerte. \gggg

20.4

Monoton approximierbare Funktionen

Bis jetzt gingen wir genau so vor wie bei der Definition des Cauchyintegrals, abgesehen vom Bezug auf ein allgemeines Maß. Der entscheidende Unterschied ergibt sich nun durch die Art, wie das Integral von den Treppenfunktionen auf eine größere Klasse von Funktionen ausgedehnt wird.

Dazu betrachten wir zuerst Funktionen, die sich punktweise durch monoton steigende Folgen von nichtnegativen Treppenfunktionen approximieren lassen. Diese Funktionen sind also *per definitionem* nichtnegativ und dürfen auch den Wert ∞ annehmen.

Definition Eine Funktion $u: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty]$ heißt μ -monoton approximierbar, wenn es eine μ -monoton steigende Folge (s_k) in \mathcal{T}_+^n gibt, so dass

$$u =_\mu \lim_{k \rightarrow \infty} s_k.$$

Der Raum dieser Funktionen wird mit $\mathcal{U}^n(\mu)$ bezeichnet. \times

- ▶ A. Für jedes Intervall I gilt $\chi_I \in \mathcal{U}^n(\mu)$ A-14.
- B. Die Dirichletfunktion $\delta = \chi_{\mathbb{Q}}$ ist λ -monoton approximierbar A-7.
- C. Jede nichtnegative stetige Funktion auf \mathbb{R} ist in $\mathcal{U}^1(\lambda)$ A-14.
- D. Auch die Funktion $f \equiv \infty$ ist μ -monoton approximierbar.
- E. Die charakteristische Funktion einer Cantormenge mit positivem Maß ist *nicht* λ -monoton approximierbar A-20. \blacktriangleleft

Multiplizieren wir eine solche Funktion mit 0, so können Ausdrücke der Form $0 \cdot \infty$ auftreten. Im Rahmen der Integrationstheorie ist es sinnvoll, solchen Ausdrücken den Wert 0 zuzuweisen, was wir von nun an tun werden. Es gilt also

$$0 \cdot \infty = 0$$

für alle Weitere.

16 Lemma Sind u und v in $\mathcal{U}^n(\mu)$, so sind es auch cu für $c \geq 0$ sowie

$$u + v, \quad uv, \quad \max(u, v), \quad \min(u, v). \quad \times$$

⟨⟨⟨ Sind zum Beispiel (s_k) und (t_k) monoton steigende Folgen in \mathcal{T}_+^n , so ist es auch $(s_k t_k)$, da nur Produkte nichtnegativer reeller Zahlen auftreten. Aus $s_k \nearrow_\mu u$ und $t_k \nearrow_\mu v$ folgt dann auch $s_k t_k \nearrow_\mu uv$ sowohl für eigentliche wie uneigentliche Grenzwerte. Entsprechend alles Übrige. ⟩⟩⟩

Das Integral für Funktionen in $\mathcal{U}^n(\mu)$ wird in naheliegender Weise erklärt.

Definition Ist $u \in \mathcal{U}^n(\mu)$ der punktweise Grenzwert einer μ -monoton steigenden Folge (s_k) in \mathcal{T}_+^n , so heißt

$$I_\mu(u) := \lim_{k \rightarrow \infty} I_\mu(s_k)$$

das *Lebesgueintegral von u bezüglich μ* oder kurz μ -Integral von u . Dieses kann auch den Wert ∞ annehmen. \times

⟨⟨⟨⟨ Dieses Integral hängt nicht von der Wahl der Folge ab. Sei (t_k) eine weitere steigende Folge in \mathcal{T}_+^n mit $t_k \nearrow_\mu u$. Dann gilt notwendigerweise

$$\lim s_k =_\mu \lim t_k.$$

Wenden wir Lemma C₁₅ mit \leq_μ und \geq_μ anstelle von $=_\mu$ an, so erhalten wir

$$\lim I_\mu(s_k) \leq \lim I_\mu(t_k), \quad \lim I_\mu(s_k) \geq \lim I_\mu(t_k).$$

Also sind beide Grenzwerte gleich. ⟩⟩⟩⟩

▶ A. Für eine Treppenfunktion $s \in \mathcal{T}_+^n$ stimmt dieses Integral mit dem zuvor definierten überein, denn die konstante Folge (s) ist eine geeignete approximierende Folge.

B. Für die Dirichletfunktion δ gilt $I_\lambda(\delta) = 0$.

C. Eine stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ ist der gleichmäßige Limes einer steigenden Folge von Treppenfunktionen in $\mathcal{T}_+^{n_{A-13}}$. Setzen wir also f außerhalb von $[a, b]$ durch Null zu einer Funktion auf ganz \mathbb{R} fort, so stimmen Cauchy- und Lebesgueintegral überein:

$$\int_a^b f = I_\lambda(f).$$

D. Eine stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ besitzt immer ein λ -Integral. Dies kann auch den Wert ∞ annehmen und stimmt mit dem uneigentlichen Cauchyintegral von f überein _{A-11}. ◀

17 **Lemma** Für $u, v \in \mathcal{U}^n(\mu)$ und $c \geq 0$ gilt

$$I_\mu(cu + v) = cI_\mu(u) + I_\mu(v).$$

Ist $u \leq_\mu v$, so gilt ferner $I_\mu(u) \leq I_\mu(v)$. ✕

⟨⟨⟨⟨ Sind (s_k) und (t_k) monoton steigende Folgen von nichtnegativen Treppenfunktionen mit $s_k \nearrow_\mu u$ und $t_k \nearrow_\mu v$, so ist $(cs_k + t_k)$ eine solche Folge mit $cs_k + t_k \nearrow_\mu cu + v$, und es gilt

$$\begin{aligned} I_\mu(cu + v) &= \lim I_\mu(cs_k + t_k) \\ &= \lim (I_\mu(cs_k) + I_\mu(t_k)) \\ &= \lim cI_\mu(s_k) + \lim I_\mu(t_k) = cI_\mu(u) + I_\mu(v). \end{aligned}$$

Entsprechend wird die Monotonie gezeigt _{A-15}. ⟩⟩⟩⟩

Man beachte, dass $\mathcal{U}^n(\mu)$ offensichtlich kein Vektorraum ist.

■ Monotone Konvergenz

Wir zeigen nun, dass $\mathcal{U}^n(\mu)$ abgeschlossen ist unter monotoner Grenzwertbildung. Das heißt, der punktweise Grenzwert einer monoton steigenden Folge in $\mathcal{U}^n(\mu)$ gehört wieder zu $\mathcal{U}^n(\mu)$, und dieser Prozess vergrößert den Raum nicht. Außerdem vertauschen Integral und Grenzübergang.

- 18 **Satz von der monotonen Konvergenz** Sei (u_k) eine μ -monoton steigende Folge in $\mathcal{U}^n(\mu)$. Dann ist auch

$$u =_\mu \lim u_k \in \mathcal{U}^n(\mu),$$

und es gilt

$$I_\mu(u) = \lim I_\mu(u_k). \quad \times$$

⟨⟨⟨ Zu jedem u_k existiert eine steigende Folge $(s_{k,l})_{l \geq 1}$ in \mathcal{J}_+^n mit

$$s_{k,1} \leq s_{k,2} \leq s_{k,3} \leq \dots \leq s_{k,l} \nearrow_\mu u_k.$$

Dabei können wir annehmen, dass die punktweise Konvergenz für alle k außerhalb einer gemeinsamen Nullmenge N stattfindet \mathfrak{s} . Dann sind die Funktionen

$$t_m := \max \{s_{k,l} : 1 \leq k, l \leq m\}, \quad m \geq 1,$$

als Maximum über jeweils endlich viele nichtnegative Treppenfunktionen ebenfalls nichtnegative Treppenfunktionen $\mathfrak{1}_0$. Diese bilden ebenfalls eine monoton steigende Folge, wobei

$$t_m \leq_\mu u_m \leq_\mu u, \quad m \geq 1.$$

Es gilt auch

$$t_m \nearrow_\mu u.$$

Denn gilt dies in einem Punkt p nicht, so ist $t_m(p) \leq \lim t_m(p) < u(p)$ für alle m . Dasselbe gilt dann auch für alle $s_{k,l}(p)$. Folglich gehört p zu der Nullmenge N , auf der die Treppenfunktionen nicht gegen u konvergieren.

Somit ist $u \in \mathcal{U}^n(\mu)$. Aus der Definition des Integrals folgt außerdem

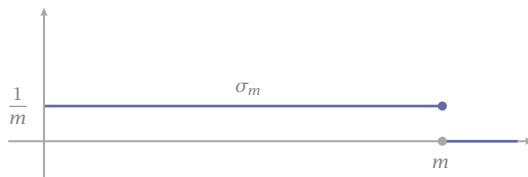
$$\lim I_\mu(t_m) = I_\mu(u).$$

Wegen $t_m \leq_\mu u_m \leq_\mu u$ ist andererseits $\mathfrak{1}_7$

$$I_\mu(t_m) \leq I_\mu(u_m) \leq I_\mu(u).$$

Also gilt auch $\lim I_\mu(u_m) = I_\mu(u)$. $\rangle\rangle\rangle\rangle$

Abb 8
Die Treppenfunktion
 σ_m im Gegenbeispiel



- 19 \Rightarrow **Ein Gegenbeispiel** Für nicht-monotone Folgen gilt dieser Satz nicht, selbst wenn die Konvergenz gleichmäßig ist. Für die Treppenfunktionen $\sigma_m = m^{-1}\chi_{[0,m]}$ beispielsweise gilt

$$\sigma_m \Rightarrow 0, \quad I_\mu(\sigma_m) \equiv 1 \not\rightarrow 0 = I_\mu(\lim \sigma_m),$$

doch die Konvergenz gegen die Nullfunktion ist nicht monoton. \Leftarrow

20.5

Messbare und summierbare Funktionen

Wir bilden nun den Raum aller Funktionen, die sich als *Differenz* von monoton approximierbaren Funktionen darstellen lassen. Um undefinierte Ausdrücke zu vermeiden, betrachten wir dabei nur Funktionen, die μ -fast überall endlich sind.

- 20 **Definition** Eine Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ heißt μ -messbar, wenn

$$f =_\mu u - v$$

mit $u, v \in \mathcal{U}^n(\mu)$, wobei

$$\max(u, v) <_\mu \infty.$$

Jede solche Darstellung heißt eine *wohldefinierte Darstellung* von f . Der Raum aller μ -messbaren Funktionen wird mit $\mathcal{M}^n(\mu)$ bezeichnet. \times

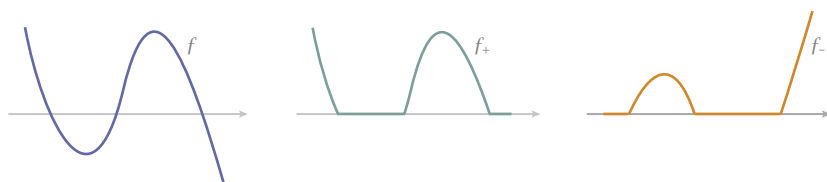
Man beachte, dass

$$\mathcal{U}^n(\mu) \not\subset \mathcal{M}^n(\mu).$$

Eine μ -monoton approximierbare Funktion ist dann und nur dann μ -messbar, wenn sie μ -fast überall endlich ist.

Satz Der Raum $\mathcal{M}^n(\mu)$ bildet eine Algebra. \times

Abb 9 Positivteil und Negativteil einer Funktion



⋄⋄⋄ Seien $f =_{\mu} u - v$ und $g =_{\mu} \tilde{u} - \tilde{v}$ wohldefinierte Darstellungen aus μ -fast überall endlichen $\mathcal{U}^n(\mu)$ -Funktionen. Da Summen und Produkte aus solchen Funktionen wieder μ -monoton approximierbar₁₆ und μ -fast überall endlich sind, sind

$$\begin{aligned} f + g &=_{\mu} (u + \tilde{u}) - (v + \tilde{v}), \\ f - g &=_{\mu} (u + \tilde{v}) - (v + \tilde{u}), \\ fg &=_{\mu} (u\tilde{u} + v\tilde{v}) - (u\tilde{v} + v\tilde{u}) \end{aligned}$$

wohldefinierte Darstellungen von $f \pm g$ und fg . Also sind diese ebenfalls μ -messbar. Dasselbe gilt für skalare Vielfache, denn

$$cf =_{\mu} cu - cv$$

ergibt sowohl für $c \geq 0$ wie auch $c < 0$ wieder eine wohldefinierte Darstellung. Also ist $\mathcal{M}^n(\mu)$ eine Algebra. ⋄⋄⋄

Eine messbare Funktion hat natürlich viele verschiedene wohldefinierte Darstellungen. Gewissermaßen kanonisch ist dabei die Darstellung durch

$$f_+ := \max(f, 0), \quad f_- := \max(-f, 0),$$

genannt der *Positivteil* respektive *Negativteil* der Funktion f . Auch der Negativteil einer Funktion ist also *nichtnegativ*, und offensichtlich gilt

$$f = f_+ - f_-, \quad |f| = f_+ + f_-.$$

Unter anderem gelten die Identitäten

$$\begin{aligned} \max(f, g) &= (f - g)_+ + g = (f - g)_- + f, \\ \min(f, g) &= g - (f - g)_- = f - (f - g)_+, \end{aligned}$$

die man leicht verifiziert. Für $f = u - v$ folgt hieraus beispielsweise

$$f_+ = \max(u, v) - v, \quad f_- = v - \min(u, v),$$

unabhängig davon, ob dies eine wohldefinierte Darstellung ist oder nicht. Daraus ergibt sich unmittelbar folgender

21 **Satz** Sind f und g μ -messbar, so sind es auch

$$f_+, f_-, |f|, \max(f, g), \min(f, g). \quad \times$$

Man beachte allerdings, dass f_+ und f_- zwar nicht negativ und messbar, aber *nicht notwendigerweise* monoton approximierbar sind. Dies gilt zum Beispiel für die charakteristischen Funktionen von Cantormengen mit positivem λ -Maß A-20.

■ Summierbare Funktionen

Das Integral einer messbaren Funktion $f = u - v$ ist als Differenz der Integrale von u und v nur dann wohldefiniert, wenn wenigstens eines von ihnen endlich ist. Das Integral selbst darf unbeschränkt sein. Das erlaubt uns später, das Maß unbeschränkter Mengen durch das Integral ihrer charakteristischen Funktionen ohne einen weiteren Approximationsprozess zu erklären.

Definition Eine Funktion $f \in \mathcal{M}^n(\mu)$ besitzt eine μ -summierbare Darstellung, wenn es eine wohldefinierte Darstellung $f =_{\mu} u - v$ gibt mit

$$\min(I_{\mu}(u), I_{\mu}(v)) < \infty.$$

In diesem Fall heißt f μ -summierbar, und

$$I_{\mu}(f) := I_{\mu}(u) - I_{\mu}(v)$$

das Integral von f bezüglich μ oder kurz das μ -Integral von f . Der Raum der μ -summierbaren Funktionen wird mit $\mathcal{M}_s^n(\mu)$ bezeichnet. \times

⟨⟨⟨ Das Integral ist unabhängig von der summierbaren Darstellung. Denn ist $f =_{\mu} \tilde{u} - \tilde{v}$ eine zweite solche Darstellung, so ist $u + \tilde{v} =_{\mu} v + \tilde{u}$ und damit 17

$$I_{\mu}(u) + I_{\mu}(\tilde{v}) = I_{\mu}(u + \tilde{v}) = I_{\mu}(v + \tilde{u}) = I_{\mu}(v) + I_{\mu}(\tilde{u}).$$

Sind alle Ausdrücke endlich, so sind wir fertig. Ist aber zum Beispiel $I_{\mu}(u) = \infty$, so ist notwendigerweise $I_{\mu}(v) < \infty$. Dann ist aber auch $I_{\mu}(\tilde{u}) = \infty$ und $I_{\mu}(\tilde{v}) < \infty$, und damit

$$I_{\mu}(u) - I_{\mu}(v) = I_{\mu}(\tilde{u}) - I_{\mu}(\tilde{v}) \tag{1}$$

auf der erweiterten Zahlengeraden. Also ergeben beide Darstellungen dasselbe Integral $I_{\mu}(f)$. Analog argumentiert man im Fall $I_{\mu}(v) = \infty$. $\rangle\rangle\rangle$

In einer μ -summierbaren Darstellung $f =_{\mu} u - v$ sind also u und v monoton approximierbar, μ -fast überall endlich, und wenigstens eines der Integrale $I_{\mu}(u)$ und $I_{\mu}(v)$ ist endlich. Offensichtlich ist

$$\mathcal{J}^n \subset \mathcal{U}^n(\mu) \cap \mathcal{M}^n(\mu) \subset \mathcal{M}_s^n(\mu) \subset \mathcal{M}^n(\mu),$$

und jede Inklusion ist echt. Der Raum $\mathcal{M}_s^n(\mu)$ ist allerdings kein Vektorraum, da er zum Beispiel die Funktionen $\chi_{(0,\infty)}$ und $\chi_{(-\infty,0)}$ enthält, aber nicht deren Differenz.

Der Positiv- und Negativteil einer messbaren Funktion sind nicht nur messbar ₂₁, sondern tatsächlich *summierbar*. Grundlage dafür ist das folgende

- 22 Lemma** *Ist f μ -messbar und nichtnegativ, so ist f μ -summierbar, und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine μ -summierbare Darstellung*

$$f =_{\mu} u - v, \quad I_{\mu}(v) < \varepsilon. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Besitzt f eine wohldefinierte Darstellung, so auch eine Darstellung _{A-17}

$$f =_{\mu} \sum_{k \geq 1} (u_k - v_k)$$

mit $\mathcal{U}^n(\mu)$ -Funktionen u_k, v_k so, dass $v_k \leq u_k$ und $I_{\mu}(u_k) < \infty$ für alle $k \geq 1$. Für jedes $k \geq 1$ existiert dazu eine Treppenfunktion t_k mit

$$0 \leq t_k \leq v_k, \quad I_{\mu}(v_k - t_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Dann gehören $\hat{u}_k = u_k - t_k \geq 0$ und $\hat{v}_k = v_k - t_k \geq 0$ ebenfalls zu $\mathcal{U}^n(\mu)$, ebenso

$$\hat{u} = \sum_{k \geq 1} \hat{u}_k, \quad \hat{v} = \sum_{k \geq 1} \hat{v}_k$$

aufgrund des Satzes von der monotonen Konvergenz ₁₈. Es gilt dann $f = \hat{u} - \hat{v}$ und

$$I_{\mu}(\hat{v}) = \sum_{k \geq 1} I_{\mu}(\hat{v}_k) = \sum_{k \geq 1} I_{\mu}(v_k - t_k) < \sum_{k \geq 1} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

wie gewünscht. ⟩⟩⟩

- 23 Satz** *Ist f μ -messbar, so sind f_+ , f_- und $|f|$ μ -summierbar, und es gilt*

$$I_{\mu}(|f|) = I_{\mu}(f_+) + I_{\mu}(f_-).$$

Ist f μ -summierbar, so ist $f = f_+ - f_-$ eine μ -summierbare Darstellung, und

$$I_{\mu}(f) = I_{\mu}(f_+) - I_{\mu}(f_-). \quad \times$$

⟨⟨⟨ Die erste Behauptung folgt aus dem vorangehenden Lemma. Um die zweite Behauptung zu zeigen, sei $f =_{\mu} u - v$ eine summierbare Darstellung mit nichtnegativen Funktionen. Dann gilt

$$u = f_+ + \min(u, v) \geq f_+, \quad v = f_- + \min(u, v) \geq f_-,$$

und damit auch ₂₂

$$I_{\mu}(u) \geq I_{\mu}(f_+), \quad I_{\mu}(v) \geq I_{\mu}(f_-).$$

Da mindestens eines der links stehenden Integrale endlich ist, gilt dies auch für $I_\mu(f_+)$ und $I_\mu(f_-)$. Somit ist $f = f_+ - f_-$ eine summierbare Darstellung, und

$$I_\mu(f) = I_\mu(u) - I_\mu(v) = I_\mu(f_+) - I_\mu(f_-). \quad \gggg$$

Eine μ -messbare Funktion ist somit nicht μ -summierbar, wenn sowohl $I_\mu(f_+)$ als auch $I_\mu(f_-)$ unbeschränkt sind.

- ▶ A. Jede monoton approximierbare Funktion ist μ -summierbar.
- B. Die Exponentialfunktion \exp ist λ -summierbar.
- C. Die Sinusfunktion \sin ist *nicht* λ -summierbar. ◀

20.6

Die Sätze von Beppo Levi und Fatou

Der Satz von der monotonen Konvergenz ₁₈ gilt auch für messbare Funktionen. Allerdings müssen wir eine obere Schranke voraussetzen, damit auch die Grenzfunktion μ -fast überall endlich ist.

- 24 **Satz von Beppo Levi** Sei (f_k) eine μ -monoton steigende Folge nichtnegativer Funktionen in $\mathcal{M}^n(\mu)$. Gilt

$$\sup I_\mu(f_k) < \infty \quad \text{oder} \quad f =_\mu \lim f_k <_\mu \infty,$$

so ist f μ -summierbar, und es gilt

$$I_\mu(f) = \lim I_\mu(f_k). \quad \times$$

◀◀◀◀ Wir können annehmen, dass $f_0 \equiv 0$. Aufgrund des vorangehenden Satzes ₂₂ existiert für jedes $k \geq 1$ eine summierbare Darstellung

$$f_k - f_{k-1} = u_k - v_k, \quad I_\mu(v_k) < 2^{-k}.$$

Somit ist

$$f_k = \sum_{l=1}^k (f_l - f_{l-1}) = \sum_{l=1}^k (u_l - v_l) = g_k - h_k$$

mit

$$g_k = \sum_{l=1}^k u_l, \quad h_k = \sum_{l=1}^k v_l.$$

Diese Funktionen bilden monoton steigende Folgen in $\mathcal{U}^n(\mu)$. Aufgrund des Satzes von der monotonen Konvergenz ₁₈ gilt also

$$g_k \nearrow_\mu g \in \mathcal{U}^n(\mu), \quad h_k \nearrow_\mu h \in \mathcal{U}^n(\mu).$$

Für alle k ist dabei

$$I_\mu(h_k) = \sum_{l=1}^k I_\mu(v_l) \leq \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} = 1.$$

Also ist $_{18} I_\mu(h) = \lim I_\mu(h_k) \leq 1$ und damit $_{13} h <_\mu \infty$. Dann ist aber auch

$$g_k = f_k + h_k \nearrow_\mu g <_\mu \infty,$$

denn entweder gilt $f <_\mu \infty$ oder $\sup I_\mu(g_k) \leq \sup I_\mu(f_k) < \infty$. Also ist

$$f =_\mu \lim f_k = \lim (g_k - h_k) = \lim g_k - \lim h_k =_\mu g - h$$

eine wohldefinierte und summierbare Darstellung, und es gilt

$$\begin{aligned} I_\mu(f) &= I_\mu(g) - I_\mu(h) = \lim I_\mu(g_k) - \lim I_\mu(h_k) \\ &= \lim (I_\mu(g_k) - I_\mu(h_k)) \\ &= \lim I_\mu(g_k - h_k) \\ &= \lim I_\mu(f_k). \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. \gggg

Für nicht-monotone Folgen gilt dieser Satz nicht $_{19}$, denn das Gegenbeispiel zum Satz von der monotonen Konvergenz $_{19}$ funktioniert auch hier. Statt dessen gilt das

25 Lemma von Fatou Sei (f_k) eine μ -fast überall konvergente Folge nichtnegativer Funktionen in $\mathcal{M}^n(\mu)$. Gilt

$$\sup I_\mu(f_k) < \infty \quad \text{oder} \quad f =_\mu \lim f_k <_\mu \infty,$$

so ist f μ -summierbar, und es gilt

$$I_\mu(f) \leq \liminf I_\mu(f_k). \quad \times$$

\llll Betrachte die Funktionen

$$\phi_{k,l} := \inf(f_k, \dots, f_l), \quad k \leq l.$$

Diese sind sämtlich messbar $_{21}$, nichtnegativ, und bilden für jedes k eine monoton fallende Folge bezüglich l . Die Folge $(f_k - \phi_{k,l})_{l \geq k}$ ist monoton steigend in $\mathcal{M}^n(\mu)$ und nach oben durch f_k beschränkt. Wir können daher darauf den Satz von Beppo Levi $_{24}$ anwenden und schließen, dass

$$\phi_k = \lim_{l \rightarrow \infty} \phi_{k,l} = \inf(f_k, f_{k+1}, \dots)$$

für jedes k summierbar ist, mit

$$I_\mu(\phi_k) \leq \inf_{l \geq k} I_\mu(f_l).$$

Die Folge (ϕ_k) steigt monoton, mit

$$\lim \phi_k = \liminf f_k =_{\mu} \lim f_k =_{\mu} f.$$

Wir können den Satz von Beppo Levi daher nochmals anwenden und schließen, dass f ebenfalls summierbar ist, mit

$$I_{\mu}(f) = \lim I_{\mu}(\phi_k) \leq \liminf_k \inf_{l \geq k} I_{\mu}(f_l) = \liminf I_{\mu}(f_k).$$

Damit ist das Lemma bewiesen. \gggg

► Das Beispiel $_{19}$ der Treppenfunktionen $\sigma_m = m^{-1} \chi_{[0,m]}$ zeigt auch, dass im Lemma von Fatou die strikte Ungleichung eintreten kann, denn

$$\sigma_m \Rightarrow 0, \quad I_{\mu}(\sigma_m) \equiv 1 > 0,$$

Auch ist die Nichtnegativität der Funktionenfolge notwendig, denn für $\bar{\sigma}_m = -\sigma_m$ gilt

$$\bar{\sigma}_m \Rightarrow 0, \quad I_{\mu}(\bar{\sigma}_m) \equiv -1 < 0. \quad \lll$$

26 Satz Sei f μ -messbar und nichtnegativ. Dann gilt

$$f =_{\mu} 0 \quad \Leftrightarrow \quad I_{\mu}(f) = 0. \quad \times$$

««« Die Funktion f ist jedenfalls summierbar $_{22}$. Ist $f =_{\mu} 0$, so ist offensichtlich $I_{\mu}(f) = 0$. Um die Umkehrung zu beweisen, betrachte $f_k = kf$ für $k \geq 0$. Diese Folge ist nichtnegativ und monoton steigend in $\mathcal{M}^n(\mu)$ mit

$$\sup_{k \geq 0} I_{\mu}(f_k) = \sup_{k \geq 0} k I_{\mu}(f) = 0.$$

Der Satz von Beppo Levi ist damit anwendbar, und der punktweise Limes der f_k eine summierbare Funktion. Dies ist aber nur möglich, wenn $f =_{\mu} 0$. \gggg

20.7 Integrierbare Funktionen

Das Integral summierbarer Funktionen kann unbeschränkt sein. Mit Blick auf die Konstruktion vollständig normierter Räume wie die L^p -Räume ist es aber notwendig, Räume von summierbaren Funktionen mit endlichen Integral zu betrachten.

Definition und Satz Eine μ -summierbare Funktion f heißt μ -integrierbar, wenn ihr μ -Integral endlich ist. Der Raum aller μ -integrierbaren Funktionen wird mit $\mathcal{L}^1(\mu)$ bezeichnet. \times

Es gilt also

$$\mathcal{T}^n \subset \mathcal{L}^n(\mu) \subset \mathcal{M}_s^n(\mu) \subset \mathcal{M}^n(\mu),$$

und jede Inklusion ist echt. Eine Funktion in $\mathcal{U}^n(\mu)$ gehört dann und nur dann zu $\mathcal{L}^n(\mu)$, wenn ihr Integral endlich ist.

Satz *Der Raum $\mathcal{L}^n(\mu)$ ist ein Vektorraum, und das Lebesgueintegral definiert ein lineares Funktional*

$$I_\mu : \mathcal{L}^n(\mu) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto I_\mu(f). \quad \times$$

⟨⟨⟨ Wir zeigen die Additivität. Funktionen $f, g \in \mathcal{L}^n(\mu)$ besitzen summierbare Darstellungen $f = u - v$ und $g = \tilde{u} - \tilde{v}$ mit integrierbaren Funktionen in $\mathcal{U}^n(\mu)$. Dann sind auch $u + \tilde{v}$ und $v + \tilde{u}$ integrierbare $\mathcal{U}^n(\mu)$ -Funktionen¹⁷ und damit

$$f - g = (u + \tilde{v}) - (v + \tilde{u})$$

eine Darstellung mit integrierbaren Funktionen. Weiter folgt

$$\begin{aligned} I_\mu(f - g) &= I_\mu(u + \tilde{v}) - I_\mu(v + \tilde{u}) \\ &= I_\mu(u) - I_\mu(v) - I_\mu(\tilde{u}) + I_\mu(\tilde{v}) \\ &= I_\mu(f) - I_\mu(g). \end{aligned}$$

Alles andere wird entsprechend gezeigt. ⟩⟩⟩

Von nun an verwenden wir die klassische Leibnizsche Notation

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu := I_\mu(f)$$

auch für das Lebesgueintegral. Ein Unterschied zum Cauchyintegral besteht allerdings darin, dass eine Funktion f dann und nur dann μ -integrierbar ist, wenn es auch $|f|$ ist. Dies ergibt sich daraus, dass $f = f_+ - f_-$ eine summierbare Darstellung von f ist. Allgemeiner gilt folgendes

27 Majorantenkriterium *Ist f μ -messbar, g μ -integrierbar und $|f| \leq_\mu g$, so ist auch f μ -integrierbar, und es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| \, d\mu \leq \int_{\mathbb{R}^n} g \, d\mu. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Aus $|f| \leq_\mu g$ und der Integrierbarkeit von g folgt²³

$$I_\mu(f_+) + I_\mu(f_-) = I_\mu(|f|) \leq I_\mu(g) < \infty.$$

Also sind beide links stehenden Integrale endlich, und folglich²³

$$I_\mu(f) = I_\mu(f_+) - I_\mu(f_-) < \infty. \quad \rangle\rangle\rangle$$

Der wichtigste Satz der Lebesguetheorie betrifft die Vertauschbarkeit von Integration und punktwisen Limes unter sehr allgemeinen Bedingungen. Er wird auch als *Satz von der dominierten Konvergenz* bezeichnet.

- 28 **Satz von Lebesgue** Sei (f_k) eine μ -fast überall konvergente Folge in $\mathcal{M}^n(\mu)$. Gibt es eine Funktion $g \in \mathcal{L}^n(\mu)$, so dass

$$|f_k| \leq_\mu g, \quad k \geq 1,$$

so ist $f =_\mu \lim f_k$ μ -integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\mu. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Die Funktionen $g + f_k$ sind sämtlich messbar, nichtnegativ, und konvergieren μ -fast überall gegen $g + f$. Außerdem gilt für alle k

$$g + f_k \leq g + |f_k| \leq_\mu 2g <_\mu \infty.$$

Mit dem Lemma von Fatou ist somit $g + f$ integrierbar, und es gilt

$$\begin{aligned} I_\mu(g + f) &= I_\mu(g + \lim f_k) \\ &\leq \liminf I_\mu(g + f_k) \\ &= I_\mu(g) + \liminf I_\mu(f_k). \end{aligned}$$

Da g integrierbar ist, ist auch f integrierbar, und es folgt

$$I_\mu(f) \leq \liminf I_\mu(f_k).$$

Argumentiert man entsprechend für $g - f_k \geq 0$, so folgt

$$\begin{aligned} I_\mu(g - f) &= I_\mu(g - \lim f_k) \\ &\leq \liminf I_\mu(g - f_k) \\ &= I_\mu(g) - \limsup I_\mu(f_k), \end{aligned}$$

und man erhält

$$\limsup I_\mu(f_k) \leq I_\mu(f).$$

Somit konvergiert die Folge $I_\mu(f_k)$ mit Grenzwert $I_\mu(f)$. ⟩⟩⟩

▶ Das Beispiel $_{19}$ der Treppenfunktionen $\sigma_m = m^{-1}\chi_{[0,m]}$ zeigt auch, dass eine integrierbare Majorante unverzichtbar ist. Die kleinste Majorante ist hier

$$g = \sum_{m \geq 1} m^{-1}\chi_{(m-1,m]}.$$

Ihr λ -Integral ist die harmonische Reihe. Also ist g nicht λ -integrierbar. Und tatsächlich gilt der Satz von Lebesgue für die Folge (σ_m) nicht. ◀

20.8

Messbare Mengen

Definition Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt μ -messbar, wenn ihre charakteristische Funktion χ_A μ -messbar und damit ²² auch μ -summierbar ist. Ihr Maß ist dann

$$\mu(A) := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A d\mu.$$

Die Familie aller μ -messbaren Mengen wird mit $\mathcal{A}^n(\mu)$ bezeichnet. \times

► A. Jedes Intervall und jede zulässige Menge ist μ -messbar, und ihr Maß stimmt mit dem bereits definierten Maß überein.

B. \mathbb{Q}^n und \mathbb{R}^n sind μ -messbar, und im Fall des Volumenmaßes λ ist

$$\lambda(\mathbb{Q}^n) = 0, \quad \lambda(\mathbb{R}^n) = \infty.$$

C. Jede Borelmenge - siehe nächste Seite - ist μ -messbar für jedes Maß μ . ◀

29 Lemma Ist (A_k) eine monoton steigende Folge μ -messbarer Mengen, so ist auch $A = \bigcup_k A_k$ μ -messbar, und es gilt

$$\mu(A) = \lim \mu(A_k). \quad \times$$

◀◀◀ Die charakteristischen Funktionen χ_{A_k} bilden eine monoton steigende Folge nichtnegativer messbarer Funktionen mit $\chi_{A_k} \nearrow \chi_A \leq 1$. Der Satz von Beppo Levi ²⁴ ist also anwendbar. Somit ist $\chi_A \in \mathcal{M}_s^n(\mu)$ und

$$\mu(A) = I_\mu(\chi_A) = \lim I_\mu(\chi_{A_k}) = \lim \mu(A_k). \quad \text{◀◀◀}$$

Satz Die Familie $\mathcal{A}^n(\mu)$ aller μ -messbaren Mengen bildet eine σ -Algebra: sie enthält die leere Menge und ist abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen und abzählbaren Durchschnitten sowie Komplementbildung. \times

◀◀◀ Die Vereinigung zweier messbarer Mengen ist wieder messbar, denn ²² $\chi_{A \cup B} = \sup(\chi_A, \chi_B)$ ist messbar. Dasselbe gilt dann für Vereinigungen endlich vieler messbarer Mengen. Die Vereinigung abzählbar vieler messbarer Mengen A_k ist darstellbar als Vereinigung einer steigenden Folge messbarer Mengen,

$$A = \bigcup_k A_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \bigcup_{k \leq n} A_k,$$

und damit ebenfalls messbar ²⁹. Das Komplement A^c einer messbaren Menge A ist messbar, denn $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$.

Die Messbarkeit abzählbar vieler Durchschnitte folgt mit den bisherigen Ergebnissen und der Regel von de Morgan,

$$\bigcap_k A_k = \left(\bigcup_k A_k^c \right)^c. \quad \text{◀◀◀}$$

Da sich offene Mengen als abzählbare Vereinigung von n -Intervallen schreiben lassen und deren Komplemente die abgeschlossenen Mengen bilden, erhalten wir folgendes

Korollar *Offene und abgeschlossene Mengen sind messbar bezüglich jeden Maßes μ .* ✕

► Der Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen, genannt *G_δ -Mengen*, ist μ -messbar. Dasselbe gilt für die Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Mengen, genannt *F_σ -Mengen*. ◀

Die Familie $\mathcal{A}^n(\mu)$ aller μ -messbaren Teilmengen des \mathbb{R}^n enthält damit auch die *Borelalgebra* \mathcal{B}^n , welche definiert ist als die kleinste σ -Algebra, die alle offenen und abgeschlossenen Teilmengen des \mathbb{R}^n enthält. Sie hängt also nicht von der Wahl eines Maßes, sondern nur von der Topologie des \mathbb{R}^n ab. Es gilt beispielsweise

$$\mathcal{B}^n \subsetneq \mathcal{A}^n(\lambda) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n),$$

worauf wir hier allerdings nicht eingehen werden.

■ Integrale über messbare Mengen

Alle Integrale erstreckten sich bisher über den Gesamttraum \mathbb{R}^n . Integrale über messbare Teilmengen werden hierauf zurückgeführt, indem man die betreffende Funktion durch 0 auf deren Komplement fortsetzt.

Ist also $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge und $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion, so definieren wir deren Fortsetzung auf den Gesamttraum \mathbb{R}^n als

$$f_A := \begin{cases} f & \text{auf } A, \\ 0 & \text{auf } A^c. \end{cases}$$

Für eine auf ganz \mathbb{R}^n erklärte Funktion f gilt also $f_A = \chi_A f$. Die Funktion f heißt *μ -messbar auf A* , wenn sowohl A als auch f_A μ -messbar sind. Ihr Integral über A ist dann definiert als

$$\int_A f \, d\mu := \int_{\mathbb{R}^n} f_A \, d\mu.$$

Man überlegt sich, dass alle bisherigen Sätzen entsprechend auch hierfür gelten.

20.9

Parameterabhängige Integrale

Eine typische Anwendung des Satzes von Lebesgue betrifft parameterabhängige Integrale. Sei dazu I ein nichtentartetes Intervall und

$$f: I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad (t, x) \mapsto f(t, x)$$

eine Funktion mit der Eigenschaft, dass für jedes $t \in I$ die *partielle Funktion*

$$f_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_t(x) = f(t, x)$$

messbar ist. Der Parameter ist also t , und f_t bezeichnet hier nicht die partielle Ableitung nach t , sondern die Funktion zum fixierten Parameterwert t .

Satz Für ein $a \in I$ gelte

$$f_a =_\mu \lim_{t \rightarrow a} f_t.$$

Gibt es eine integrierbare Funktion g mit $|f_t| \leq_\mu g$ für alle $t \in I$, so sind auch alle f_t integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_a \, d\mu = \lim_{t \rightarrow a} \int_{\mathbb{R}^n} f_t \, d\mu. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Die Integrierbarkeit aller f_t folgt aus der Existenz einer integrierbaren Majorante g ₂₇. Ist (t_k) eine beliebige Folge in I mit $t_k \rightarrow a$, so gilt

$$f_a =_\mu \lim f_{t_k}, \quad |f_{t_k}| \leq g.$$

Mit dem Satz von Lebesgue ₂₈ folgt daher

$$I_\mu(f_a) = I_\mu(\lim f_{t_k}) = \lim I_\mu(f_{t_k}).$$

Da dies für jede solche Folge (t_k) gilt, folgt hieraus die Behauptung _{7.3}. ⟩⟩⟩

Korollar Sei $f_x = f(\cdot, x)$ für fast jedes $x \in \mathbb{R}^n$ stetig auf I . Gibt es eine integrierbare Funktion g mit $|f_t| \leq g$ für alle $t \in I$, so ist auch

$$F: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f_t \, d\mu$$

stetig auf I . \times

- 30 Satz** Es sei f_a für ein $a \in I$ integrierbar, und die partielle Ableitung $f' = \partial_t f$ existiere in jedem Punkt von $I \times \mathbb{R}^n$. Gibt es eine integrierbare Funktion g mit $|f'_t| \leq g$ für alle $t \in I$, so ist auch

$$F: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f_t \, d\mu$$

auf I differenzierbar, und es gilt

$$F'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f'_t \, d\mu, \quad t \in I. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung 8.10 und der Schranke für f' folgt für beliebige $t_k \neq t$ in I die Abschätzung

$$\left| \frac{f(t_k, x) - f(t, x)}{t_k - t} \right| \leq \sup_{s \in I} |f'(s, x)| \leq g(x).$$

Insbesondere ist

$$|f(t, x)| \leq |f(a, x)| + |t - a| g(x),$$

und damit f_t integrierbar für *alle* $t \in I$. Konvergiert nun (t_k) gegen t , so folgt aus der gleichmäßigen Schranke für die Differenzenquotienten und dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\begin{aligned} \lim \frac{F(t_k) - F(t)}{t_k - t} &= \lim \int \frac{f(t_k, x) - f(t, x)}{t_k - t} \, d\mu \\ &= \int \lim \frac{f(t_k, x) - f(t, x)}{t_k - t} \, d\mu = \int f'_t \, d\mu. \end{aligned}$$

Da dies für jede solche Folge (t_k) gilt, ist F differenzierbar, und F' ist durch das letzte Integral gegeben. ⟩⟩⟩

▶ A. Für $t > 0$ ist bekanntlich

$$\int_0^\infty e^{-tx} \, dx = \frac{1}{t}.$$

Auf jedem t -Intervall $[\alpha, \infty)$ mit $\alpha > 0$ besitzt die Funktion $x^n e^{-tx}$ für $n \geq 0$ die integrierbare Majorante $x^n e^{-\alpha x}$. Wir dürfen daher unter dem Integral nach t differenzieren und erhalten für die erste Ableitung

$$\int_0^\infty x e^{-tx} \, dx = \frac{1}{t^2},$$

und induktiv

$$\int_0^\infty x^n e^{-tx} \, dx = (-1)^n \partial_t^n \int_0^\infty e^{-tx} \, dx = (-1)^n \partial_t^n \frac{1}{t} = \frac{n!}{t^{n+1}}, \quad n \geq 0.$$

Mit $t = 1$ erhalten wir insbesondere

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} \, dx = n! .$$

B. *Ableitung der Fouriertransformation:* Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Die *Fouriertransformierte* von f ist, bis auf einen skalaren Faktor, die komplexwertige Funktion

$$\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-itx} \, dx.$$

Das Integral einer komplexwertigen Funktion wird hierbei durch die Integrale der Real- und Imaginärteile gebildet und hat, bis auf die Monotonie, dieselben Eigenschaften wie das reellwertige Integral. Insbesondere gilt auch die Dreiecksungleichung A_{-28} .

Wegen

$$|f(x)e^{-itx}| \leq |f(x)|, \quad x, t \in \mathbb{R},$$

ist $|f|$ eine konvergente Majorante des Integranden für alle t . Da dieser in t stetig ist, ist \hat{f} stetig auf \mathbb{R} .

Ist zusätzlich auch xf integrierbar, so hat die t -Ableitung des Integranden $|xf|$ als gleichmäßige integrierbare Majorante. Also ist \hat{f} differenzierbar und

$$\begin{aligned} D\hat{f}(t) &= \int_{\mathbb{R}} \partial_t(f(x)e^{-itx}) \, dx \\ &= -i \int_{\mathbb{R}} xf(x)e^{-itx} \, dx. \end{aligned}$$

Somit ist \hat{f} sogar stetig differenzierbar, und es gilt

$$D\hat{f} = -i(xf)^{\wedge}.$$

Mehr dazu im Kapitel über die Fouriertransformation. ◀

Sei also M μ -messbar. Wir können auch M als beschränkt annehmen. Dann ist χ_M also messbar und nichtnegativ, und nach Satz 22 gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine μ -summierbare Darstellung

$$\chi_M =_\mu u - v$$

mit $u, v \in \mathcal{U}^n(\mu)$ und $I_\mu(v) < \varepsilon$. Dann ist $A := \{u \geq 1\} \supset M$, und

$$\mu(A - M) \leq I_\mu(v) < \varepsilon.$$

Wähle nun eine monoton steigende Folge von Treppenfunktionen

$$\tau_k \nearrow v.$$

Jede Treppenfunktion ist auf endlich vielen Intervallen definiert, insgesamt haben wir also abzählbar viele Intervalle. Aufgrund der Regularität des Maßes μ können wir dann alle diese Intervalle durch größere offene Intervalle so ersetzen, dass der Gesamtzuwachs der Integrale über die τ_k kleiner als ε ausfällt. Die Vereinigung dieser Intervalle bildet dann die gesuchte offene Umgebung von M .

Aufgaben

- 1 Für eine Menge $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ sind folgende Aussagen äquivalent.
 - a. Λ ist diskret, also abgeschlossen ohne Häufungspunkte.
 - b. Jeder Punkt von Λ ist ein isolierter Punkt.
 - c. Für jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist $K \cap \Lambda$ endlich.
- 2 Beweisen sie den *Satz von Heine-Borel*_{10.10} im \mathbb{R}^n : *Jede offene Überdeckung einer kompakten Teilmenge des \mathbb{R}^n besitzt eine endliche Teilüberdeckung.* Verfahren sie dabei analog zum eindimensionalen Fall, indem sie ein hinreichend großes Intervall betrachten und sukzessive alle Seiten halbieren.
- 3 Jede offene Teilmenge des \mathbb{R}^n ist die disjunkte Vereinigung abzählbar vieler beschränkter Intervalle.
- 4 Eine Intervallfunktion μ ist genau dann additiv, wenn für je endlich viele disjunkte Intervalle $I_1, \dots, I_m \subset \mathcal{J}^n$ gilt:

$$I = \bigcup_{1 \leq k \leq m} I_k \in \mathcal{J}^n \Rightarrow \mu(I) = \sum_{1 \leq k \leq m} \mu(I_k).$$

Der Einfachheit halber kann man sich auf den Fall $n = 2$ beschränken.

- 5 Eine durch eine diskrete Masseverteilung m induzierte Intervallfunktion ist regulär.
- 6 Beweisen sie folgende Behauptungen:
 - a. Jede endliche, oder abzählbare Menge ist eine λ -Nullmenge.
 - b. Insbesondere ist \mathbb{Q} eine λ -Nullmenge in \mathbb{R} .
 - c. Jedes entartete Intervall ist eine λ -Nullmenge.
 - d. Jede Hyperebene ist eine λ -Nullmenge.
 - e. Der Graph einer stetigen Funktion $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine λ -Nullmenge in \mathbb{R}^{n+1} .
- 7 Die Dirichletfunktion $\delta = \chi_{\mathbb{Q}}$ ist λ -monoton approximierbar.
- 8 Sei μ ein Maß und N eine μ -Nullmenge. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ auch eine Überdeckung von N durch *offene* Intervalle I_1, I_2, \dots so, dass

$$\sum_{k \geq 1} \mu(I_k) < \varepsilon.$$

- 9 Seien $I, J \in \mathcal{J}^n$ mit $J \subset I$. Dann ist $I \setminus J$ die Vereinigung endlich vieler disjunkter Intervalle in \mathcal{J}^n .
- 10 Sei $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton steigend, und seien ϕ_+, ϕ_- die Funktionen der rechts- und linksseitigen Grenzwerte von ϕ in jedem Punkt. Definiere damit eine Intervallfunktion μ_ϕ wie auf Seite 577 durch

$$\mu_\phi([a, b]) := \phi_+(b) - \phi_-(a),$$

$$\mu_\phi([a, b)) := \phi_-(b) - \phi_-(a)$$

und so weiter. Zeigen sie, dass damit ein Maß auf \mathcal{J}^1 definiert wird.

- 11 Sei $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und nichtnegativ. Dann gilt

$$I_\mu(u) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) dt,$$

wobei auf der rechten Seite das uneigentliche Cauchyintegral gemeint ist. Das gilt auch für den Wert ∞ .

- 12 Seien $(f_k), (g_k)$ zwei monoton steigende Folgen beliebiger Funktionen auf \mathbb{R}^n . Dann sind auch

$$u_k = \min(f_k, g_k), \quad v_k = \max(f_k, g_k)$$

monoton steigende Funktionenfolgen.

- 13 Eine nichtnegative stetige Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist der *gleichmäßige* Limes einer steigenden Folge von nichtnegativen Treppenfunktionen. *Hinweis:* f ist auf $[a, b]$ gleichmäßig stetig.
- 14 a. Ist I ein beliebiges Intervall, so ist χ_I μ -approximierbar.
b. Ist $f \in C(\mathbb{R})$ nichtnegativ, so ist f λ -monoton approximierbar.
- 15 Sind $f, g \in \mathcal{U}^n(\mu)$ und $f \leq_\mu g$, so gilt auch $I_\mu(f) \leq I_\mu(g)$.
- 16 Sei $f, g \in \mathcal{U}^n(\mu)$. Gilt $\sup(I_\mu(f), I_\mu(g)) < \infty$, so gilt auch $I_\mu(\sup(f, g)) < \infty$.
- 17 Jede nichtnegative messbare Funktion f besitzt eine Darstellung

$$f =_\mu \sum_{k \geq 1} (u_k - v_k)$$

mit $\mathcal{U}^n(\mu)$ -Funktionen u_k, v_k so, dass $v_k \leq u_k$ und $I_\mu(u_k) < \infty$ für alle $k \geq 1$.

► *Lösung* Definiere den Abschneideoperator

$$T_k \phi = \chi_{[-k, k]^n} \min(\phi, k), \quad k \geq 0.$$

Ist $f = u - v$ eine zulässige Darstellung, so haben

$$u_k := T_k u - T_{k-1} u, \quad v_k = T_k v - T_{k-1} v$$

die geforderten Eigenschaften. ◀

- 18 Es seien $f, g \in \mathcal{M}^n(\mu)$. Ist f beschränkt und g integrierbar, so ist auch fg integrierbar, und es gilt

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} fg \, d\mu \right| \leq \sup_{\mathbb{R}^n} |f| \int_{\mathbb{R}^n} |g| \, d\mu.$$

- 19 Sei $f \in \mathcal{L}^n(\mu)$ mit $f > 0$ μ -fast überall. Dann gilt $\int_A f \, d\mu > 0$ für jede messbare Menge A mit $\mu(A) > 0$.
- 20 Man konstruiere eine Familie offener Intervalle $(I_k)_{k \geq 1}$ in $[0, 1]$ derart, dass $I = \bigcup_{k \geq 1} I_k$ dicht in $[0, 1]$ ist, aber $C = [0, 1] \setminus I$ positives Maß hat. Dann ist χ_C bezüglich λ summierbar, aber nicht monoton approximierbar.
- 21 Jede stetige Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist messbar.
- 22 Sind f und g μ -summierbar und $f \leq_\mu g$, so ist auch $I_\mu(f) \leq I_\mu(g)$.
- 23 Ist f μ -messbar, so ist $|f|$ μ -summierbar, und es gilt $I_\mu(|f|) = I_\mu(f_+) + I_\mu(f_-)$.

- 24 *Allgemeines Lemma von Fatou* Sei (f_k) eine beliebige Folge integrierbarer Funktionen. Existiert eine integrierbare Funktion g , so dass $f_k \leq g$ für alle k , so ist auch $\varphi = \sup f_k$ integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu \geq \limsup \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\mu.$$

Existiert eine integrierbare Funktion h , so dass $f_k \geq h$ für alle k , so ist auch $\psi = \inf f_k$ integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi \, d\mu \leq \liminf \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\mu.$$

- 25 *Allgemeiner Satz von Beppo Levi* Die Behauptung dieses Satzes 24 gilt allgemeiner für jede monoton steigende Folge (f_k) in $\mathcal{M}_s^n(\mu)$ mit $f = \lim_{\mu} f_k < \infty$ und $I_\mu(f_k) > -\infty$.
- 26 *Tschebyscheffsche Ungleichung* Für $f \in \mathcal{M}_s^n(\mu)$ mit $f \geq 0$ gilt

$$\mu(\{f \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu, \quad \alpha > 0.$$

- 27 *Elementare Transformationsformeln* Sei $f \in \mathcal{L}^n(\mu)$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(u - h) \, du = \int_{\mathbb{R}^n} f(u) \, du$$

für alle $h \in \mathbb{R}^n$ sowie

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(Au) \, du = |\det A| \int_{\mathbb{R}^n} f(u) \, du$$

für $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_n)$. *Hinweis:* Betrachte zuerst charakteristische Funktionen von Intervallen.

- 28 *Integral für komplexwertige Funktionen* Für eine komplexwertige Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ definiert man

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \Re f \, d\mu + i \int_{\mathbb{R}^n} \Im f \, d\mu.$$

- Es ist f integrierbar genau dann, wenn $\Re f$ und $\Im f$ integrierbar sind.
- Es ist f integrierbar genau dann, wenn $|f|$ integrierbar ist.
- Es gilt

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f| \, d\mu.$$

Hinweis: Wähle $\alpha > 0$ so, dass $e^{i\alpha} \int f \, d\mu > 0$.

- 29 *Gliedweise Integration von Reihen* Sei (f_k) eine Folge in $\mathcal{L}^n(\mu)$. Ist

$$\sum_{k \geq 0} \int_{\mathbb{R}^n} |f_k| \, d\mu < \infty,$$

so konvergiert $\sum_{k \geq 0} f_k$ μ -fast überall absolut gegen ein $f \in \mathcal{L}^n(\mu)$, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k \geq 0} f_k \, d\mu = \sum_{k \geq 0} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \, d\mu.$$

- 30 *Approximation messbarer Mengen* Sei $A \subset \mathbb{R}^n$ messbar mit $0 < \mu(A) < \infty$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine kompakte Menge $K \subset A$ und eine offene Menge $O \supset A$ mit

$$\mu(A) - \varepsilon < \mu(K) \leq \mu(A) \leq \mu(O) < \mu(A) + \varepsilon.$$

21

Integration im \mathbb{R}^n

Für Regelfunktionen stimmt das Lebesgueintegral mit dem Regelintegral überein. Im eindimensionalen Fall stehen uns daher die vertrauten Techniken zur Verfügung, um Integrale zu berechnen. Doch wie geht man in höheren Dimensionen vor?

Im Wesentlichen gibt es zwei Möglichkeiten. Die erste ist als Satz von Fubini bekannt. Er erlaubt es unter recht allgemeinen Voraussetzungen, ein n -dimensionales Integral als Hintereinanderausführung niederdimensionaler Integrale darzustellen und so im Prinzip auf n eindimensionale Integrale zurückzuführen.

Die zweite besteht darin, ein Integral durch Einführung geeigneter Koordinaten – wie zum Beispiel Polar- oder Kugelkoordinaten – zu vereinfachen. Die hierfür nötige n -dimensionale Transformationsformel ergibt sich allerdings, anders als im eindimensionalen Fall, nicht direkt aus einer Kettenregel. Vielmehr ist einiges Geschick erforderlich, um diese mit dem Satz von Fubini und partieller Integration herzuleiten.

Es gibt noch eine dritte Möglichkeit – die als Satz von Stokes bekannte Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes auf höhere Dimensionen. Diesen betrachten wir im nächsten Kapitel, da er einigen begrifflichen Aufwand erfordert.

21.1

Der Satz von Fubini

Wir betrachten das Problem, ein n -dimensionales Integral als Folge 1-dimensionaler Integrale darzustellen, die wir – zumindest im Prinzip – berechnen können. Die Grundidee ist das *Prinzip des Cavalieri*. Sei D eine abgeschlossene Menge in der (u, v) -Ebene. Jeder *u -Schnitt*

$$D_u = \{v : (u, v) \in D\}$$

ist eine abgeschlossene 1-dimensionale Menge mit 1-dimensionalem Maß

$$L(D_u) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{D_u} d\lambda_1.$$

Der Flächeninhalt von D sollte sich dann als 1-dimensionales Integral über diese Schnittlängen darstellen lassen, also

$$\lambda_2(D) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_D d\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}} L(D_u) d\lambda_1 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_D d\lambda_1 \right) d\lambda_1.$$

Für das Flächenmaß von Intervallen ist dies jedenfalls richtig, denn die Fläche eines 2-Intervalls ist das Produkt der Längen seiner Seiten. Damit gilt es ebenso für alle zulässigen 2-dimensionalen Mengen, denn diese lassen sich als disjunkte Vereinigung von 2-Intervallen darstellen. Somit sollte dies auch für alle ebenen Gebiete gelten, die sich gut durch zulässige Mengen approximieren lassen.

Der Satz von Fubini verallgemeinert diesen Gedanken auf Maße in beliebigen Dimensionen, die sich als Produktmaße darstellen lassen. Dazu betrachten wir jetzt den Raum

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s, \quad r, s \geq 1.$$

Das Maß auf diesem Raum ist gegeben als Produkt

$$\mu_n = \mu_r \times \mu_s$$

Abb 1

Zum Prinzip des Cavalieri

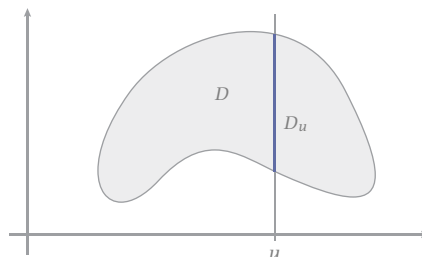
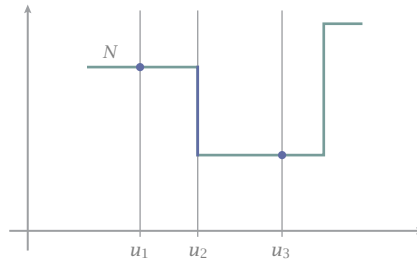


Abb 2

Nullmenge mit
verschiedenen
Schnitten



zweier Maße auf den Faktorräumen. Ziel ist, ein Integral bezüglich μ_n durch zwei Integrale bezüglich der Maße μ_r und μ_s darzustellen.

Eine Komplikation besteht darin, dass im Allgemeinen nicht alle Schnitte einer μ_n -Nullmenge auch μ_r - oder μ_s -Nullmengen sind, sondern auch positives Maß haben können. Die genaue Formulierung des Satzes ist daher etwas umständlich, auch wenn dies für seine Anwendung selten eine Rolle spielt.

Wir vereinbaren noch folgende Notationen. Ist eine Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = f(u, v)$$

gegeben, so sei ihr *u-Schnitt* die partielle Funktion¹

$$f_u : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto f_u(v) := f(u, v).$$

Ist diese Funktion μ_s -integrierbar für alle u außerhalb einer μ_r -Nullmenge in \mathbb{R}^r , so erhalten wir durch Integration über \mathbb{R}^s μ_r -fast überall erklärte Funktion

$$F : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(u) = \mu_r \int_{\mathbb{R}^s} f_u \, d\mu_s.$$

Die Frage ist, ob diese Funktion μ_r -integrierbar ist, und ob

$$\int_{\mathbb{R}^r} F \, d\mu_r = \int_{\mathbb{R}^r} \left(\int_{\mathbb{R}^s} f \, d\mu_s \right) d\mu_r = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_n.$$

Diese Frage beantworten wir zuerst für monoton approximierbare Funktionen.

- 1 **Satz von Tonelli** Sei $f \in \mathcal{U}^n(\mu_n)$. Dann ist

$$f_u \in_{\mu_r} \mathcal{U}^s(\mu_s), \quad F := \mu_r \int_{\mathbb{R}^s} f \, d\mu_s \in \mathcal{U}^r(\mu_r),$$

und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^r} F \, d\mu_r = \int_{\mathbb{R}^r} \left(\int_{\mathbb{R}^s} f \, d\mu_s \right) d\mu_r.$$

Dies gilt auch für den Fall unbeschränkter Integrale. ✕

¹ Partielle Ableitungen benötigen wir hier nicht, so dass keine Verwechslungsgefahr besteht.

■ Beweis des Satzes von Tonelli

Für den Beweis sei $\mathcal{U}^i = \mathcal{U}^i(\mu_i)$ für $i = n, r, s$. Da jedes Maß sich auf genau einen Raum bezieht, können wir auf deren Angabe in Integralen verzichten. — Der Beweis erfolgt nun in mehreren Schritten.

Schritt 1 *Der Satz von Tonelli gilt für die charakteristischen Funktionen beschränkter Intervalle.* ✕

⟨⟨⟨ Für $I = I_r \times I_s$ mit Intervallen $I_r \in \mathcal{J}^r$ und $I_s \in \mathcal{J}^s$ ist $f = \chi_I = \chi_{I_r} \chi_{I_s}$. Für jeden u -Schnitt gilt

$$f_u = \chi_{I,u} = \chi_{I_r}(u) \chi_{I_s} \in \mathcal{U}^s,$$

und Integration über \mathbb{R}^s ergibt

$$F = \int \chi_{I_r} \chi_{I_s} \, d\mu_s = \mu_s(I_s) \chi_{I_r} \in \mathcal{U}^r.$$

Aufgrund der Definition des Produktmaßes $\mu_n = \mu_r \times \mu_s$ gilt schließlich

$$\begin{aligned} \int F \, d\mu_r &= \mu_s(I_s) \int \chi_{I_r} \, d\mu_r \\ &= \mu_s(I_s) \mu_r(I_r) = \mu_n(I) = \int f \, d\mu_n. \end{aligned}$$

Damit ist für χ_I alles gezeigt. ⟩⟩⟩

Schritt 2 *Der Satz von Tonelli gilt für alle Treppenfunktionen.* ✕

⟨⟨⟨ Treppenfunktionen sind Linearkombinationen charakteristischer Funktionen von Intervallen. Daher genügt es zu zeigen, dass dieser Satz für eine Linearkombination $\alpha f + \beta g$ gilt, wenn er für Treppenfunktionen f und g gilt. Gilt nun der Satz von Tonelli für f und g , so gilt auch für jeden u -Schnitt

$$(\alpha f + \beta g)_u = \alpha f_u + \beta g_u \in \mathcal{T}^s,$$

und es ist

$$F = \int f \, d\mu_s \in \mathcal{T}^r, \quad G = \int g \, d\mu_s \in \mathcal{T}^r.$$

Also ist auch

$$\int (\alpha f + \beta g) \, d\mu_s = \alpha \int f \, d\mu_s + \beta \int g \, d\mu_s = \alpha F + \beta G \in \mathcal{T}^r.$$

Und schließlich gilt dann auch, mit dem Satz von Tonelli für f und g ,

$$\begin{aligned} \int (\alpha f + \beta g) \, d\mu_n &= \alpha \int f \, d\mu_n + \beta \int g \, d\mu_n \\ &= \alpha \int F \, d\mu_r + \beta \int G \, d\mu_r = \int (\alpha F + \beta G) \, d\mu_r. \end{aligned}$$

Das war zu zeigen. ⟩⟩⟩

Hilfssatz Sei N eine μ_n -Nullmenge. Dann ist μ_r -fast jeder u -Schnitt

$$N_u = \{v : (u, v) \in N\} \subset \mathbb{R}^s$$

eine μ_s -Nullmenge. \times

⟨⟨⟨ Zu der μ_n -Nullmenge N existiert 20.6 eine Folge (I_k) von n -Intervallen, so dass jeder Punkt in N von unendlich vielen Intervallen überdeckt wird und

$$\sum_{k \geq 1} \mu_n(I_k) < \infty.$$

Die u -Schnitte $(I_{k,u})$ bilden dann eine Überdeckung von N_u durch s -Intervalle, wobei jeder Punkt von N_u unendlich oft überdeckt wird. Für das Maß dieser u -Schnitte gilt

$$\sum_{k \geq 1} \mu_s(I_{k,u}) = \sum_{k \geq 1} \int \chi_{I_{k,u}} d\mu_s = \lim_{m \rightarrow \infty} \psi_m(u)$$

mit

$$\psi_m = \sum_{1 \leq k \leq m} \int \chi_{I_k} d\mu_s.$$

Dies ist eine monoton steigende Folge von Funktionen in \mathcal{T}^r mit beschränkter Integralfolge, denn

$$\int \psi_m d\mu_r = \sum_{1 \leq k \leq m} \int \left(\int \chi_{I_k} d\mu_s \right) d\mu_r \leq \sum_{k \geq 1} \mu_n(I_k) < \infty.$$

Mit Lemma A 20.13 gilt also $\lim \psi_m <_{\mu_r} \infty$, und damit auch

$$\sum_{k \geq 1} \mu_s(I_{k,u}) <_{\mu} \infty.$$

Also 20.6 ist N_u für μ_r -fast alle u eine μ_s -Nullmenge. $\rangle\rangle\rangle$

Schritt 3 Der Satz gilt für alle monoton approximierbaren Funktionen. \times

⟨⟨⟨ Sei $f \in \mathcal{U}^n$ und (f_k) eine Folge von Treppenfunktionen mit

$$f_k \nearrow_{\mu_n} f, \quad I_{\mu_n}(f_k) \nearrow I_{\mu_n}(f).$$

Die Folge konvergiert also außerhalb einer μ_n -Nullmenge monoton gegen f . Aufgrund des Hilfssatzes gibt es dann eine μ_r -Nullmenge N_r in \mathbb{R}^r , so dass auch

$$f_{k,u} \nearrow_{\mu_s} f_u, \quad u \notin N_r.$$

Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz 20.18 folgt

$$f_u \in \mathcal{U}^s, \quad \int f_{k,u} d\mu_s \nearrow \int f_u d\mu_s, \quad u \notin N_r.$$

Damit gilt also

$$F_k = \int f_k \, d\mu_s \nearrow_{\mu_r} F = \int f \, d\mu_s,$$

wobei die F_k eine Folge in \mathcal{T}^r bilden. Wiederum mit dem Satz von der monotonen Konvergenz ist also $F \in \mathcal{U}^r$, und mit Schritt 2 ist

$$\begin{aligned} \int F \, d\mu_r &= \lim \int F_k \, d\mu_r \\ &= \lim \int f_k \, d\mu_n = \int f \, d\mu_n. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für jede Funktion $f \in \mathcal{U}^n$ bewiesen. \gggg

■ Der Satz von Fubini

Nun betrachten wir den Fall beliebiger messbarer Funktionen. Wie beim Übergang vom Satz von Beppo Levi zum Satz von Lebesgue setzen wir voraus, dass die betrachtete Funktion nicht nur messbar, sondern integrierbar ist. Diese Annahme ist unverzichtbar.

2 **Satz von Fubini** Sei $f \in \mathcal{L}^n(\mu_n)$. Dann ist

$$f_u \in_{\mu_r} \mathcal{L}^s(\mu_s), \quad F :=_{\mu_r} \int_{\mathbb{R}^s} f \, d\mu_s \in \mathcal{L}^r(\mu_r),$$

und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^r} F \, d\mu_r = \int_{\mathbb{R}^r} \left(\int_{\mathbb{R}^s} f \, d\mu_s \right) d\mu_r. \quad \times$$

\llll Sei $f = g - h$ eine zulässige Darstellung von f durch monoton approximierbare Funktionen. Für g und h gilt somit der Satz von Tonelli, wobei nach Voraussetzung alle auftretenden Integrale endlich sind. Die Behauptung für f ergibt sich hieraus mit der Linearität des Integrals. \gggg

In klassischer Notation für Volumenmaße sagt dieser Satz Folgendes aus. Ist $f = f(x) = f(u, v)$ integrierbar, so ist der u -Schnitt $f(u, \cdot)$ für fast jedes u eine integrierbare Funktion von v . Dessen Integral bezüglich v definiert fast überall eine integrierbare Funktion F von u , und für deren Integral gilt

$$\int_{\mathbb{R}^r} F(u) \, du = \int_{\mathbb{R}^r} \left(\int_{\mathbb{R}^s} f(u, v) \, dv \right) du = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx.$$

Aus Symmetriegründen können wir die Rollen von u und v vertauschen und erhalten dementsprechend

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^s} \left(\int_{\mathbb{R}^r} f(u, v) \, du \right) dv.$$

Dabei bezeichnen du , dv , dx die Volumenmaße auf \mathbb{R}^r , \mathbb{R}^s respektive \mathbb{R}^n .

In der Regel lässt man die Klammern hierbei weg und schreibt kürzer

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^s} \int_{\mathbb{R}^r} f(u, v) \, du \, dv = \int_{\mathbb{R}^r} \int_{\mathbb{R}^s} f(u, v) \, dv \, du.$$

Dies ist »von innen nach außen« zu lesen. Beim letzten Integral zum Beispiel wird der Integrand zuerst bezüglich v über \mathbb{R}^s integriert, und das Ergebnis anschließend bezüglich u über \mathbb{R}^r . Dies ist etwas ganz anderes als das Integral über \mathbb{R}^n auf der linken Seite!

Typischerweise werden die Sätze von Tonelli und Fubini gemeinsam angewendet, um erst die Integrierbarkeit einer Funktion festzustellen und dann deren Integral durch iterierte Integrale darzustellen.

3 Satz von Tonelli-Fubini Sei $f \in \mathcal{M}^n(\lambda)$. Existiert eines der Integrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, dx, \quad \int_{\mathbb{R}^s} \int_{\mathbb{R}^r} |f(u, v)| \, du \, dv, \quad \int_{\mathbb{R}^r} \int_{\mathbb{R}^s} |f(u, v)| \, dv \, du$$

und ist endlich, so auch jedes andere, und alle sind gleich. In diesem Fall ist f integrierbar, und es gilt der Satz von Fubini $_2$. ✕

««« Ist das erste Integral endlich, so ist f integrierbar. Dann ist der Satz von Fubini auf f und $|f|$ anwendbar, und wir sind fertig.

Sei jetzt zum Beispiel das letzte Integral endlich. Die abgeschnittenen Funktionen $\phi_k = \min(|f|, k\chi_{[-k,k]^n})$ sind integrierbar, und mit Fubini gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k \, dx &= \int_{\mathbb{R}^r} \int_{\mathbb{R}^s} \phi_k(u, v) \, dv \, du \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^r} \int_{\mathbb{R}^s} |f(u, v)| \, dv \, du < \infty. \end{aligned}$$

Da dies eine gleichmäßige Schranke für alle k darstellt, ist auch $|f| = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k$ integrierbar, und wir können wie zuvor argumentieren. »»»

■ Beispiele

4 ▶ A. Sei \mathbb{D} die abgeschlossene Einheitskreisscheibe und $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist definitionsgemäß

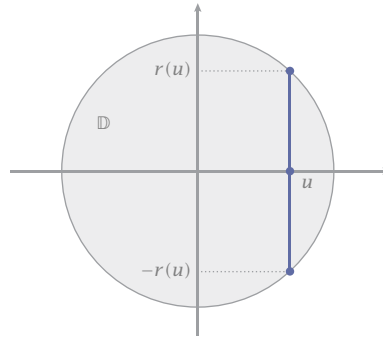
$$\int_{\mathbb{D}} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^2} f \chi_{\mathbb{D}} \, d\lambda.$$

Da $\chi_{\mathbb{D}}(u, v) = 1$ für $|v| \leq r(u) := \sqrt{1 - u^2}$ und 0 sonst, erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} f \, d\lambda &= \int_{\mathbb{R}^2} f \chi_{\mathbb{D}} \, d\lambda = \int_{[-1,1]} \left(\int_{[-1,1]} (f \chi_{\mathbb{D}}) \, dv \right) du \\ &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-r(u)}^{r(u)} f(u, v) \, dv \right) du. \end{aligned}$$

Abb 3

Integration über die
Einheitskreisscheibe



B. Mit $f(u, v) = \sqrt{1 - u^2 - v^2}$ erhalten wir insbesondere die Hälfte des Volumens V der Einheitskugel. Es ist also

$$\frac{V}{2} = \int_{-1}^1 \left(\int_{-r(u)}^{r(u)} \sqrt{1 - u^2 - v^2} \, dv \right) du.$$

Die Substitution $v = r(u) \sin t$ mit $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ ergibt mit einer kurzen Rechnung

$$\begin{aligned} \frac{V}{2} &= \int_{-1}^1 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2(u) \cos^2 t \, dt \right) du \\ &= \int_{-1}^1 r^2(u) \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt \right) du \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 (1 - u^2) \, du = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Etwas einfacher wird diese Rechnung später mit Polarkoordinaten ₁₅. ◀

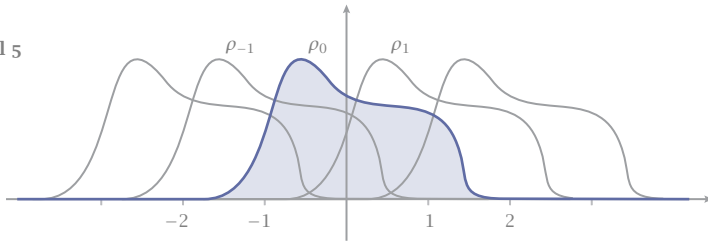
21.2

Zerlegungen der Eins

Um die Transformationsformel für n -dimensionale Integrale wie auch später das Integral für Differenzialformen auf Mannigfaltigkeiten zu definieren, benötigen wir als technisches Hilfsmittel *Zerlegungen der Eins*. Diese erlauben es in vielen Fällen, eine globale Identität auf lokale Identitäten zurückzuführen.

Abb 4

Zum Beispiel 5



Definition Eine *Zerlegung der Eins* auf einer nichtleeren Menge M im \mathbb{R}^n ist eine Familie \mathcal{T} von C^∞ -Funktionen $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger mit folgenden Eigenschaften:

(z-1) Für alle $\sigma \in \mathcal{T}$ gilt $0 \leq \sigma \leq 1$.

(z-2) Zu jedem Punkt in M existiert eine Umgebung U , so dass die U -Familie

$$\mathcal{T}_U := \{\sigma \in \mathcal{T} : \text{supp } \sigma \cap U \neq \emptyset\}$$

endlich ist.

(z-3) Für jeden Punkt $x \in M$ gilt

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{T}} \sigma(x) = 1. \quad \times$$

Für (z-2) sagt man auch, eine Zerlegung der Eins ist *lokal endlich*. Daher ist auch die Summe in (z-3) lokal endlich, und das Problem der Konvergenz und Regularität der Reihe stellt sich nicht.

Eine Zerlegung der Eins auf \mathbb{R}^n ist auch eine solche auf jeder Teilmenge M von \mathbb{R}^n . Das folgende Beispiel zeigt daher die Existenz solcher Zerlegungen für beliebige Mengen.

- 5 ▶ *Zerlegung der Eins auf \mathbb{R}^n* Wähle irgendeine nichtnegative C^∞ -Funktion ρ_0 mit der Eigenschaft, dass

$$\rho_0|_{B_1} > 0, \quad \rho_0|_{B_2^c} = 0.$$

Für $k \in \mathbb{Z}^n$ sei $\rho_k = \rho_0(\cdot - k)$ die um k verschobene Funktion ρ_0 . Dann nehmen auf jeder beschränkten Menge nur endlich viele ρ_k positive Werte an, und die Funktion

$$\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \rho(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \rho_k(x)$$

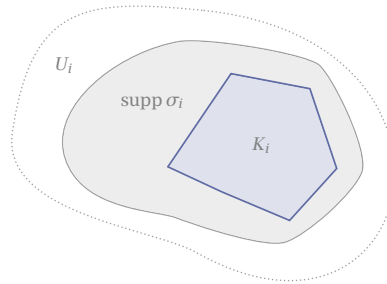
ist wohldefiniert, positiv und differenzierbar. Die normalisierten Funktionen

$$\sigma_k = \frac{\rho_k}{\rho}, \quad k \in \mathbb{Z}^n$$

bilden dann eine Zerlegung der Eins auf \mathbb{R}^n . ◀

Abb 5

Zum ersten Beweisschritt



Meistens benötigt man jedoch nicht irgendeine Zerlegung, sondern eine, die einer vorgegebenen offenen Überdeckung einer Menge *untergeordnet* ist.

- 6 **Satz** Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ nicht leer und \mathcal{O} eine offene Überdeckung von M . Dann existiert eine \mathcal{O} *untergeordnete Zerlegung der Eins* \mathcal{T} auf M . Das heißt, für jedes $\sigma \in \mathcal{T}$ existiert ein $U \in \mathcal{O}$, so dass $\text{supp } \sigma \subset U$. \times

««« Der Beweis erfolgt in vier Schritten.

1. *Schritt: M ist kompakt* Dann wird M bereits durch endlich viele offene Mengen U_1, \dots, U_n in \mathcal{O} überdeckt, also $M \subset U := U_1 \cup \dots \cup U_n$. Dazu – siehe folgendes Lemma 7 – existieren kompakte Mengen $K_i \subset U_i$ derart, dass deren Inneres K_i° die Menge M ebenfalls überdeckt, also

$$M \subset K_1^\circ \cup \dots \cup K_n^\circ \subset U$$

gilt. Dazu existieren nichtnegative C^∞ -Funktionen ρ_i derart, dass

$$\rho_i|_{K_i} > 0, \quad \rho_i|_{U_i^c} \equiv 0.$$

Somit gilt $\rho_1 + \dots + \rho_n > 0$ auf der kompakten Menge $K_0 := K_1 \cup \dots \cup K_n$ und damit auch auf einer offenen Umgebung $U_0 \supset K_0$. Dazu existiert eine C^∞ -Funktion ρ_0 mit

$$\rho_0|_{K_0} \equiv 0, \quad \rho_0|_{U_0^c} > 0.$$

Dann gilt $\rho := \rho_0 + \dots + \rho_n > 0$ auf ganz \mathbb{R}^n , $\rho|_{K_0} = \rho_1 + \dots + \rho_n$, und die Funktionen

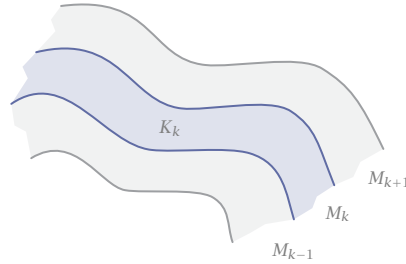
$$\sigma_i := \frac{\rho_i}{\rho}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

bilden eine U_1, \dots, U_n und damit \mathcal{O} untergeordnete Zerlegung der Eins auf K_0 und damit auch auf M .

Abb 6

Die kompakte Menge

$$K_k = M_k \setminus M_{k-1}^\circ$$



2. Schritt: M ist Vereinigung kompakter Mengen M_k Es genügt, eine steigende Folge $(M_k)_{k \geq 1}$ kompakter Mengen mit

$$M = \bigcup_{k \geq 1} M_k, \quad M_k \subset M_{k+1}^\circ,$$

zu betrachten. Definiere für $k \geq 1$ die offenen ›Ringmengen‹ $\Omega_k := M_{k+1}^\circ \setminus M_{k-2}$ und die darin enthaltenen kompakten ›Ringmengen‹

$$K_k = M_k \setminus M_{k-1}^\circ \subset \Omega_k.$$

wobei $M_{-1} := M_0 := \emptyset$. Dann bildet die Familie

$$\mathcal{O}_k := \{U \cap \Omega_k : U \in \mathcal{O}\}$$

eine offene Überdeckung von K_k . Gemäß dem ersten Schritt existiert auf K_k eine \mathcal{O}_k untergeordnete Zerlegung der Eins \mathcal{S}_k , die aus endlich vielen Funktionen besteht, welche außerdem sämtlich auf M_{k-2} verschwinden. Innerhalb der Gesamtfamilie $\mathcal{S} := \bigcup_{k \geq 1} \mathcal{S}_k$ verschwinden somit auf jeder Menge M_k nur endlich viele Funktionen nicht identisch. Die Summe

$$\rho_s = \sum_{\rho \in \mathcal{S}} \rho$$

ist also in jedem Punkt von M endlich. Setzen wir

$$\sigma := \frac{\rho}{\rho_s}, \quad \rho \in \mathcal{S},$$

so bilden diese Funktionen eine \mathcal{O} untergeordnete Zerlegung der Eins auf M .

3. Schritt: M ist offen Die Mengen

$$M_k := \{x \in M : |x| \leq k \wedge \text{dist}(x, M^c) \geq 1/k\}, \quad k \geq 1,$$

bilden eine Ausschöpfung von M durch kompakte Mengen mit $M_k \subset M_{k+1}^\circ$. Also können wir den zweiten Schritt anwenden.

4. Schritt: *M ist beliebig* Die Menge $\Omega := \bigcup_{U \in \mathcal{O}} U$ ist offen und enthält M . Eine Zerlegung der Eins auf Ω gemäß dem vorangehenden Schritt ist dann auch eine Zerlegung der Eins auf M . \gggg

Für den Beweis des ersten Schritts benötigen wir noch folgendes

- 7 **Lemma** *Zu jeder endlichen offenen Überdeckung U_1, \dots, U_n einer kompakten Menge M existieren kompakte Mengen $K_i \subset U_i$, deren Inneres ebenfalls M überdecken. \times*

\llll Wir konstruieren diese Mengen induktiv wie folgt. Angenommen, wir haben bereits kompakte Mengen K_1, \dots, K_{i-1} , so dass

$$K_1^\circ \cup \dots \cup K_{i-1}^\circ \cup U_i \cup U_{i+1} \cup \dots \cup U_n \supset M.$$

Für $i = 1$ entspricht dies der Ausgangssituation, wo wir noch keine kompakte Menge konstruiert haben. Betrachte dann

$$C_i := M \setminus (K_1^\circ \cup \dots \cup K_{i-1}^\circ \cup U_{i+1} \cup \dots \cup U_n).$$

Diese Menge ist abgeschlossen und in M enthalten, also kompakt. Es gilt auch $C_i \subset U_i$. Dann existiert auch eine kompakte Menge K_i derart, dass

$$C_i \subset K_i^\circ \subset K_i \subset U_i.$$

Damit erhalten wir

$$K_1^\circ \cup \dots \cup K_{i-1}^\circ \cup K_i^\circ \cup U_{i+1} \cup \dots \cup U_n \supset M,$$

und wir sind fertig. \gggg

Bemerkungen a. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\mathcal{O} = \{\Omega\}$, so kann eine diesbezügliche Zerlegung der Eins trotzdem nicht aus endlich vielen Funktionen bestehen A-8.

b. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und \mathcal{O} die Familie aller offenen Teilmengen von Ω . Eine \mathcal{O} untergeordnete Zerlegung der Eins \mathcal{T} besteht dann aus abzählbar vielen nichttrivialen glatten Funktionen σ derart, dass

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{T}} \sigma(x) = \chi_\Omega. \quad \rightarrow$$

21.3

Die Transformationsformel

Ein wesentliches Hilfsmittel der eindimensionalen Integrationstheorie ist die Substitutionsregel. Ist φ stetig differenzierbar auf dem Intervall $I = [a, b]$ und f stetig auf dem Bildintervall $\varphi(I)$, so gilt bekanntlich^{10,18}

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = \int_a^b f(\varphi(s))\varphi'(s) ds.$$

Dies ergibt sich unmittelbar aus dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung und der Kettenregel. Hierbei ist es nicht einmal erforderlich, dass φ die Orientierung des Intervalls I erhält oder I bijektiv auf $\varphi(I)$ abbildet.

In dieser Allgemeinheit werden wir die Substitutionsregel *nicht* für das höherdimensionale Integral formulieren. Wir setzen zumindest voraus, dass φ *bijektiv* ist. Auf einem Intervall ist φ dann notwendigerweise monoton. Die beiden möglichen Fälle der Substitutionsregel – entweder positive oder negative Ableitung – lassen sich dann zusammenfassen zu

$$\int_{\varphi(I)} f(t) dt = \int_I f(\varphi(s)) |\varphi'(s)| ds.$$

Hierbei wird das linke Integral immer vom linken zum rechten Endpunkt des Intervalls $\varphi(I)$ gebildet, unabhängig davon, wie I auf $\varphi(I)$ abgebildet wird.

In dieser Form verallgemeinern wir die Substitutionsregel auf höhere Dimensionen. Man beachte, dass sie sich nur auf das Volumenmaß λ bezieht.

- 8 **Transformationsformel** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und φ ein Diffeomorphismus von Ω auf die offene Menge $\varphi(\Omega)$. Ist f auf $\varphi(\Omega)$ integrierbar, so gilt

$$\int_{\varphi(\Omega)} f d\lambda = \int_{\Omega} (f \circ \varphi) |\det D\varphi| d\lambda.$$

Insbesondere existiert das rechts stehende Integral. ✕

Ist umgekehrt $(f \circ \varphi) |\det D\varphi|$ auf Ω integrierbar, so folgt durch Anwendung der Formel mit φ^{-1} umgekehrt auch die Integrierbarkeit von f auf $\varphi(\Omega)$. Beide Annahmen sind also äquivalent.

Wir beweisen die Transformationsformel für den Fall, dass die Determinante von φ überall positiv ist. Der andere Fall lässt sich mithilfe der Reflexion einer Koordinate auf diesen zurückführen^{A-11}.

Der erste Schritt besteht in der Reduktion auf ein lokales Problem mithilfe einer Zerlegung der Eins und einer Adaption der Transformation φ gemäß dem folgenden Lemma, das wir im Anschluss beweisen werden.

- 9 **Lokalisierungslemma** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein lokaler Diffeomorphismus mit positiver Jacobideterminante. Dann existiert zu jedem Punkt in Ω eine Umgebung $U \subset \Omega$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ derart, dass

$$\psi|_U = \varphi, \quad \psi(U) \cap \psi(U^c) = \emptyset,$$

sowie $\psi|_{I^c} = \text{id}$ für ein hinreichend großes Intervall I . \times

Das Bild jeder dieser offenen Mengen U unter dem Diffeomorphismus φ ist eine offene Menge in $\varphi(\Omega)$, und ihre Gesamtheit bildet eine offene Überdeckung von $\varphi(\Omega)$. Sei \mathcal{T} eine ihr untergeordnete Zerlegung der Eins \mathfrak{e} . Dann gilt

$$f = \sum_{\sigma \in \mathcal{T}} \sigma f.$$

Gilt nun für jedes σ die lokalisierte Transformationsformel

$$\int_{\varphi(\Omega)} (\sigma f) \, d\lambda = \int_{\Omega} (\sigma f) \circ \varphi \det D\varphi \, d\lambda.$$

so folgt durch Summieren über $\sigma \in \mathcal{T}$ daraus die allgemeine Formel 8.

Die lokalisierte Formel schreiben wir noch weiter um. Aufgrund der Wahl von \mathcal{T} ist der Träger eines jeden $\sigma \in \mathcal{T}$ in einer offenen Menge $\varphi(U)$ enthalten, auf die das Lokalisierungslemma zutrifft. Somit ist einerseits

$$\int_{\varphi(\Omega)} \sigma f \, d\lambda = \int_{\varphi(U)} \sigma f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma f \, d\lambda.$$

Andererseits gilt mit der Abbildung ψ des Lokalisierungslemmas

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\sigma f) \circ \varphi \det D\varphi \, d\lambda &= \int_U (\sigma f) \circ \varphi \det D\varphi \, d\lambda \\ &= \int_U (\sigma f) \circ \psi \det D\psi \, d\lambda, \end{aligned}$$

da ψ auf U mit φ übereinstimmt. Da $\psi(U^c)$ und $\psi(U)$ disjunkt sind und σf auf $\psi(U^c)$ verschwindet, gilt weiter

$$\int_U (\sigma f) \circ \psi \det D\psi \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} (\sigma f) \circ \psi \det D\psi \, d\lambda.$$

Die allgemeine Transformationsformel reduziert sich damit auf folgendem Satz, wobei wir wieder φ statt ψ schreiben.

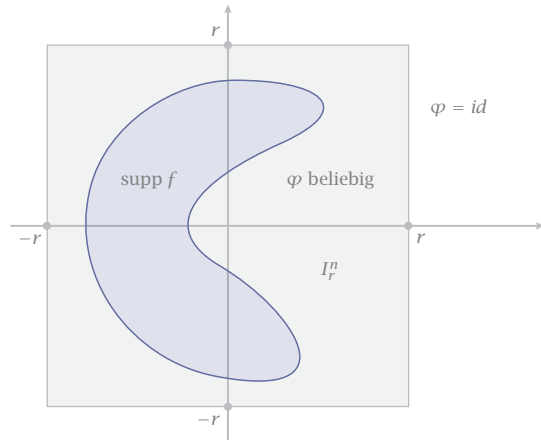
- 10 **Lokale Transformationsformel** Sei $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $\varphi = \text{id}$ außerhalb eines Intervalls I . Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \varphi) \det D\varphi \, d\lambda$$

für jede Funktion $f \in \mathcal{L}^n(\lambda)$ mit kompaktem Träger. \times

Abb 7

Zum Beweis der lokalen Transformationsformel



««« Wir können $f \in C^1$ und $\varphi \in C^2$ annehmen. Durch einen Approximationsprozess folgt dann die Behauptung für den allgemeinen Fall.

Definiere $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = \int_{-\infty}^{x_1} f(t, x_2, \dots, x_n) dt.$$

Wegen der Kompaktheit des Trägers von f ist diese Funktion in jedem Punkt wohldefiniert, und es gilt $\partial_1 g = f$. Somit ist g ebenfalls stetig differenzierbar. Also ist

$$\nabla(g \circ \varphi) = \sum_{i=1}^n (\partial_i g \circ \varphi) \nabla \varphi_i,$$

wobei $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)^\top$. Aufgrund der Multilinearität und Antisymmetrie der Determinante ist weiter

$$\begin{aligned} \det(\nabla(g \circ \varphi), \nabla \varphi_2, \dots, \nabla \varphi_n) \\ &= \det((\partial_1 g \circ \varphi) \nabla \varphi_1, \nabla \varphi_2, \dots, \nabla \varphi_n) \\ &= (\partial_1 g \circ \varphi) \det D\varphi. \end{aligned}$$

Wählen wir nun das Intervall $I^n = I_r^n$ mit $I_r = [-r, r]$ so groß, dass $f \equiv 0$ und $\varphi = id$ auf dem Komplement von I^n , so gilt mit $f = \partial_1 g$ also

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \varphi) \det D\varphi d\lambda &= \int_{I^n} (f \circ \varphi) \det D\varphi d\lambda \\ &= \int_{I^n} (\partial_1 g \circ \varphi) \det D\varphi d\lambda \\ &= \int_{I^n} \det(\nabla(g \circ \varphi), \nabla \varphi_2, \dots, \nabla \varphi_n) d\lambda. \end{aligned}$$

Wir entwickeln nun die letzte Determinante nach der ersten Spalte und bezeichnen die zugehörigen Unterdeterminanten einschließlich ihres Vorzeichenfaktors mit M_i . Mit Fubini und partieller Integration wird das letzte Integral zu

$$\begin{aligned} & \int_{I^n} \sum_{i=1}^n \partial_i(g \circ \varphi) M_i \, d\lambda \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{I_r^{n-1}} \int_{I_r} \partial_i(g \circ \varphi) M_i \, d\lambda_1 \, d\lambda_{n-1} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{I_r^{n-1}} (g \circ \varphi) M_i \Big|_{-r}^r \, d\lambda_{n-1} - \int_{I_r^{n-1}} \int_{I_r} (g \circ \varphi) \partial_i M_i \, d\lambda_1 \, d\lambda_{n-1} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{I_r^{n-1}} (g \circ \varphi) M_i \Big|_{-r}^r \, d\lambda_{n-1} - \int_{I^n} (g \circ \varphi) (\partial_1 M_1 + \dots + \partial_n M_n) \, d\lambda. \end{aligned}$$

Für eine C^2 -Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ gilt aber A_{-12}

$$\partial_1 M_1 + \dots + \partial_n M_n \equiv 0,$$

das letzte Integral verschwindet also. Da $\varphi = id$ außerhalb von I^n , verschwinden auch die Unterdeterminanten M_2, \dots, M_n auf dem Rand von I^n , während

$$(g \circ \varphi) M_1 \Big|_{-r}^r = g \Big|_{-r}^r = g(r, \cdot).$$

Zusammen genommen erhalten wir also mit Fubini und der Definition von g

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \varphi) \det D\varphi \, d\lambda &= \int_{I_r^{n-1}} g(r, \cdot) \, d\lambda_{n-1} \\ &= \int_{I_r^{n-1}} \int_{I_r} f \, d\lambda_1 \, d\lambda_{n-1} = \int_{I^n} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda. \end{aligned}$$

Genau das wollten wir beweisen. \gggg

■ Beweis des Lokalisierungslemmas

Es fehlt noch der Beweis des Lokalisierungslemmas. Dazu benötigen wir folgendes Ergebnis aus der linearen Algebra.

- 11 **Deformationslemma** *Jede reelle Matrix A mit positiver Determinante kann so in die Identitätsmatrix deformiert werden, dass alle Determinanten entlang dieser Deformation zwischen $\det A$ und 1 liegen.* \times

\llll Betrachte die erste Spalte von A . Falls $a_{11} \leq 0$, so gibt es immer eine zweite Spalte in A , so dass die ersten Komponenten dieser beiden Spalten nicht gleichzeitig Null sind. Durch eine starre Drehung in der von beiden Spalten

aufgespannten Ebene können wir erreichen, dass $a_{11} > 0$, während sich die Determinante der Matrix nicht ändert.

Ist nun $a_{11} > 0$, so können wir durch eine kontinuierliche Version des Gaußschen Eliminationsprozesses erreichen, dass sämtliche übrigen Komponenten der ersten Spalte und Zeile verschwinden. Auch hierbei ändert sich die Determinante der Matrix nicht.

Verfahren wir nun induktiv, so deformieren wir A in eine Diagonalmatrix mit positiven Komponenten, ohne die Determinante zu beeinflussen. Deformation der Diagonalkomponenten zu 1 führt dann zum Ziel.

Jeder einzelne Deformationsschritt kann durch eine stetige Kurve von Matrizen beschrieben werden. Durch entsprechende Parametrisierung wird die gesamte Familie auch glatt. \gggg

\llll *Beweis des Lokalisierungslemmas* Es genügt, einen lokalen Diffeomorphismus φ um 0 mit $\varphi(0) = 0$ zu betrachten. Mit $\Lambda = D\varphi(0)$ ist dann

$$\varphi = \Lambda + \hat{\varphi}, \quad \hat{\varphi} = o(\|x\|).$$

Wegen der Umkehrbarkeit von Λ gilt außerdem

$$m \|x\| \leq \|\Lambda x\| \leq m^{-1} \|x\|, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

mit einer hinreichend kleinen Konstanten $m > 0$.

Im ersten Schritt eliminieren wir die Nichtlinearität $\hat{\varphi}$ außerhalb einer kleinen Umgebung von 0. Wähle dazu eine beliebige *Abschneidefunktion* σ , also eine C^∞ -Funktion $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ mit $\sigma|_{B_1} \equiv 1$ und $\sigma|_{B_2^c} \equiv 0$, und setze

$$\chi = \Lambda + \sigma_\varepsilon \hat{\varphi}, \quad \sigma_\varepsilon = \sigma \circ \varepsilon^{-1}.$$

Für $0 < \alpha < \varepsilon$ und ε hinreichend klein gilt dann

$$|\chi(x)| \leq m^{-1}\alpha + o(\alpha) \leq 2m^{-1}\alpha, \quad |x| \leq \alpha,$$

während

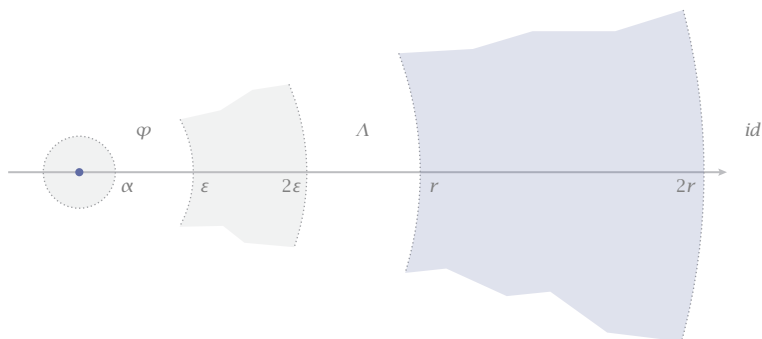
$$|\chi(x)| \geq m\varepsilon - o(\varepsilon) \geq m\varepsilon/2, \quad \varepsilon < |x| < 2\varepsilon.$$

Für $\alpha < \varepsilon m^2/4$ ist $2m^{-1}\alpha < m\varepsilon/2$, und die Mengen $\chi(B_\alpha)$ und $\chi(B_\varepsilon^c)$ sind disjunkt. Da außerdem $\chi|_{B_\varepsilon} = \varphi$ injektiv ist, gilt sogar

$$\chi(B_\alpha) \cap \chi(B_\alpha^c) = \emptyset.$$

Damit ist der erste Schritt abgeschlossen.

Abb 8 Zum Beweis des Lokalisierungslemmas



Im zweiten Schritt deformieren wir Λ außerhalb einer großen Kugel zur Identität. Sei dazu $\Lambda(t)$ mit $0 \leq t \leq 1$ eine Deformation $\mathbb{1}_1$ von Λ mit $\Lambda(0) = \Lambda$ und $\Lambda(1) = id$. Für

$$L_r = \Lambda \circ \sigma_r, \quad L_r(x) = \Lambda(\sigma_r(x))x,$$

gilt dann

$$L_r|_{B_r} = \Lambda(0) = \Lambda, \quad L_r|_{B_{2r}^c} = \Lambda(1) = id.$$

Setzen wir also insgesamt

$$\psi = L_r + \sigma_\epsilon \hat{\varphi},$$

so ist

$$\psi|_{B_\epsilon} = \chi|_{B_\epsilon} = \varphi, \quad \psi|_{B_r} = \chi, \quad \psi|_{B_{2r}^c} = id.$$

Da außerdem $\Lambda(t)$ für $0 \leq t \leq 1$ regulär ist, ist $\psi(B_r^c)$ für hinreichend große r disjunkt von B_α . Somit gilt auch noch

$$\psi(B_\alpha) \cap \psi(B_\alpha^c) = \emptyset.$$

Somit erfüllt ψ alle Behauptungen des Lokalisierungslemmas mit $U = B_\alpha$. \gggg

21.4

Der Satz von Sard

In der Transformationsformel können wir tatsächlich auf die Bedingung verzichten, dass die Jacobideterminante nirgends verschwindet. Es genügt, dass die Abbildung stetig differenzierbar und bijektiv ist. Dies gründet sich auf dem nächsten Satz, der auch in anderen Zusammenhängen nützlich ist.

12 **Satz von Sard** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und

$$S = \{\det D\varphi = 0\} \subset \Omega.$$

Dann ist $\varphi(S)$ eine λ -Nullmenge. Mit anderen Worten, die Menge der kritischen Werte einer stetig differenzierbaren Abbildung ist eine Nullmenge. \times

► A. Ist φ ein Diffeomorphismus, so ist $S = \emptyset$ und damit auch $\varphi(S) = \emptyset$ eine Nullmenge.

B. Ist φ eine singuläre lineare Abbildung, so ist $S = \Omega$. Aber $\varphi(S)$ ist enthalten in einer Hyperebene und deshalb eine λ -Nullmenge.

C. Ist φ eine konstante Abbildung, so ist ebenfalls $S = \Omega$. Aber $\varphi(S)$ ist eine 1-Punkt-Menge und damit eine λ -Nullmenge. \blacktriangleleft

Während die kritischen Werte einer C^1 -Abbildung eine Nullmenge bilden, kann ihr gesamter Definitionsbereich aus kritischen Punkten bestehen.

⟨⟨⟨⟨ *Beweis des Satzes von Sard* Es genügt, die Aussage für ein kompaktes n -Intervall I in Ω zu beweisen. Die allgemeine Behauptung folgt dann durch Überdecken einer beliebigen offenen Menge durch abzählbar viele solche Intervalle und der Bemerkung, dass die abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist. Auf einem solchen kompakten Intervall I ist $\|D\varphi\|$ beschränkt und gleichmäßig stetig _{7.32}. Es gibt also ein $M > 0$ derart, dass

$$|\varphi(u) - \varphi(v)| \leq M |u - v|, \quad u, v \in I,$$

und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass

$$\|D\varphi(u) - D\varphi(v)\| < \varepsilon, \quad |u - v| < \delta, \quad u, v \in I.$$

Wir unterteilen nun jede Seite von I in m gleich lange Intervalle und wählen dabei m so groß, dass die Seitenlängen der m^n entstehenden Teilintervalle kleiner als δ sind. Angenommen, in einem dieser kleinen Intervalle J liegt ein kritischer Punkt v von φ . Dann ist $\det D\varphi(v) = 0$, also $D\varphi(v)$ eine lineare Abbildung in eine Hyperebene H . Mit dem Lemma von Hadamard _{14.15} gilt dann

$$\varphi(u) = \varphi(v) + D\varphi(v)(u - v) + E(u, v)(u - v)$$

mit

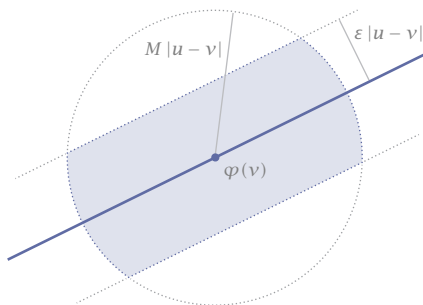
$$E(u, v) = \int_0^1 (D\varphi(v + t(u - v)) - D\varphi(v)) dt$$

und

$$\|E(u, v)\| < \|D\varphi(u) - D\varphi(v)\| < \varepsilon, \quad |u - v| < \delta.$$

Abb 9

Zum Satz von Sard



Das bedeutet, dass sich $\varphi(u)$ für $u \in J$ von der Hyperebene H um weniger als

$$|E(u, v)(u - v)| \leq \varepsilon |u - v|$$

entfernt. Gleichzeitig liegen alle Bilder in einer Kugel um u mit Radius kleiner als $M|u - v|$. Somit liegt das gesamte Bild $\varphi(J)$ in einem Zylinder mit Höhe $2\varepsilon|v - u|$ und Basisradius $M|v - u|$. Für das Volumen gilt also

$$\lambda(\varphi(J)) \leq c\varepsilon |u - v|^n \leq c\varepsilon \lambda(J).$$

Summieren wir über alle solchen kleinen Intervalle J , die einen kritischen Punkt enthalten, so folgt

$$\lambda(\varphi(S)) \leq c\varepsilon \lambda(I).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, muss $\varphi(S)$ eine Nullmenge sein. \gggg

Daraus ergibt sich folgende

- 13 **Allgemeine Transformationsformel** Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und φ eine bijektive, stetig differenzierbare Abbildung von Ω auf die offene Menge $\varphi(\Omega)$. Ist f auf $\varphi(\Omega)$ integrierbar, so gilt

$$\int_{\varphi(\Omega)} f \, d\lambda = \int_{\Omega} (f \circ \varphi) |\det D\varphi| \, d\lambda. \quad \times$$

\llll Auf der abgeschlossenen Menge $\Omega_0 = \{\det D\varphi = 0\} \subset \Omega$ verschwindet das rechts stehende Integral, da dort der Integrand verschwindet. Das links stehende Integral über $\varphi(\Omega_0)$ verschwindet ebenfalls aufgrund des Satzes von Sard₁₂. Auf dem offenen Komplement $\Omega \setminus \Omega_0$ ist φ ein Diffeomorphismus, und Anwendung der Transformationsformel₈ ergibt die Behauptung. \gggg

Bemerkung Tatsächlich längst sich auch die Bedingung der Bijektivität abschwächen. Es genügt, dass der *Abbildungsgrad* von $\varphi: \Omega \rightarrow \varphi(\Omega)$ gerade 1 ist. \rightarrow

21.5 Anwendungen der Transformationsformel

■ Der Zwischenwertsatz im \mathbb{R}^n

An der lokalen Transformationsformel $_{10}$ fällt auf, dass die Abbildung φ weder als injektiv noch als surjektiv vorausgesetzt wird. Die Surjektivität lässt sich jedoch leicht zeigen. Dazu betrachten wir der Einfachheit halber die abgeschlossene Einheitskugel $\mathbb{B} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$.

Lemma Sei $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $\varphi|_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}} = id$. Dann ist φ surjektiv. \times

⟨⟨⟨⟨ Angenommen, es gibt einen Punkt p ohne Urbild. Dann ist $\|p\| < 1$, da andernfalls p ein Urbild hat. Da $\varphi(\mathbb{B})$ abgeschlossen ist und p nicht enthält, existiert auch eine offene Umgebung U um p , die nicht im Bild von φ liegt. Wähle eine stetige Funktion f mit Träger in U und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda \neq 0.$$

Aufgrund der lokalen Transformationsformel $_{10}$ ist aber

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \varphi) \det D\varphi \, d\lambda = 0,$$

da nach Konstruktion $f \circ \varphi \equiv 0$. Somit erhalten wir einen Widerspruch. $\rangle\rangle\rangle\rangle$

14 **Zwischenwertsatz im \mathbb{R}^n** Sei $\varphi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig mit $\varphi|_{\partial\mathbb{B}} = id$. Dann nimmt φ jeden Wert in \mathbb{B} an. \times

⟨⟨⟨⟨ Setze φ außerhalb von \mathbb{B} stetig durch id fort und approximiere diese Abbildung durch stetig differenzierbare Abbildungen ψ mit $\psi|_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}} = id$. Aufgrund des letzten Lemmas sind diese Abbildungen surjektiv, überdecken also auch \mathbb{B} . Diese Eigenschaft bleibt im Grenzübergang $\psi \rightarrow \varphi$ erhalten. $\rangle\rangle\rangle\rangle$

■ Der Brouwersche Fixpunktsatz

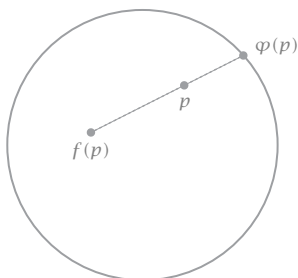
Neben dem Banachschen Fixpunktsatz ist dies einer der fundamentalen Fixpunktsätze der Analysis.

Brouwerscher Fixpunktsatz Jede stetige Selbstabbildung der abgeschlossenen Einheitskugel \mathbb{B} hat mindestens einen Fixpunkt. \times

Über die Bildmenge $\varphi(\mathbb{B})$ wird nichts angenommen, außer dass sie in \mathbb{B} liegt. Zum Beispiel kann φ eine konstante Abbildung sein mit Bildpunkt in \mathbb{B} . Diese hat offensichtlich einen Fixpunkt.

Abb 10

Konstruktion der
Abbildung φ



««« Angenommen, es gibt eine solche Abbildung ohne Fixpunkt. Dann können wir eine Abbildung

$$\varphi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}, \quad p \mapsto \varphi(p)$$

definieren, die jedem Punkt $p \in \mathbb{B}$ den Schnittpunkt des Halbstrahls von $f(p)$ durch p mit der Einheitssphäre zuordnet – siehe Abbildung 10. Da f keinen Fixpunkt hat, ist dieser Strahl und damit der Bildpunkt für jedes $p \in \mathbb{B}$ wohldefiniert und definiert eine stetige Abbildung. Offensichtlich gilt

$$\varphi(\mathbb{B}) \subset \partial\mathbb{B}, \quad \varphi|_{\partial\mathbb{B}} = id.$$

Das ist aber aufgrund des Zwischenwertsatzes ₁₄ nicht möglich. »»»

■ Polarkoordinaten

Diese sind definiert durch _{18.1}

$$\chi : \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Sie bilden $D = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$ diffeomorph auf die Ebene abzüglich der Halbgeraden $[0, \infty)$ ab. Da diese bezüglich des Flächenmaßes eine Nullmenge bildet, fällt dies für das Integral über \mathbb{R}^2 nicht ins Gewicht. Dasselbe gilt für den Rand von D . Wegen $\det D\chi = r$ gilt für jede auf \mathbb{R}^2 integrierbare Funktion f deshalb

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, dx \, dy &= \int_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, dr \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, dr \, d\varphi. \end{aligned}$$

Hierbei halten wir uns an die Vereinbarung, dass Mehrfachintegrale »von innen nach außen« zu lesen sind.

- 15 ▶ Polarkoordinaten bieten sich natürlich vor allem bei rotationssymmetrischen Funktionen an. Zum Beispiel wird

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r e^{-r^2} dr d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^\infty r e^{-r^2} dr \\ &= -\pi e^{-r^2} \Big|_0^\infty = \pi. \end{aligned}$$

Andererseits ist aufgrund des Satzes von Fubini

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= e^{-x^2} \int_{-\infty}^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} dy \right) dx \\ &= \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} dy \right) = \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Dieses Ergebnis ist mit eindimensionaler Argumentation nur recht aufwändig zu erreichen. ◀

- ▶ *Volumen der Einheitskugel* ₄ Mit Polarkoordinaten ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{V}{2} &= \int_{\mathbb{D}} \sqrt{1-u^2-v^2} d\lambda = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \sqrt{1-r^2} dr d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^1 r \sqrt{1-r^2} dr = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Das Volumen einer Kugel vom Radius r ist dementsprechend $4\pi r^3/3$. ◀

■ Zylinderkoordinaten

Diese sind definiert durch

$$\chi: \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \zeta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ \zeta \end{pmatrix}$$

und bilden $D = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$ diffeomorph auf den \mathbb{R}^3 abzüglich der Halbebene $[0, \infty) \times \{0\} \times \mathbb{R}$ ab. Diese bildet bezüglich des Volumenmaßes eine Nullmenge und fällt für das Integral über \mathbb{R}^3 nicht ins Gewicht. Dasselbe gilt für

den Rand von D . Wegen $\det D\chi = r$ gilt für deshalb

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, \zeta) r \, dr \, d\varphi \, d\zeta. \end{aligned}$$

■ Kugelkoordinaten

Diese sind definiert durch 18.1

$$\chi: \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

mit $0 < r < \infty$, $0 < \varphi < 2\pi$ und $0 < \theta < \pi$. Mit der Jacobideterminante

$$\det D\chi = r^2 \sin \theta$$

gilt für jede auf \mathbb{R}^3 integrierbare Funktion f deshalb

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r \cos \varphi \sin \theta, \dots, r \cos \theta) r^2 \sin \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta. \end{aligned}$$

► **Volumen der Einheitskugel** Auf $D = (0, 1) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ parametrisieren Kugelkoordinaten die dreidimensionale Einheitskugel B bis auf eine Nullmenge. Für deren Volumen V erhalten wir demnach mit Fubini, wie zuvor,

$$\begin{aligned} V = \int_B d\lambda &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 r^2 \, dr \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

► **Gravitationspotential einer Kugel** Ein kompakter, dreidimensionaler Körper K mit stetiger Dichtefunktion $m: K \rightarrow \mathbb{R}$ erzeugt, bis auf einen Normierungsfaktor, in einem Punkt p das Gravitationspotential

$$u(p) = \int_K \frac{m(q)}{\|q - p\|} \, dq.$$

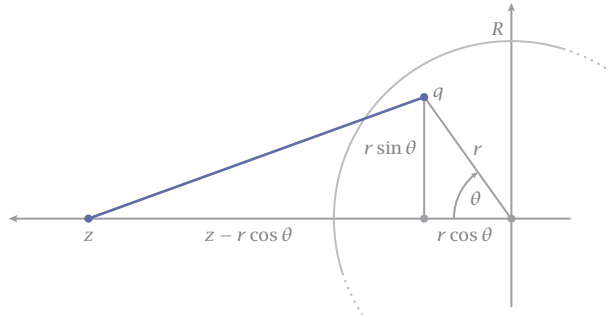
Wir betrachten den Fall einer Kugel $K = \{\|q\| \leq R\}$ mit einer rotationssymmetrischen Dichtefunktion $m = m(r)$. Aus Symmetriegründen genügt es hier, einen Punkt $p = (0, 0, z)$ zu betrachten. Bezüglich Kugelkoordinaten in K ist dann

$$\|q - p\|^2 = z^2 - 2zr \cos \theta + r^2,$$

wie man Abbildung 11 entnimmt. Somit gilt

Abb 11

Zum Potential einer
Kugel



$$\begin{aligned} u(p) &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{m(r)r^2 \sin \theta}{\sqrt{z^2 - 2zr \cos \theta + r^2}} dr d\varphi d\theta \\ &= 2\pi \int_0^R \left\{ \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\sqrt{z^2 - 2zr \cos \theta + r^2}} d\theta \right\} m(r)r^2 dr. \end{aligned}$$

Mithilfe der Substitution $-\cos \theta = t$ wird das innere Integral zu

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{z^2 + 2zrt + r^2}} = \frac{1}{zr} \sqrt{z^2 + 2zrt + r^2} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{z}.$$

Also gilt

$$u(p) = \frac{2\pi}{z} \int_0^R m(r)r^2 dr.$$

Eine Rechnung wie im vorangehenden Beispiel zeigt aber, dass

$$2\pi \int_0^R m(r)r^2 dr = M$$

gerade die Gesamtmasse der Kugel K darstellt. Also gilt

$$u(p) = \frac{M}{\|p\|}.$$

Das Potential der Kugel verhält sich also gerade so, als wäre die gesamte Masse im Mittelpunkt konzentriert. ◀

Aufgaben

- 1 Für $m, n \geq 1$ sei

$$a_{mn} = \begin{cases} +1, & n = m, \\ -1, & n = m + 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} = 1.$$

Im Satz von Fubini kann also auf die Voraussetzung der Integrierbarkeit nicht verzichtet werden.

- 2 Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(u, v) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sgn}(uv)}{u^2 + v^2}, & (u, v) \neq (0, 0), \\ 0 & , (u, v) = (0, 0). \end{cases}$$

Dann ist

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(u, v) \, du \, dv = 0 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(u, v) \, dv \, du.$$

Trotzdem ist f nicht integrierbar.

- 3 Beweisen sie die elementaren Transformationsformeln $A_{20.27}$ mit dem Satz von Fubini und der Substitutionsregel für Regelintegrale.
- 4 Ist $f: [a, b]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so gilt

$$\int_a^b \int_u^b f(u, v) \, dv \, du = \int_a^b \int_a^v f(u, v) \, du \, dv.$$

- 5 Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion. Beweisen sie das Lemma von Schwarz,

$$(f_x)_y = (f_y)_x,$$

mithilfe des Satzes von Fubini. *Hinweis:* Nehmen sie an, dass $(f_{xy} - f_{yx})(u) > 0$ in einem Punkt u .

- 6 Sind I, J n -Intervalle, so ist χ mit $\chi(u, v) = \chi_I(u - v)\chi_J(v)$ die charakteristische Funktionen eines messbaren Menge A in \mathbb{R}^{n+n} .
- 7 Ist \mathcal{T} eine Zerlegung der Eins auf M und $K \subset M$ kompakt, so ist die Menge $\mathcal{T}_K = \{\sigma \in \mathcal{T} : \operatorname{supp} \sigma \cap K \neq \emptyset\}$ endlich.
- 8 Sei \mathcal{T} eine Zerlegung der Eins auf einer Menge M in \mathbb{R}^n .
- a. Ist M die Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen, so ist \mathcal{T} höchstens abzählbar, wenn man identisch verschwindende Funktionen nicht mitzählt.
- b. Ist M offen und \mathcal{T} der trivialen Überdeckung $\mathcal{O} = \{M\}$ untergeordnet, so ist \mathcal{T} abzählbar *unendlich* – also *nicht* endlich.

- 9 Warum ist es im ersten Schritt der Konstruktion einer untergeordneten Zerlegung der Eins ϵ erforderlich, die Funktion τ zu addieren? *Hinweis:* Betrachte den Fall einer Überdeckung durch eine einzige Menge.
- 10 Sei $f: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ stetig und

$$A_f = \{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

die Fläche unter dem Graphen von f . Dann ist A_f messbar und

$$\lambda(A_f) = \int_a^b f.$$

► *Lösung* A_f ist abgeschlossen, also messbar. Mit Fubini erhält man mit $m = \sup_{[a,b]} f$ dann

$$\begin{aligned} \lambda(A_f) &= \int_{[a,b] \times [0,m]} \chi_{A_f} = \int_{[a,b]} \left(\int_{[0,m]} \chi_{A_f}(x, y) \, dy \right) dx \\ &= \int_{[a,b]} f(x) \, dx = \int_a^b f. \end{aligned}$$

- 11 a. Sei $\rho = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ die Reflexion in der ersten Koordinate. Mit den Voraussetzungen der Transformationsformel A-8 gilt dann

$$\int_{\Omega} (f \circ \varphi) |\det D\varphi| \, d\lambda = - \int_{\rho(\Omega)} (f \circ \varphi \circ \rho) |\det D\varphi| \, d\lambda.$$

b. Gilt $\det D\varphi < 0$ auf Ω , so folgt

$$\int_{\Omega} (f \circ \varphi) |\det D\varphi| \, d\lambda = \int_{\rho(\Omega)} (f \circ (\varphi \circ \rho)) \det D(\varphi \circ \rho) \, d\lambda = \int_{\varphi(\Omega)} f \, d\lambda$$

mit der bereits bewiesenen Transformationsformel für positive Determinanten.

- 12 a. Man verifiziere $\partial_1 M_1 + \dots + \partial_n M_n \equiv 0$ direkt für $n = 2$ und $n = 3$.
b. Mit den Bezeichnungen des Beweises der lokalen Transformationsformel 10 und der üblichen Produktregel gilt

$$\partial_1 M_1 + \dots + \partial_n M_n = \det(\nabla, \nabla \varphi_2, \dots, \nabla \varphi_n) = \sum_{k=2}^n \det_k(\nabla, \nabla \varphi_2, \dots, \nabla \varphi_n),$$

wobei \det_k bedeutet, dass die Elemente von ∇ nur auf die Elemente der k -ten Spalte anzuwenden ist.

c. Man zeige, dass jede dieser \det_k -Determinanten verschwindet.

- 13 Bestimmen sie das Volumen des Körpers K , der bei Rotation einer abgeschlossenen Menge A im positiven Quadranten der xz -Ebene um die z -Achse entsteht.
- 14 Sei $E_{a,b}$ das durch Rotation von $\{(x, y) : x^2/a^2 + y^2/b^2 \leq 1\}$ um die x -Achse entstehende Ellipsoid, wobei $a \geq b > 0$. Dann gilt

$$|E_{a,b}| = 4\pi ab \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} \, dt, \quad k = a^{-1} \sqrt{a^2 - b^2}.$$

- 15 Man bestimme das Volumen des *Vivianischen Körpers*, der als Schnittmenge der Einheitskugel mit dem Zylinder $Z = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq x\}$ entsteht.

- 16 *Erste Guldinsche Regel* Der Körper R_M entstehe durch Rotation einer abgeschlossenen, in der rechten Halbebene liegenden abgeschlossenen Menge M um die y -Achse. Dann gilt für sein Volumen

$$|R_M| = 2\pi \int_M x \, d\lambda_2 = 2\pi r |M|$$

mit

$$r = \frac{1}{|M|} \int_M x \, d\lambda_2,$$

dem Abstand des Schwerpunktes von M von der y -Achse. — *Das Volumen eines Rotationskörpers ist also das Produkt aus dem Flächeninhalt eines Meridianschnitts und der Weglänge, den sein Schwerpunkt bei einer Umdrehung zurücklegt.*

22

Der Fundamentalsatz im \mathbb{R}^n

Für eindimensionale Integrale gilt bekanntlich

$$\int_a^b f' = f \Big|_a^b.$$

Man erhält das Integral der Ableitung einer Funktion f über ein *Intervall* also durch Auswertung der Funktion f selbst über dessen *Rand*. Sucht man nach etwas Ähnlichem in höheren Dimensionen, so steht man vor der Aufgabe, Integrale über Kurven, Flächen und allgemeinere Mannigfaltigkeiten zu betrachten.

Dabei stellt sich nicht nur das Problem, *wie* man integrieren soll, sondern auch *was*. Es ist möglich, Funktionen oder Vektorfelder über Mannigfaltigkeiten zu integrieren, doch erfordert dies in jedem einzelnen Fall eine eigene Herangehensweise. Statt dessen hat sich als einheitlicher Zugang der Kalkül der *Differenzialformen* etabliert. Dies sind die *natürlichen* Objekte, die über Mannigfaltigkeiten integriert werden.

Beim ersten Kennenlernen wirkt dieser Kalkül wie eine Ansammlung abstrakter und willkürlicher Definitionen. Der Lohn dieser Mühen ist aber ein einheitlicher Zugang zu den fundamentalen Integralsätzen von Green, Gauß und Stokes in zwei und drei Dimensionen. Sie alle sind unmittelbare Folgen eines allgemeinen Satzes über den Zusammenhang zwischen Integralen über Mannigfaltigkeiten und deren Rand, der ebenfalls nach Stokes benannt ist und besagt, dass

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Der klassische Fundamentalsatz in dieser Schreibweise lautet

$$\int_{[a,b]} df = \int_{\partial[a,b]} f.$$

22.1

Etwas multilineare Algebra

Für die Integration entlang Kurven betrachteten wir 1-Formen $\alpha: V \hookrightarrow V^*$, die jedem Punkt im Definitionsbereich in V eine Linearform im Dualraum V^* zuordnet. Dieses Konzept erweitern wir jetzt auf *alternierende* k -Formen.

■ **Alternierende Formen**

Definition Sei $k \geq 1$. Eine *alternierende k -Form* auf einem reellen Vektorraum V ist eine k -lineare Abbildung

$$\omega: V^k \rightarrow \mathbb{R},$$

die bei Vertauschung von je zwei Argumenten das Vorzeichen wechselt. Der Raum aller solchen Abbildungen wird mit $\Lambda^k V$ bezeichnet. Für $k = 0$ sei $\Lambda^0 V := \mathbb{R}$. \times

Für beliebige $1 \leq i < j \leq k$ gilt also

$$\omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) = -\omega(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots).$$

Diese Eigenschaft bleibt unter Linearkombinationen erhalten, $\Lambda^k V$ bildet also einen linearen Vektorraum. Sie ist allerdings erst für $k \geq 2$ relevant, denn für $0 \leq k \leq 1$ gibt es keine Argumente, die man vertauschen könnte.

- ▶ A. Jedes Element in $\Lambda^0 V$ ist eine reelle Zahl.
- B. Jedes Element des Dualraums V^* ist eine alternierende 1-Form. Es ist also $V^* = \Lambda^1 V$.
- C. Die *Determinante* $\det: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$, aufgefasst als n -lineare Form in den Spalten einer $n \times n$ -Matrix, ist eine alternierende n -Form. \blacktriangleleft

Lemma Für eine k -lineare Form ω sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i) Die Form ω ist alternierend.
- (ii) Es gilt $\omega(v_1, \dots, v_k) = 0$, wenn zwei Argumente gleich sind.
- (iii) Es gilt $\omega(v_1, \dots, v_k) = 0$, wenn die Argumente linear abhängig sind.
- (iv) Für jede Permutation τ von $(1, \dots, k)$ gilt

$$\omega(v_{\tau_1}, \dots, v_{\tau_k}) = \operatorname{sgn}(\tau) \omega(v_1, \dots, v_k),$$

wobei $\operatorname{sgn}(\tau)$ das *Signum* der Permutation τ bezeichnet. \times

⟳ (i) \Rightarrow (ii) Sind zwei Argumente gleich, so ist nach Vertauschung

$$\omega(\dots, v, \dots, v, \dots) = -\omega(\dots, v, \dots, v, \dots)$$

und damit Null.

(ii) \Rightarrow (iii) Ist zum Beispiel $v_1 = \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$, so folgt aus der Multilinearität von ω und (ii)

$$\omega(v_1, \dots, v_k) = \sum_{2 \leq i \leq k} \alpha_i \omega(v_i, v_2, \dots, v_n) = 0.$$

(iii) \Rightarrow (i) Es gilt dann

$$\omega(\dots, v_i + v_j, \dots, v_i + v_j, \dots) = 0.$$

Von den vier aufgrund der Linearität resultierenden Summanden verschwinden die beiden mit gleichen Argumenten, und es bleibt

$$\omega(\dots, v_i, \dots, v_j, \dots) + \omega(\dots, v_j, \dots, v_i, \dots) = 0.$$

Also ist ω alternierend.

(i) \Leftrightarrow (iv) Dies folgt aus der Definition von $\text{sgn}(\tau)$. \gggg

Aufgrund dieses Lemmas ist auf einem Vektorraum der Dimension n jede k -Form mit $k > n$ identisch Null. Es ist also

$$\Lambda^k V = \{0\}, \quad k > \dim V.$$

■ Dachprodukt

Wir benötigen ein Produkt, dass aus einer k -Form und einer l -Form eine $k + l$ -Form bildet. Im Prinzip ist dies kein Problem, da beide Formen zusammen linear in $k + l$ Argumenten sind. Wir müssen aber sicherstellen, dass das Ergebnis auch in allen Argumenten alternierend ist.

Definition Ist $\omega \in \Lambda^k V$ und $\eta \in \Lambda^l V$, so heißt die durch

$$(\omega \wedge \eta)(v_1, \dots, v_{k+l}) := \frac{1}{k!l!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_{k+l}} \text{sgn}(\tau) \omega(v_{\tau_1}, \dots, v_{\tau_k}) \eta(v_{\tau_{k+1}}, \dots, v_{\tau_{k+l}})$$

definierte alternierende $k + l$ -Form das **äußere Produkt** oder **Dachprodukt** von ω und η , wobei \mathcal{P}_{k+l} die Gruppe aller Permutationen der Indizes $1, \dots, k + l$ bezeichnet. \times

Die Form $\omega \wedge \eta$ ist linear in jedem Argument, da es ω und η sind. Die Multiplikation mit $\text{sgn}(\tau)$ bewirkt, dass alle Permutationen *derselben Zerlegung*

$$\{1, \dots, k + l\} = \{\tau_1, \dots, \tau_k\} \cup \{\tau_{k+1}, \dots, \tau_{k+l}\}$$

dasselbe Vorzeichen erhalten. Deren Anzahl wiederum ist $k!l!$, denn so viele Permutationen der ersten und der zweiten Teilmenge unter sich gibt es. Die Division durch $k!l!$ normalisiert also die Anzahl identischer Terme.

Die Wiederholung identischer Terme kann man dadurch vermeiden, dass man jeweils nur eine bestimmte Anordnung der Indizes einbezieht. Am einfachsten ist die Forderung nach einer monoton steigenden Anordnung. Daher kann das Dachprodukt auch geschrieben werden als

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \eta)(v_1, \dots, v_{k+l}) \\ = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k,l}} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}) \eta(v_{\sigma_{k+1}}, \dots, v_{\sigma_{k+l}}), \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{P}_{k,l}$ nur diejenigen Permutationen in \mathcal{P}_{k+l} umfasst, wo die ersten k und die letzten l Elemente monoton steigend angeordnet sind. An dieser Darstellung kann man nun auch ablesen, dass dieses Dachprodukt eine *alternierende* $l+l$ -Form darstellt.

► A. Für $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*$ und $v_1, v_2 \in V$ ist

$$\begin{aligned} (\varphi_1 \wedge \varphi_2)(v_1, v_2) \\ = \varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2) - \varphi_1(v_2)\varphi_2(v_1) \\ = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \varphi_2(v_1) \\ \varphi_1(v_2) & \varphi_2(v_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

B. Für $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in V^*$ und $v_1, v_2, v_3 \in V$ ist

$$\begin{aligned} (\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3)(v_1, v_2, v_3) \\ = \varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2)\varphi_3(v_3) + \dots + \varphi_1(v_3)\varphi_2(v_1)\varphi_3(v_2) \\ - \varphi_1(v_1)\varphi_2(v_3)\varphi_3(v_2) - \dots - \varphi_1(v_2)\varphi_1(v_1)\varphi_3(v_3) \\ = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \varphi_2(v_1) & \varphi_3(v_1) \\ \varphi_1(v_2) & \varphi_2(v_2) & \varphi_3(v_2) \\ \varphi_1(v_3) & \varphi_2(v_3) & \varphi_3(v_3) \end{pmatrix}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

1 **Lemma** Das Dachprodukt ist assoziativ, linear in beiden Faktoren, und antikommutativ. Genauer gilt

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega, \quad \omega \in \Lambda^k V, \quad \eta \in \Lambda^l V. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Linearität und Antikommutativität folgen direkt aus der Definition. Um die Assoziativität zu verifizieren, bemerken wir, dass

$$\begin{aligned} ((\omega \wedge \eta) \wedge \upsilon)(v_1, \dots, v_{k+l+m}) \\ = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k+l,m}} \operatorname{sgn}(\sigma) (\omega \wedge \eta)(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_{k+l}}) \upsilon(v_{\sigma_{k+l+1}}, \dots, v_{\sigma_{k+l+m}}) \\ = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k,l,m}} \operatorname{sgn}(\sigma) \omega(v_{\sigma_1}, \dots, v_{\sigma_k}) \eta(v_{\sigma_{k+1}}, \dots, v_{\sigma_{k+l}}) \upsilon(v_{\sigma_{k+l+1}}, \dots, v_{\sigma_{k+l+m}}). \end{aligned}$$

Genau zu derselben Darstellung gelangen wir aber für

$$(\omega \wedge (\eta \wedge \upsilon))(v_1, \dots, v_{k+l+m}).$$

Also sind beide Ausdrücke gleich. \gggg

► A. Für zwei 0-Formen $a, b \in \Lambda^0 V$ ist

$$a \wedge b = ab$$

das übliche Produkt reeller Zahlen.

B. Für $a \in \Lambda^0 V = \mathbb{R}$ und $\omega \in \Lambda^k V$ ist

$$a \wedge \omega = a\omega \in \Lambda^k V$$

das übliche Produkt von ω mit dem Skalar a .

C. Für 1-Formen gilt

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 = -\varphi_2 \wedge \varphi_1,$$

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 = \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_1 = \varphi_3 \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2.$$

D. Für jede k -Form ω mit $k \geq 1$ gilt A-1

$$\omega \wedge \omega = 0. \quad \lll$$

■ Basisdarstellungen

Eine allgemeine k -lineare Form ω auf V ist bereits eindeutig durch ihre Werte auf allen möglichen Kombinationen von Vektoren einer Basis v_1, \dots, v_n von V definiert, also durch ihre *Komponenten*

$$\omega_{\mu_1 \dots \mu_k} := \omega(v_{\mu_1}, \dots, v_{\mu_k}). \quad 1 \leq \mu_1, \dots, \mu_k \leq n.$$

Ist die Form *alternierend*, so reicht bereits die Kenntnis der Komponenten mit

$$1 \leq \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k \leq n,$$

denn alle anderen ergeben sich hieraus durch Permutationen der Indizes oder sind Null. Die zugehörigen Basisvektoren sind die Dachprodukte $\varphi_{\mu_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{\mu_k}$ gebildet aus der zu v_1, \dots, v_n dualen Basis $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ von V^* . Denn es ist ja

$$\varphi_i(v_j) = \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

und deshalb

$$(\varphi_{\mu_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{\mu_k})(v_{\mu_1}, \dots, v_{\mu_k}) = 1,$$

während diese Form auf allen anderen Kombinationen von Basisvektoren verschwindet, die keine Permutation dieser Argumente darstellen.

- 2 **Satz** Sei v_1, \dots, v_n eine Basis von V und $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ die dazu duale Basis von V^* . Dann besitzt jede alternierende k -Form ω auf V die eindeutige Darstellung

$$\omega = \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq n} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} \varphi_{\mu_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{\mu_k}$$

mit den Komponenten $\omega_{\mu_1 \dots \mu_k} = \omega(v_{\mu_1}, \dots, v_{\mu_k})$. \times

«»» Wir haben bereits bemerkt, dass jede Form durch ihre Werte für Argumente $v_{\mu_1}, \dots, v_{\mu_k}$ mit $1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq n$ bestimmt ist und deshalb eine Darstellung der angegebenen Gestalt hat. Außerdem ergibt Anwenden auf $v_{\mu_1}, \dots, v_{\mu_k}$, dass ω nur dann die Nullform ist, wenn alle Komponenten verschwinden. Daher ist die Darstellung auch eindeutig. »»»

Korollar Ist $\dim V = n$, so gilt

$$\dim \Lambda^k V = B_k^n := \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}, \quad k \geq 0. \quad \times$$

«»» Ist $1 \leq k \leq n$, so gibt es genau B_k^n Möglichkeiten, k Elemente aus einer Menge mit n Elementen auszuwählen, ohne dass es auf die Reihenfolge ankommt. Somit gibt es ebensoviele Basisvektoren von $\Lambda^k V$. Dies ist auch für $k = 0$ korrekt, denn nach Vereinbarung ist $\Lambda^0 V = \mathbb{R}$, und dieser Raum hat die Dimension 1. Es stimmt auch für $k > n$, denn dann ist $\Lambda^k V = \{0\}$, und dieser Raum hat die Dimension 0. »»»

Im Standardfall \mathbb{R}^n bezeichnet bekanntlich dx_1, \dots, dx_n die duale Basis zur Standardbasis e_1, \dots, e_n . Eine alternierende k -Form hat somit eine eindeutige Darstellung

$$\omega = \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq n} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k}.$$

- A. Jede alternierende 1-Form hat die Gestalt

$$\alpha = \sum_{k=1}^n a_k dx_k,$$

aber das wissen wir ja bereits.

- B. Jede alternierende $n-1$ -Form hat die Gestalt

$$\omega = \sum_{k=1}^n a_k dx_1 \wedge \dots \wedge \hat{dx}_k \wedge \dots \wedge dx_n,$$

wobei $\hat{}$ bedeutet, dass dieser Term auszulassen ist.

- C. Jede alternierende n -Form hat die Gestalt

$$\omega = a dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n, \quad a \in \mathbb{R}. \quad \leftarrow$$

■ Adjungierte Abbildung

Eine lineare Abbildung $A: V \rightarrow W$ zwischen zwei Vektorräumen induziert in natürlicher Weise eine lineare Abbildung zwischen den zugehörigen Räumen alternierender Formen, und zwar in umgekehrter Richtung.

- 3 **Definition** Die durch eine lineare Abbildung $A: V \rightarrow W$ induzierte *adjungierte Abbildung*

$$A^*: \Lambda^k W \rightarrow \Lambda^k V, \quad \omega \mapsto A^* \omega$$

ist definiert durch

$$(A^* \omega)(v_1, \dots, v_k) := \omega(Av_1, \dots, Av_k). \quad \times$$

Für $k = 1$ ist dies die adjungierte Abbildung $A^*: W^* \rightarrow V^*$ zwischen den Dualräumen. Aus der Definition ist ersichtlich, dass A^* mit dem Dachprodukt vertauscht:

$$A^*(\omega \wedge \nu) = (A^* \omega) \wedge (A^* \nu).$$

Für n -Formen gilt außerdem Folgendes.

- 4 **Lemma** Ist V ein Vektorraum der Dimension n und $A: V \rightarrow V$ linear, so ist

$$A^*: \Lambda^n V \rightarrow \Lambda^n V$$

die Multiplikation mit dem skalaren Faktor $\det A$, also

$$A^* \omega = (\det A) \omega. \quad \times$$

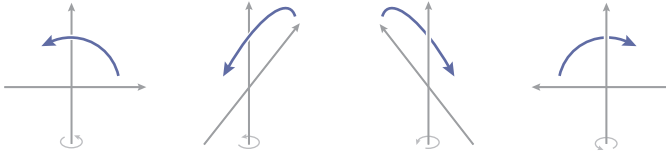
⟨⟨⟨ Ist v_1, \dots, v_n irgendeine Basis von V , so ist $A^* \omega$ bestimmt durch

$$(A^* \omega)(v_1, \dots, v_n) = \omega(Av_1, \dots, Av_n) = \alpha \omega(v_1, \dots, v_n)$$

mit einer gewissen reellen Zahl α . Stellen wir A bezüglich dieser Basis durch eine $n \times n$ -Matrix (A_{kl}) dar, so geht der mittlere Ausdruck aufgrund der alternierenden Multilinearität von ω über in ein Vielfaches von $\omega(v_1, \dots, v_n)$, wobei der skalare Faktor genau durch die alternierende Summe dargestellt wird, die die Determinante von (A_{kl}) definiert. ⟩⟩⟩

Bemerkung Man kann die Determinante einer Abbildung $A: V \rightarrow V$ auch durch die Gleichung $A^* \omega = (\det A) \omega$ koordinatenfrei *definieren*. Dann ist zu zeigen, dass sie mit der entsprechenden alternierenden Summe in den Komponenten einer Matrixdarstellung von A übereinstimmt. \circ

Abb 1 Uhrzeigersinn von ›vorne‹ und ›hinten‹



■ Orientierung

Für den Satz von Stokes benötigen wir noch den Begriff der *Orientierung* eines Vektorraumes. Für das eindimensionale Integral bereitet dieser Begriff keine Mühe. Aufgrund der Anordnung der reellen Zahlen ist ein Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ immer ›von a nach b ‹ orientiert. Die umgekehrte Richtung ist die dazu entgegengesetzte Orientierung.

Wie ist aber eine Ebene orientiert? Der mathematisch positive Orientierungssinn ist vereinbarungsgemäß gegen den Uhrzeigersinn gerichtet. Doch dies ist keine *Definition* der Orientierung, da sie für sich genommen *sinnlos* ist. Was sich aus der einen Betrachtungsrichtung *gegen* den Uhrzeigersinn bewegt, bewegt sich aus der entgegengesetzten Betrachtungsrichtung *mit* dem Uhrzeigersinn Abb 1. Vielmehr kann man nur dann von einem Uhrzeigersinn sprechen, wenn man sich auf eine vorgegebene Orientierung beziehen kann. — Wir lösen dieses kleine Problemchen, indem wir nicht definieren, was *die* Orientierung eines Vektorraums eigentlich ist, sondern indem wir erklären, wann zwei Basen *dieselbe* Orientierung repräsentieren.

Definition Zwei Basen (v_1, \dots, v_n) und (w_1, \dots, w_n) eines reellen Vektorraums heißen *gleichorientiert, geschrieben*

$$(v_1, \dots, v_n) \sim (w_1, \dots, w_n),$$

wenn die Determinante der linearen Transformation Φ mit $\Phi v_i = w_i$ für $1 \leq i \leq n$ positiv ist. ✕

Aufgrund der Rechenregeln für die Determinante definiert dies eine *Äquivalenzrelation* auf der Menge aller Basen eines Vektorraumes. Und da die Determinante eines Isomorphismus genau zwei Vorzeichen annehmen kann, definiert diese Äquivalenzrelation genau zwei Äquivalenzklassen, die die beiden *Orientierungen* des Vektorraums genannt werden.

Festgelegt wird eine Orientierung also zum Beispiel durch die Angabe einer Basis (v_1, \dots, v_n) . Da es in diesem Fall auf die Reihenfolge der Basisvektoren ankommt, verwenden wir hier die Tupelschreibweise. Die zugehörige Äquivalenz-

Klasse und damit Orientierung von V bezeichnen wir mit

$$[\nu_1, \dots, \nu_n].$$

Jede andere Basis $(w_1, \dots, w_n) \in [\nu_1, \dots, \nu_n]$ heißt dann *positiv orientiert*, alle anderen Basen heißen *negativ orientiert*. Die negative Orientierung wird auch mit $-[\nu_1, \dots, \nu_n]$ bezeichnet.

Auf dem Standardraum \mathbb{R}^n mit der Standardbasis (e_1, \dots, e_n) ist die übliche Orientierung natürlich $[e_1, \dots, e_n]$. Insbesondere ist dies die übliche Orientierung der Ebene, wenn wir von einer Drehung gegen den Uhrzeigersinn sprechen. Anschaulich gesprochen wird dabei der Vektor e_1 auf dem kürzeren Weg in die Richtung des Vektors e_2 gedreht.

Lemma Sei $n = \dim V$ und $\omega \in \Lambda^n V$ nicht die Nullform. Dann sind zwei Basen (ν_1, \dots, ν_n) und (w_1, \dots, w_n) von V gleich orientiert genau dann, wenn $\omega(\nu_1, \dots, \nu_n)$ und $\omega(w_1, \dots, w_n)$ dasselbe Vorzeichen haben. \times

⟨⟨⟨ Ist $\Phi: V \rightarrow V$ definiert durch $\Phi \nu_i = w_i$ für $1 \leq i \leq n$, so ist $_4$

$$\begin{aligned} \omega(w_1, \dots, w_n) &= \omega(\Phi \nu_1, \dots, \Phi \nu_n) \\ &= \Phi^* \omega(\nu_1, \dots, \nu_n) \\ &= \det \Phi \omega(\nu_1, \dots, \nu_n). \end{aligned}$$

Somit ist $\det \Phi > 0$ genau dann, wenn $\omega(\nu_1, \dots, \nu_n)$ und $\omega(w_1, \dots, w_n)$ dasselbe Vorzeichen haben. $\rangle\rangle\rangle$

Für die Anschauung nützlich ist folgende *topologische Charakterisierung* einer Orientierung, die sich aus dem Deformationslemma 21.11 ergibt.

Lemma Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum mit Orientierung $[\nu_1, \dots, \nu_n]$. Dann sind diejenigen Basen (w_1, \dots, w_n) positiv orientiert, die sich als Basis stetig in (ν_1, \dots, ν_n) überführen lassen. Das heißt, es gibt eine stetige Familie von Isomorphismen

$$\Phi_t: V \rightarrow V, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

so dass $\Phi_0 = id$ und $\Phi_1 \nu_i = w_i$ für $1 \leq i \leq n$. \times

Gemäß unserer Definition besitzt der triviale Vektorraum $\{0\}$ nur eine *einzige* Orientierung, da es überhaupt keine Basis von $\{0\}$ gibt. Dies ist aber für unseren Gebrauch nicht sinnvoll. Daher treffen wir noch folgende

Vereinbarung Der triviale Vektorraum $\{0\}$ besitzt die beiden Orientierungen $+1$ und -1 . \times

22.2

Differenzialformen

Eine 1-Form ist eine Abbildung $\alpha: V \rightarrow V^*$, die jedem Punkt x im Definitionsbereich eine Linearform $\alpha(x)$ in V^* zuordnet. Entsprechendes definieren wir jetzt für k -Formen.

Definition Eine *Differenzialform vom Grad k* , kurz *k -Form*, ist eine Abbildung

$$\omega: V \rightarrow \Lambda^k V, \quad x \mapsto \omega(x),$$

die jedem Punkt im Definitionsbereich eine alternierende k -Form zuordnet. \times

Im Standardfall \mathbb{R}^n hat eine k -Form ω somit eine Darstellung $_2$

$$\omega(x) = \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq n} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k}(x) dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k}$$

mit Komponentenfunktionen $\omega_{\mu_1 \dots \mu_k}(x) = \omega(x)(e_{\mu_1}, \dots, e_{\mu_k})$. Eine solche Form heißt *stetig* respektive *von der Klasse C^r* , wenn alle Komponentenfunktionen stetig respektive von der Klasse C^r sind. Die Regularitätseigenschaften von Formen werden hier allerdings keine besondere Rolle spielen. Der Einfachheit nehmen wir an, dass alle *unendlich oft differenzierbar* sind. Mit $\Omega^k(U)$ bezeichnen wir den Raum solcher k -Formen auf einem Gebiet U im \mathbb{R}^n .

► A. Eine 0-Form $f \in \Omega^0(U)$ ist eine C^∞ -Funktion

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}.$$

B. Ist $f \in \Omega^0(U)$, so ist ihr übliches Differenzial eine 1-Form in $\Omega^1(U)$:

$$df: U \rightarrow V^*, \quad df(x) = \sum_{1 \leq \mu \leq n} \partial_\mu f(x) dx_\mu.$$

C. Eine $n - 1$ -Form auf dem \mathbb{R}^n hat die Gestalt

$$\eta = \sum_{k=1}^n f_k(x) dx_1 \wedge \dots \wedge d\hat{x}_k \wedge \dots \wedge dx_n.$$

D. Eine n -Form auf dem \mathbb{R}^n ist gegeben durch eine einzige Funktion:

$$\omega = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \quad \blacktriangleleft$$

■ Transformationsformel

Sei $f: V \rightarrow W$ eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen, wobei *differenzierbar* für *unendlich oft differenzierbar* stehen soll. In jedem Punkt ihres Definitionsbereichs definiert ihre Ableitung die *Tangentialabbildung*

$$f_*: V \rightarrow W, \quad v \mapsto w = Df(x)v.$$

Diese induziert eine adjungierte Abbildung \int

$$f^*: \Lambda^k W \rightarrow \Lambda^k V, \quad \omega \mapsto f^* \omega$$

der entsprechenden Räume von k -Formen. Verfahren wir so in jedem Punkt, erhalten wir folgende

- 5 **Transformationsformel** Sei $U \subset V$ ein Gebiet und $f: U \rightarrow W$ differenzierbar.

Dann ist

$$f^*: \Omega^k(W) \rightarrow \Omega^k(U), \quad \omega \mapsto \nu = f^* \omega$$

definiert durch

$$\nu(v_1, \dots, v_k) = (\omega \circ f)(f_* v_1, \dots, f_* v_k). \quad \times$$

Man nennt $f^* \omega$ den *pull back* von ω oder die durch f *zurückgeholte Form*. Punktweise ist sie gegeben durch

$$(f^* \omega)(x)(v_1, \dots, v_k) = \omega(f(x))(f_*(x)v_1, \dots, f_*(x)v_k).$$

Diese Operation vertauscht offensichtlich mit Addition und Multiplikation, also

$$f^*(\omega + \eta) = f^* \omega + f^* \eta,$$

$$f^*(\omega \wedge \nu) = f^* \omega \wedge f^* \nu.$$

Bemerkung Allgemein verwendet man die Bezeichnungen f_* und f^* für sogenannte *kovariante* und *kontravariante Funktoren*, die einer Abbildung f zugeordnet sind und für die gilt

$$id_* = id, \quad (f \circ g)_* = f_* \circ g_*$$

respektive

$$id^* = id, \quad (f \circ g)^* = g^* \circ f^*.$$

Der *push forward* $f_* = Df$ für Tangentialvektoren und der *pull back* f^* für Differentialformen sind typische Beispiele. \rightarrow

- 6 ▶ A. Für $f: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ und eine 0-Form g auf dem \mathbb{R}^m ist der pull back die Komposition:

$$f^*g = g \circ f.$$

- B. Für $f: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ gilt

$$f^*dx_\mu = df_\mu, \quad 1 \leq \mu \leq m,$$

wobei f_μ die μ -te Komponente von f bezeichnet. Denn

$$\begin{aligned} (f^*dx_\mu)(v) &= (dx_\mu \circ f)(f_*v) \\ &= dx_\mu(f_*v) \\ &= (f_*v)_\mu = df_\mu(v). \end{aligned}$$

- C. Insbesondere für $n = m = 1$ ist

$$f^*dx = f'(x) dx = df(x).$$

- D. Für $f: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ gilt

$$f^*(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = (\det Df)(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n).$$

Denn in jedem Punkt ist $f_* = Df$ eine lineare Transformation des \mathbb{R}^n in sich. Da $\omega = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ nicht vom Ort abhängt, gilt deshalb \llcorner

$$f^*\omega = (Df)^*\omega = (\det Df)\omega. \quad \llcorner$$

■ Äußere Ableitung

Die *äußere Ableitung* ordnet einer k -Form eine $k+1$ -Form zu. Wir kennen diesen Operator bisher in der Form des Differenzials einer skalaren Funktion, das einer 0-Form eine 1-Form zuordnet. Nun definieren wir ihn für beliebige Formen, wobei wir uns auf den Standardfall beschränken.

Definition Die *äußere Ableitung* oder das *Differenzial* einer k -Form

$$\omega = \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq n} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k}$$

mit $k \geq 1$ ist die $k+1$ -Form

$$d\omega = \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq n} d\omega_{\mu_1 \dots \mu_k} \wedge dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k}.$$

Das Differenzial einer 0-Form ist ihr übliches Differenzial als Funktion. \times

Von jeder Komponentenfunktion wird also das Funktionsdifferenzial gebildet und mit der zugehörigen Basisform durch das Dachprodukt verknüpft. Ausgeschrieben ergibt dies

$$d\omega = \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq n} \sum_{1 \leq \lambda \leq n} (\partial_\lambda \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} dx_\lambda) \wedge dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k}.$$

7 ▶ A. Das Differenzial einer 1-Form $\alpha = f dx + g dy$ auf dem \mathbb{R}^2 ist

$$d\alpha = f_y dy \wedge dx + g_x dx \wedge dy = (g_x - f_y) dx \wedge dy.$$

B. Das Differenzial einer 1-Form

$$\alpha = \sum_{1 \leq \mu \leq n} \alpha_\mu dx_\mu$$

auf dem \mathbb{R}^n ist

$$d\alpha = \sum_{1 \leq \mu \leq n} \sum_{1 \leq \lambda \leq n} \partial_\lambda \alpha_\mu dx_\lambda \wedge dx_\mu = \sum_{1 \leq \lambda < \mu \leq n} (\partial_\lambda \alpha_\mu - \partial_\mu \alpha_\lambda) dx_\lambda \wedge dx_\mu.$$

C. Das Differenzial von

$$\omega = f_1 dx_2 \wedge dx_3 + f_2 dx_3 \wedge dx_1 + f_3 dx_1 \wedge dx_2$$

auf dem \mathbb{R}^3 ist

$$\begin{aligned} d\omega &= (\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &= (\operatorname{div} f) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned}$$

8 **Rechenregeln** Für k -Formen ω, μ und l -Formen η gilt

- (i) $d(\omega + \mu) = d\omega + d\mu$,
- (ii) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$,
- (iii) $d(d\omega) = 0$,
- (iv) $f^*(d\omega) = d(f^*\omega)$. ✕

⟨⟨⟨⟨ (i) Das ist einfach.

(ii) Der allgemeine Fall lässt sich aufgrund der Additivität zurückführen auf $\omega = f\mu$ und $\eta = g\hat{\eta}$, wobei $\mu = dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k}$ und $\hat{\eta} = dx_{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\nu_l}$. Dann ist

$$\omega \wedge \eta = (fg) \hat{\omega} \wedge \hat{\eta},$$

und mit $d(fg) = gdf + f dg$ erhalten wir definitionsgemäß

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= d(fg) \wedge \hat{\omega} \wedge \hat{\eta} \\ &= gdf \wedge \hat{\omega} \wedge \hat{\eta} + f dg \wedge \hat{\omega} \wedge \hat{\eta} \\ &= (df \wedge \hat{\omega}) \wedge (g\hat{\eta}) + (-1)^k (f\hat{\omega}) \wedge (dg \wedge \hat{\eta}) \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \end{aligned}$$

(iii) Definitionsgemäß ist

$$d\omega = \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} \sum_{1 \leq \lambda \leq n} \partial_\lambda \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} dx_\lambda \wedge dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k}$$

und

$$d(d\omega) = \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} \sum_{1 \leq \kappa, \lambda \leq n} \partial_\kappa \partial_\lambda \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} dx_\kappa \wedge dx_\lambda \wedge dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k}.$$

In dieser Summe verschwinden alle Terme mit $\kappa = \lambda$. Ansonsten kombinieren sich jeweils zwei Terme zu Null, nämlich

$$\begin{aligned} & \partial_\kappa \partial_\lambda \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} dx_\kappa \wedge dx_\lambda \wedge dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k} \\ & + \partial_\lambda \partial_\kappa \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} dx_\lambda \wedge dx_\kappa \wedge dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k} \\ & = \partial_\kappa \partial_\lambda \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} (dx_\kappa \wedge dx_\lambda + dx_\lambda \wedge dx_\kappa) \wedge dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k} = 0. \end{aligned}$$

Somit ist die gesamte Summe Null.

(iv) Für eine 0-Form g handelt es sich um die Kettenregel, denn

$$\begin{aligned} f^*(dg)(v) &= (dg \circ f)(f_*v) \\ &= (Dg \circ f)(Df(v)) \\ &= D(g \circ f)(v) = d(f^*g)(v). \end{aligned}$$

Wir nehmen jetzt induktiv an, dass die Gleichung bereits für k -Formen verifiziert ist. Es genügt dann, eine $k+1$ -Form der Gestalt $\omega \wedge dx_\lambda$ zu betrachten. Mit der Produktregel (ii) und $d(dx_\lambda) = 0$ ist dann

$$\begin{aligned} f^*(d(\omega \wedge dx_\lambda)) &= f^*(d\omega \wedge dx_\lambda) \\ &= f^*d\omega \wedge f^*dx_\lambda \\ &= df^*\omega \wedge f^*dx_\lambda, \end{aligned}$$

wobei die Induktionsannahme beim Übergang zur letzten Zeile zur Anwendung kam. Auf der anderen Seite ist wegen $d(df_\lambda) = 0$ auch

$$\begin{aligned} d(f^*(\omega \wedge dx_\lambda)) &= d(f^*\omega \wedge f^*dx_\lambda) \\ &= d(f^*\omega \wedge df_\lambda) \\ &= df^*\omega \wedge df_\lambda. \end{aligned}$$

Also ist $f^*d(\omega \wedge dx_\lambda) = df^*(\omega \wedge dx_\lambda)$, und wir sind fertig. \gggg

Bemerkung Wir haben die äußere Ableitung einer k -Form durch Bezug auf Standardkoordinaten definiert. Dies erscheint etwas willkürlich, und es stellt sich die Frage, ob es nicht auch ohne Koordinaten geht.

In der Tat ist eine äußere Ableitung

$$d: \Omega^k(U) \rightarrow \Omega^{k+1}(U), \quad k \geq 0,$$

durch die folgenden drei Eigenschaften vollständig und eindeutig bestimmt:

(C-1) *Differenzialeigenschaft*: Für $f \in \Omega^0(U)$ ist df das Differenzial.

(C-2) *Produktregel*: Für $\omega \in \Omega^k(U)$ ist

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta.$$

(C-3) *Komplexeigenschaft*: Es ist $d \circ d = 0$.

Für einen Beweis siehe Kapitel 8 in JÄNISCH, *Vektoranalysis*. \rightarrow

■ Geschlossene und exakte Formen

Definition Eine Differenzialform ω heißt *geschlossen*, wenn $d\omega = 0$. Sie heißt *exakt*, wenn $\omega = d\eta$ mit einer weiteren Differenzialform η . \times

Geschlossene 1-Formen $\alpha = \sum \alpha_\mu dx_\mu$ hatten wir bereits mithilfe der Integrierbarkeitsbedingung _{19.10}

$$\partial_\lambda \alpha_\mu = \partial_\mu \alpha_\lambda, \quad 1 \leq \lambda, \mu \leq n$$

definiert. Dies ist aber äquivalent mit

$$d\alpha = \sum_{1 \leq \lambda < \mu \leq n} (\partial_\lambda \alpha_\mu - \partial_\mu \alpha_\lambda) dx_\lambda \wedge dx_\mu = 0,$$

also der Geschlossenheit von α im Sinne der jetzigen Definition.

Wegen $d \circ d = 0$ ₈ ist jede exakte Differenzialform auch geschlossen. Die Frage ist, ob umgekehrt jede geschlossene Form auch exakt ist. Für 1-Formen gab das Lemma von Poincaré _{19.12} eine positive Antwort auf sternförmigen Gebieten. Tatsächlich gilt dieses Lemma für Differenzialformen beliebigen Grades.

9 **Lemma von Poincaré** Jede geschlossene Differenzialform auf einem sternförmigen Gebiet ist exakt. \times

⟨⟨⟨ Der Beweis kann beim ersten Lesen übersprungen werden, da wir dieses Ergebnis nur für eine Notiz über Vektorpotentiale _{23.14} benötigen. — Wir ordnen jeder k -Form ω eine $k-1$ -Form $I\omega$ so zu, dass $I\omega = 0$ für $\omega = 0$ und

$$\omega = I(d\omega) + d(I\omega).$$

Ist ω geschlossen, so ist $I\omega$ eine $k-1$ -Form mit $d(I\omega) = \omega$, und wir sind fertig. Sei

$$\omega = \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k}$$

eine beliebige k -Form. Wir können annehmen, dass ihr Definitionsbereich sternförmig zum Nullpunkt ist. Wir definieren dann

$$(I\omega)(x) = \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k}(tx) dt \right) x_{\mu_i} dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge d\hat{x}_{\mu_i} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k},$$

wobei das Dach wie üblich bedeutet, dass dieser Term auszulassen ist.

Nun folgt etwas Rechnerei. Da wir aufgrund der Glattheit der Komponenten unter dem Integral differenzieren dürfen, ist

$$\begin{aligned} d(I\omega) &= \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} k \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k}(tx) dt \right) dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k} \\ &\quad + \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^n (-1)^{i-1} \left(\int_0^1 t^k \partial_l \omega_{\mu_1 \dots \mu_k}(tx) dt \right) \\ &\quad \quad x_{\mu_i} dx_l \wedge dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge d\hat{x}_{\mu_i} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k}. \end{aligned}$$

Andererseits ist

$$d\omega = \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} \sum_{l=1}^n \partial_l \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} dx_l \wedge dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k}.$$

Wenden wir hierauf dieselbe Konstruktion an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} I(d\omega) &= \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} \sum_{l=1}^n \left(\int_0^1 t^k \partial_l \omega_{\mu_1 \dots \mu_k}(tx) dt \right) x_l dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k} \\ &\quad - \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \left(\int_0^1 t^k \partial_l \omega_{\mu_1 \dots \mu_k}(tx) dt \right) \\ &\quad \quad x_{\mu_i} dx_l \wedge dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge d\hat{x}_{\mu_i} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k}. \end{aligned}$$

Addieren wir $d(I\omega)$ und $I(d\omega)$, so annullieren sich die dreifachen Summen, und wir erhalten

$$\begin{aligned}
& d(I\omega) + I(d\omega) \\
&= \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} k \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k}(tx) dt \right) dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k} \\
&\quad + \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} \sum_{l=1}^n \left(\int_0^1 t^k x_l \partial_l \omega_{\mu_1 \dots \mu_k}(tx) dt \right) dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k} \\
&= \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} \left(\int_0^1 \partial_t [t^k \omega_{\mu_1 \dots \mu_k}(tx)] dt \right) dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k} \\
&= \sum_{\mu_1 < \dots < \mu_k} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k} \\
&= \omega.
\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis vollständig. >>>>

22.3

Ketten

Wir spezifizieren nun die geometrischen Objekte, über die wir Differenzialformen integrieren. Die Begriffsbildung mag etwas umständlich erscheinen. Tatsächlich handelt es sich nur um einen technischen Zwischenschritt zum allgemeinen Satz von Stokes 23.5. — Sei $\mathbb{I} := [0, 1]$ und damit

$$\mathbb{I}^n = [0, 1]^n, \quad n \geq 1.$$

Außerdem sei $\mathbb{I}^0 := \{0\}$.

Definition Sei $n \geq 0$. Der *Standard- n -Würfel* ist die triviale Abbildung

$$I^n : \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad I^n(x) = x.$$

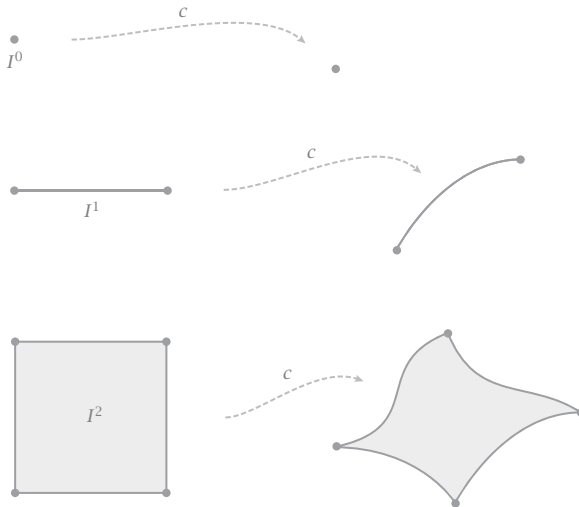
Ein allgemeiner *n -Würfel* in einem Gebiet $U \subset \mathbb{R}^m$ ist eine stetige Abbildung

$$c : \mathbb{I}^n \rightarrow U.$$

Eine *n -Kette* in U ist eine endliche Linearkombination $\lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_r c_r$ von n -Würfeln c_1, \dots, c_r mit ganzzahligen Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. ✕

Es ist also \mathbb{I}^n eine Menge und I^n eine Abbildung.

- ▶ A. Ein 0-Würfel $c : \{0\} \rightarrow U$ ist ein Punkt in U .
- B. Ein 1-Würfel $c : [0, 1] \rightarrow U$ ist eine stetige Kurve in U .
- C. Jeder n -Würfel c ist eine n -Kette, wenn wir c mit $1c$ identifizieren. ◀

Abb 2 Standard- und allgemeine n -Würfel für $n = 0, 1, 2$ 

Ketten treten in natürlicher Weise als *Ränder* von Würfeln auf. Betrachte zunächst den Standardwürfel. Sein Rand ist eine Kette aus $n-1$ -Würfeln, die seine Seiten beschreiben und mit Blick auf den Fundamentalsatz mit den geeigneten Vorzeichen versehen sind.

Definition Für $1 \leq i \leq n$ und $\alpha \in \{0, 1\}$ heißt

$$I_{i,\alpha}^n : \mathbb{I}^{n-1} \rightarrow \mathbb{I}^n, \quad x \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha, x_i, \dots, x_{n-1})$$

die *i, α -Seite* von I^n . Die $n-1$ -Kette

$$\partial I^n := \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} I_{i,\alpha}^n$$

heißt der *Rand* von I^n . Der Rand einer 0 -Kette ist 0 . \times

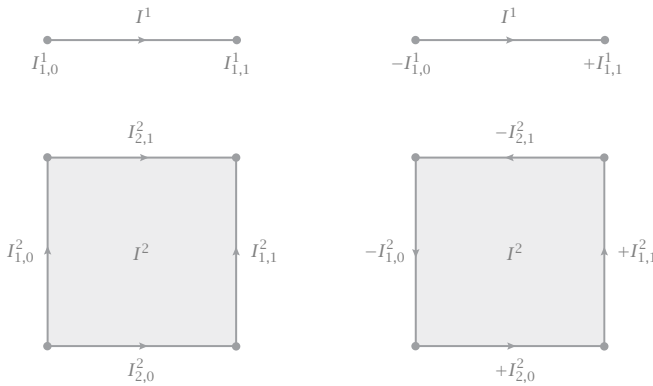
Definition Der *Rand* eines beliebigen n -Würfels $c: \mathbb{I}^n \rightarrow U$ ist

$$\partial c := \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} c_{i,\alpha},$$

wobei $c_{i,\alpha} := c \circ I_{i,\alpha}^n$ die *i, α -Seite von c* bezeichnet. Entsprechend ist

$$\partial(\lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_r c_r) := \lambda_1 \partial c_1 + \dots + \lambda_r \partial c_r$$

der *Rand einer allgemeinen n -Kette*. \times

Abb 3 Seiten und Rand von I^1 und I^2 

Der Rand des Randes von I^2 ist 0, da jeder Eckpunkt einmal als Endpunkt einer Seite mit $+1$ und als Anfangspunkt der nächsten Seite mit -1 gewichtet wird, in der Summe also den Faktor 0 erhält. Dies gilt für *jede* Kette:

Satz Der Randoperator ∂ hat die **Komplexeigenschaft**

$$\partial \circ \partial = 0. \quad \times$$

Für jede n -Kette c gilt also $\partial(\partial c) = 0$.

««« Es genügt, einen einzelnen n -Würfel zu betrachten. Was für ihn gilt, gilt dann auch für jede n -Kette.

Betrachte zunächst die j, β -Seite der i, α -Seite von I^n ,

$$(I_{i,\alpha}^n)_{j,\beta} : \mathbb{I}^{n-2} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

wobei wir $i \leq j$ annehmen können. Für $x \in \mathbb{I}^{n-2}$ ist definitionsgemäß

$$\begin{aligned} (I_{i,\alpha}^n)_{j,\beta}(x) &= I_{i,\alpha}^n(I_{j,\beta}^{n-1}(x)) \\ &= I_{i,\alpha}^n(x_1, \dots, \beta_j, \dots, x_{n-2}) \\ &= (x_1, \dots, \alpha_i, \dots, \beta_{j+1}, \dots, x_{n-2}), \end{aligned}$$

wobei die Indizes an α und β angeben, an welchen Positionen die Einträge stehen. Man beachte, dass β wegen $i \leq j$ von der j -ten an die $j+1$ -te Stelle verschoben wird. Andererseits ist aber auch

$$\begin{aligned} (I_{j+1,\beta}^n)_{i,\alpha}(x) &= I_{j+1,\beta}^n(I_{i,\alpha}^{n-1}(x)) \\ &= I_{j+1,\beta}^n(x_1, \dots, \alpha_i, \dots, x_{n-2}) \\ &= (x_1, \dots, \alpha_i, \dots, \beta_{j+1}, \dots, x_{n-2}). \end{aligned}$$

Also gilt

$$(I_{i,\alpha}^n)_{j,\beta} = (I_{j+1,\beta}^n)_{i,\alpha}, \quad i \leq j.$$

Dasselbe gilt dann auch für einen beliebigen n -Würfel c , also

$$(c_{i,\alpha})_{j,\beta} = (c_{j+1,\beta})_{i,\alpha}, \quad i \leq j.$$

In der Randdarstellung

$$\partial(\partial c) = \partial \left(\sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} c_{i,\alpha} \right) = \sum_{i,j=1}^n \sum_{\alpha,\beta=0}^1 (-1)^{i+\alpha+j+\beta} (c_{i,\alpha})_{j,\beta}$$

existiert daher zu jedem Summanden genau ein weiterer Summand mit entgegengesetztem Vorzeichen. Die gesamte Summe verschwindet deshalb, so dass

$$\partial(\partial c) = 0. \quad \gggg$$

22.4

Der Fundamentalsatz

Jetzt geht es noch darum, Differenzialformen über Würfel zu integrieren. Genauer wird eine n -Form immer über einen n -Würfel integriert, nicht über einen Würfel einer anderen Dimension.

Zunächst wieder einige Definitionen. Ist ω eine n -Form auf \mathbb{I}^n , so ist

$$\omega = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

mit einer differenzierbaren Funktion $f: \mathbb{I}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Wir definieren dann ›klassisch‹

$$\int_{\mathbb{I}^n} \omega = \int_{\mathbb{I}^n} f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n := \int_{\mathbb{I}^n} f d\lambda_n$$

als das Lebesgueintegral der Koeffizientenfunktion f über \mathbb{I}^n bezüglich des Volumenmaßes $d\lambda_n$. Das Integral über einen allgemeinen Würfel wird darauf zurückgeführt.

Definition Sei ω eine stetige n -Form auf einem Gebiet U . Für einen differenzierbaren n -Würfel c in U ist dann

$$\int_c \omega := \int_{\mathbb{I}^n} c^* \omega.$$

Für eine differenzierbare n -Kette $c = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_r c_r$ ist entsprechend

$$\int_c \omega := \lambda_1 \int_{c_1} \omega + \dots + \lambda_r \int_{c_r} \omega.$$

Für $n = 0$ sei außerdem $\int_c \omega := \omega(c(0))$. \times

► A. Für den Standardwürfel I^n und $\omega = f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ ist dies wieder die vorher getroffene Vereinbarung:

$$\begin{aligned} \int_{I^n} \omega &= \int_{I^n} f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \int_{\mathbb{I}^n} (I^n)^*(f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) \\ &= \int_{\mathbb{I}^n} f(x) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n = \int_{\mathbb{I}^n} f d\lambda_n. \end{aligned}$$

B. Im Fall $n = 1$ handelt es sich um das bekannte Integral einer 1-Form

$$\alpha = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i(x) dx_i$$

entlang einer Kurve $c: \mathbb{I} \rightarrow U$:

$$\int_c \alpha = \int_{\mathbb{I}} c^* \alpha = \int_{\mathbb{I}} \sum_{i=1}^n \alpha_i(c(t)) \dot{c}_i(t) dt = \int_{\mathbb{I}} \langle \alpha \circ c, \dot{c} \rangle dt.$$

C. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Für jeden stetig differenzierbaren 1-Würfel $c: \mathbb{I} \rightarrow [a, b]$ gilt dann

$$\int_c f dx = \int_{\mathbb{I}} c^*(f dx) = \int_0^1 (f \circ c) c' dt = \int_{c(0)}^{c(1)} f dt$$

aufgrund der Substitutionsregel. ◀

Wir haben jetzt alles beisammen, um den Satz von Stokes für Ketten zu formulieren und auch zu beweisen.

10 Fundamentalsatz (Satz von Stokes) *Ist ω eine differenzierbare $n - 1$ -Form auf einem Gebiet U und c eine differenzierbare n -Kette in U , so gilt*

$$\int_c d\omega = \int_{\partial c} \omega. \quad \times$$

◀◀◀ Zuerst betrachten wir eine $n - 1$ -Form auf dem Standardwürfel I^n . Eine solche Form hat im \mathbb{R}^n die Basisdarstellung

$$\omega = \sum_{\mu=1}^n f_{\mu} \omega_{\mu}, \quad \omega_{\mu} := dx_1 \wedge \dots \wedge d\hat{x}_{\mu} \wedge \dots \wedge dx_n,$$

wobei das Dach bedeutet, dass dieser Term *auszulassen* ist. Aufgrund der Linearität der Integrale können wir uns weiter auf eine einzelne solche Form

$$\omega = f \omega_{\mu}$$

beschränken. Dessen Integral über $I_{i,\alpha}^n$ verschwindet für $i \neq \mu$, weil dx_i verschwindet, wenn die i -te Koordinate konstant ist. Es ist also

$$\int_{I_{i,\alpha}^n} f \omega_\mu = 0, \quad i \neq \mu.$$

Für $i = \mu$ erhalten wir

$$\int_{I_{\mu,\alpha}^n} f \omega_\mu = \int_{\mathbb{I}^{n-1}} (I_{\mu,\alpha}^n)^*(f \omega_\mu) = \int_{\mathbb{I}^{n-1}} f(\dots, \alpha_\mu, \dots) d\lambda_{n-1}.$$

Summieren wir über alle Seiten von I^n , so leisten also nur die beiden μ -Seiten einen Beitrag, so dass

$$\begin{aligned} \int_{\partial I^n} f \omega_\mu &= \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} \int_{I_{i,\alpha}^n} f \omega_\mu \\ &= (-1)^{\mu+1} \int_{I_{\mu,1}^n} f \omega_\mu + (-1)^\mu \int_{I_{\mu,0}^n} f \omega_\mu \\ &= (-1)^{\mu-1} \int_{\mathbb{I}^{n-1}} [f(\dots, 1_\mu, \dots) - f(\dots, 0_\mu, \dots)] d\lambda_{n-1}. \end{aligned}$$

Aufgrund des Fundamentalsatzes der Integralrechnung in *einer* Variablen ist

$$f(\dots, 1_\mu, \dots) - f(\dots, 0_\mu, \dots) = \int_{\mathbb{I}^1} \partial_\mu f d\lambda_1,$$

wobei nur in der μ -ten Koordinate integriert wird. Zusammen mit dem Satz von Fubini ergibt sich somit

$$\int_{\partial I^n} f \omega_\mu = (-1)^{\mu-1} \int_{\mathbb{I}^n} \partial_\mu f d\lambda_n = (-1)^{\mu-1} \int_{I^n} \partial_\mu f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Auf der anderen Seite ist

$$\begin{aligned} d(f \omega_\mu) &= df \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge d\hat{x}_\mu \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= \partial_\mu f dx_\mu \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge d\hat{x}_\mu \wedge \dots \wedge dx_n \\ &= (-1)^{\mu-1} \partial_\mu f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\int_{\partial I^n} f \omega_\mu = \int_{I^n} d(f \omega_\mu).$$

Der Satz von Stokes ist damit für den Standardwürfel bewiesen.

Für einen allgemeinen n -Würfel c ist mit dem eben Bewiesenen und der Definition des Randes von I^n

$$\begin{aligned} \int_c d\omega &= \int_{I^n} c^*(d\omega) = \int_{I^n} d(c^*\omega) \\ &= \int_{\partial I^n} c^*\omega = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} \int_{I_{i,\alpha}^n} c^*\omega. \end{aligned}$$

Für das letzte Integral erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{I_{i,\alpha}^n} c^* \omega &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (I_{i,\alpha}^n)^* c^* \omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (c \circ I_{i,\alpha}^n)^* \omega = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} c_{i,\alpha}^* \omega = \int_{C_{i,\alpha}} \omega. \end{aligned}$$

Also ist

$$\int_C d\omega = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} \int_{C_{i,\alpha}} \omega = \int_{\partial C} \omega.$$

Der Satz von Stokes ist damit auch für einen allgemeinen n -Würfel bewiesen.

Für eine beliebige n -Kette $c = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_r c_r$ ist dann alles klar:

$$\int_c d\omega = \sum_{1 \leq i \leq r} \lambda_i \int_{c_i} d\omega = \sum_{1 \leq i \leq r} \lambda_i \int_{\partial c_i} \omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Damit ist der Satz von Stokes im \mathbb{R}^n vollständig bewiesen. >>>>

Der vorangehende Beweis ist wenig mehr als eine elementare Rechnung. Dies liegt aber daran, dass alles Wesentliche sich bereits in den Definitionen der zentralen Begriffe findet. Dies ist überhaupt ein Merkmal guter Definitionen: Wichtige Sätze lassen sich mit ihnen konzipieren formulieren und oft auch beweisen. Nichtsdestotrotz hat der Satz von Stokes weit reichende Konsequenzen und Anwendungen, von denen wir allerdings hier nur wenige andeuten werden.

Aufgaben

- Für jede k -Form ω mit $k \geq 1$ gilt $\omega \wedge \omega = 0$.
- Seien ω und ν Differenzialformen von geradem Grad, σ von beliebigem Grad. Man berechne die äußeren Ableitungen von
 - $d\omega \wedge \nu - \omega \wedge d\nu$,
 - $d\omega \wedge \nu \wedge \sigma + \omega \wedge d\nu \wedge \sigma + \omega \wedge \nu \wedge d\sigma$.
- Auf dem \mathbb{R}^4 seien

$$\omega = dx_1 + x_2 dx_2, \quad \nu = \sin x_2 dx_1 \wedge dx_3 + \cos x_3 dx_2 \wedge dx_4.$$

Außerdem sei $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3 x_4, x_4)$. Man bestimme

- $d\omega$ und $d\nu$
 - $\sigma = \omega \wedge \nu$ c. $\varphi^* \sigma$
 - $d\sigma$ und $d(\varphi^* \sigma)$.
- Mit der Kugelkoordinatenabbildung $\varphi: (r, \varphi, \theta) \mapsto (x, y, z)$ berechne man
 - $\varphi^* dx$, $\varphi^* dy$, $\varphi^* dz$
 - $\varphi^*(dy \wedge dz)$ c. $\varphi^* dx \wedge \varphi^*(dy \wedge dz)$.
 - Jedem Vektorfeld $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ seien die beiden Formen

$$\omega_\nu^1 := \nu_1 dx + \nu_2 dy + \nu_3 dz,$$

$$\omega_\nu^2 := \nu_1 dy \wedge dz + \nu_2 dz \wedge dx + \nu_3 dx \wedge dy$$

zugeordnet. Außerdem sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine skalare Funktion.

- Zeigen sie, dass
 - $df = \omega_{\nabla f}^1$,
 - $d\omega_\nu^1 = \omega_{\nabla \times \nu}^2$,
 - $d\omega_\nu^2 = (\nabla \cdot \nu) dx \wedge dy \wedge dz$.
- Folgern sie, dass
 - $\nabla \times (\nabla f) = 0$, $\nabla \cdot (\nabla \times \nu) = 0$.
 - Falls $\nabla \times \nu = 0$ auf einem sternförmigen Gebiet A , so ist $\nu = \nabla f$ mit einer skalaren Funktion f auf A .
 - Falls $\nabla \cdot \nu = 0$ auf einem sternförmigen Gebiet A , so ist $\nu = \nabla \times w$ mit einem Vektorfeld w auf A .
- a. Zeigen sie, dass es zu jeder n -Form $\omega \neq 0$ eine n -Kette c gibt, so dass

$$\int_c \omega \neq 0.$$

- Benutzen sie dies, den Satz von Stokes und $\partial^2 = 0$, um $d^2 = 0$ zu zeigen.
- Sei $\varphi: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]^n$ eine stetig differenzierbare Bijektion mit $\det D\varphi \geq 0$ überall. Für jeden n -Würfel c und jede n -Form ω gilt dann

$$\int_c \omega = \int_{c \circ \varphi} \omega.$$

- 8 Eine k -Form ω heißt *zerlegbar*, falls es 1-Formen $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ gibt, so dass

$$\omega = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k.$$

Man berechne $(\omega + \upsilon) \wedge (\omega + \upsilon)$ für zerlegbare k -Formen ω und υ .

- 9 Die 2-Form $\omega = \sum_{k < l} a_{kl} dx_k \wedge dx_l$ ist zerlegbar genau dann, wenn

$$a_{kl}a_{mr} + a_{lm}a_{kr} + a_{mk}a_{lr} = 0, \quad 1 \leq k, l, m, r \leq n.$$

- 10 Für $\omega = \sum_{k < l} a_{kl} dx_k \wedge dx_l$ ist

$$d\omega = \sum_{k < l < m} (a_{kl,m} + a_{lm,k} + a_{mk,l}) dx_k \wedge dx_l \wedge dx_m.$$

- 11 Seien $g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $g \leq h$ und

$$N = \{(u, v) : a \leq u \leq v \wedge g(u) \leq v \leq h(u)\}.$$

Für eine C^1 -Funktion $f: N \rightarrow \mathbb{R}$ verifiziere man auf elementare Weise, dass

$$\int_{\partial N} f du = - \int_N f_v du dv.$$

23

Der Satz von Stokes

Wir übertragen nun den Fundamentalsatz von Ketten im \mathbb{R}^n auf n -dimensionale orientierte Mannigfaltigkeiten M mit Rand, die in einem beliebigen euklidischen Raum eingebettet sind. Der Fundamentalsatz erhält dann die Form

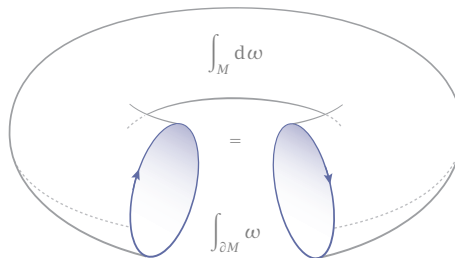
$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

und wird als allgemeiner Satz von Stokes bezeichnet.

Für 3- und 2-dimensionale berandete Mannigfaltigkeiten enthält dieser den Satz von Gauss – auch Divergenzsatz genannt – und den klassischen Satz von Stokes als Spezialfälle, welche wir abschließend mithilfe der klassischen Linien-, Flächen- und Volumenelemente formulieren. In diesem Zusammenhang treten auch die Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes auf. Diese Bezeichnungen erhalten hier ihre Berechtigung.

Abb 1

Satz von Stokes



23.1

Mannigfaltigkeiten

Bisher betrachteten wir *gleichungsdefinierte Mannigfaltigkeiten*. Demnach ist eine nichtleere Teilmenge M des \mathbb{R}^{n+m} eine f -definierte Mannigfaltigkeit der Dimension n , wenn es eine stetig differenzierbare Abbildung $f: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit regulärem Wert 0 gibt, so dass

$$M = f^{-1}(0).$$

Kurz, M ist die Niveaumenge eines regulären Wertes einer glatten Funktion.

Wir verallgemeinern dieses Konzept nun dahingehend, dass wir dies von einer Mannigfaltigkeit nur noch *lokal* um jedem Punkt fordern. Dabei stehe im Folgenden *differenzierbar* der Einfachheit halber für *unendlich oft differenzierbar*.

Definition Eine nichtleere Teilmenge M des \mathbb{R}^{n+m} heißt *n -dimensionale Mannigfaltigkeit* oder kurz *n -Mannigfaltigkeit*, wenn zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebung $W \subset \mathbb{R}^{n+m}$ und eine differenzierbare Abbildung $f: W \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit regulärem Wert 0 existiert, so dass

$$M \cap W = f^{-1}(0). \quad \times$$

Dieser Begriff ist tatsächlich allgemeiner als der der global gleichungsdefinierten Mannigfaltigkeit. Dies ergibt sich daraus, dass – wie wir gleich sehen werden – letztere immer orientierbare sind, erstere jedoch nicht.

So sieht man sofort, dass die Oberfläche eines 2-Torus eine kompakte 2-Mannigfaltigkeit darstellt.

Aufgrund des Niveaufächensatzes 18.12 ist diese lokale Charakterisierung äquivalent zur Existenz einer differenzierbaren Abbildung $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, so dass

$$M \cap W = \Gamma(\phi)$$

der Graph von ϕ ist. Für das praktische Arbeiten mit Mannigfaltigkeiten ist allerdings folgende Charakterisierung nützlicher.

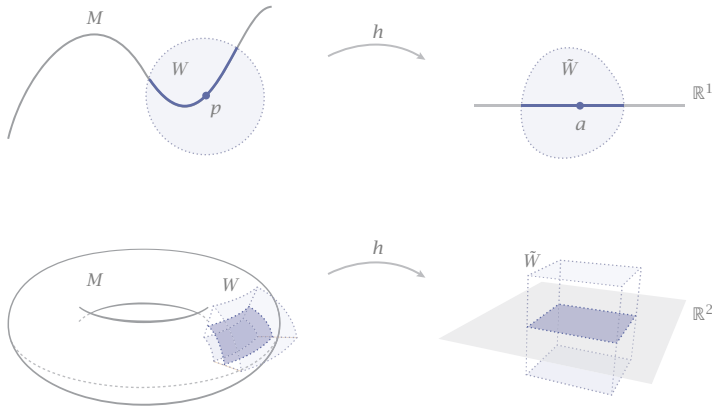
- 1 **Satz** Eine nichtleere Teilmenge M des \mathbb{R}^{n+m} ist eine *n -Mannigfaltigkeit* genau dann, wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebung $W \subset \mathbb{R}^{n+m}$ und einen Diffeomorphismus $h: W \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ gibt, so dass

$$h(M \cap W) \subset \mathbb{R}^n \times 0^m. \quad \times$$

Man sagt, der Diffeomorphismus h *trivialisert* die Mannigfaltigkeit M um den Punkt p .

⟨⟨⟨⟨ ⇒ Nach Umordnung der Koordinaten können wir annehmen, dass sich lokal auf M die letzten m Koordinaten als Funktionen der ersten n Koordi-

Abb 2 Mannigfaltigkeiten mit trivialisierenden Abbildungen



naten schreiben lassen. Es gibt also eine differenzierbare Abbildung

$$\phi: U \rightarrow V, \quad U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

so dass $M \cap W = \Gamma(\phi)$ mit $W = U \times V$. Setzen wir

$$h: U \times V \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad (u, v) \mapsto (x, y) = (u, v - \phi(u)),$$

so ist h injektiv und die Jacobimatrix Dh in jedem Punkt regulär. Also ist h ein Diffeomorphismus von W auf eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ mit der Eigenschaft, dass

$$\begin{aligned} h(M \cap W) &= \{h(u, v) : (u, v) \in \Gamma(\phi)\} \\ &= \{(x, y) : x \in U, y = 0\} \subset \mathbb{R}^n \times 0^m. \end{aligned}$$

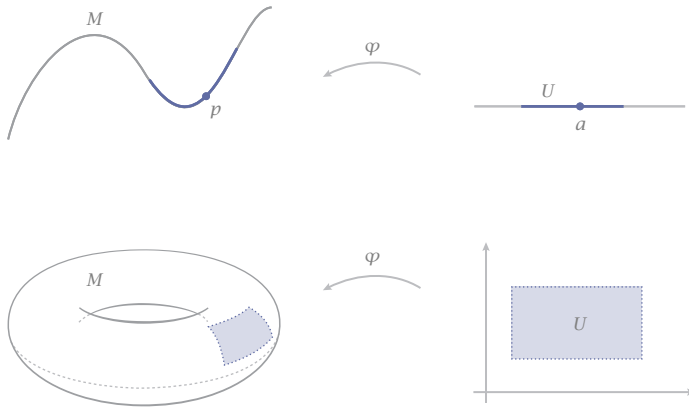
⇐ Sei W eine Umgebung von p und $h: W \rightarrow \Omega$ ein solcher Diffeomorphismus. Setzen wir

$$f = (h_{n+1}, \dots, h_{n+m}): W \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

so ist f differenzierbar und $f(M \cap W) = 0^m$. Außerdem ist 0^m ein regulärer Wert, da der Rang von Dh in allen Punkten maximal ist. \gggg

Kehren wir die Abbildung h des letzten Satzes um und ignorieren die Koordinaten außerhalb von M , so erhalten wir ein *lokales Koordinatensystem* auf M . Die Existenz solcher Koordinaten ist ebenfalls charakteristisch für eine Mannigfaltigkeit.

Abb 3 Ein- und zweidimensionales Koordinatensystem



2 **Satz** Eine nichtleere Teilmenge M des \mathbb{R}^{n+m} ist eine n -Mannigfaltigkeit genau dann, wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebung $W \subset \mathbb{R}^{n+m}$, ein Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine differenzierbare Abbildung $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

- (K-1) φ ist injektiv mit $\text{rang } D\varphi \equiv n$,
- (K-2) $\varphi(U) = M \cap W$,
- (K-3) $\varphi^{-1}: \varphi(U) \rightarrow U$ ist stetig.

Eine solche Abbildung φ heißt *lokales Koordinatensystem* oder *Karte* um den Punkt p . \times

⟨⟨⟨⟨ \Rightarrow Eine n -Mannigfaltigkeit M ist lokal um jeden Punkt $p \in M$ der Graph einer Abbildung $\phi: U \rightarrow V$ wie im vorangehenden Beweis. Dann ist die erweiterte Abbildung

$$\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}, \quad \varphi(u) = (u, \phi(u))$$

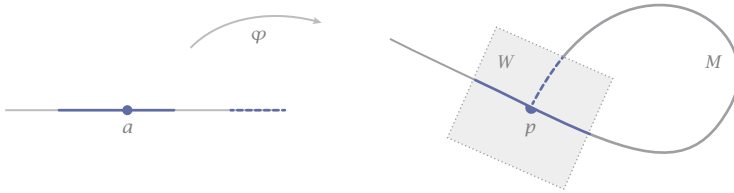
offensichtlich ein Koordinatensystem um p .

\Leftarrow Sei nun umgekehrt W eine Umgebung von p und $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ eine Abbildung mit den Eigenschaften (K-1)-(K-3). Wir können die Koordinaten in \mathbb{R}^{n+m} so umordnen, dass die ersten n Spalten der Jacobimatrix von φ linear unabhängig sind. Damit wird die Abbildung

$$\chi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

im Punkt $a = \varphi^{-1}(p)$ regulär. Auf einer nötigenfalls etwas kleineren Umgebung U erhalten wir so einen Diffeomorphismus $\chi: U \rightarrow \tilde{U}$ mit der Eigenschaft,

Abb 4 Keine Mannigfaltigkeit



dass

$$\tilde{\varphi} = \varphi \circ \chi^{-1} : \tilde{U} \rightarrow W$$

in den ersten n Koordinaten zur Identität wird. Es gilt dann

$$\varphi(U) = \varphi \circ \chi^{-1}(\tilde{U}) = \tilde{\varphi}(\tilde{U}) = \Gamma(\phi),$$

wenn ϕ aus den letzten m Koordinaten von $\tilde{\varphi}$ besteht.

Außerdem existiert eine Umgebung W von p , so dass $\Gamma(\phi) = M \cap W$. Denn andernfalls gäbe es eine Folge (p_k) von Punkten auf M mit $p_k \rightarrow p$ und $\varphi^{-1}(p_k) \notin U$. Dann aber ist φ^{-1} im Punkt p nicht stetig, im Widerspruch zu Annahme (K-3). Also ist M eine n -Mannigfaltigkeit. \gggg

Bemerkung Bedingung (K-3) ist erforderlich, um Gebilde wie in Abbildung 4 als Mannigfaltigkeit auszuschließen. Jede Umgebung W von p enthält auch Punkte auf den gestrichelten Ende von M , die gegen p konvergieren. Entlang dieser Folge konvergiert φ^{-1} jedoch nicht gegen $\varphi^{-1}(p)$, ist also unstetig. \rightarrow

Wir halten noch fest, dass der Wechsel zwischen zwei Koordinatensystemen einen Diffeomorphismus definiert, wenn sich ihre Kartengebiete überlappen.

3 Lemma Sei M eine n -Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^{n+m} . Sind

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}, \quad \alpha = 1, 2,$$

zwei überlappende Koordinatensysteme von M , also die Mengen

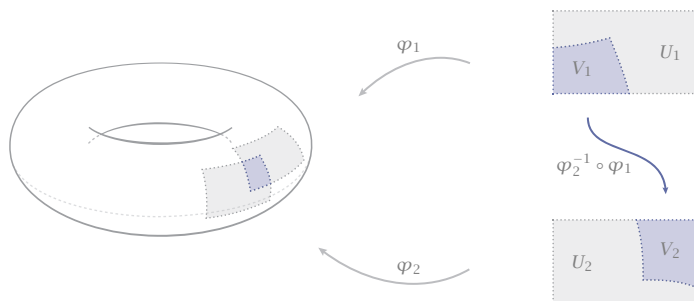
$$V_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2)), \quad \alpha = 1, 2,$$

nicht leer, so sind die beiden Koordinatenwechsel

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : V_1 \rightarrow V_2, \quad \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : V_2 \rightarrow V_1,$$

n -dimensionale Diffeomorphismen. \times

Abb 5 Koordinatenwechsel



««« Die Abbildungen sind auf jeden Fall bijektiv. Mit den Bezeichnungen des Beweises des ersten Satzes ist

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = \pi_n \circ h_2 \circ \varphi_1 = \pi_n \circ h_2 \circ h_1|_{U_1 \times 0^m},$$

wobei π_n die Projektion auf die ersten n Koordinaten bezeichnet. Also ist

$$\det D(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1) \neq 0.$$

Somit ist $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ ein Diffeomorphismus. — Aus Symmetriegründen gilt Entsprechendes auch für $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$. »»»

■ **Mannigfaltigkeiten mit Rand**

Jeder Punkt einer n -Mannigfaltigkeit M ist umgeben von einem n -dimensionalen Kartengebiet. In diesem Sinne ist jeder Punkt von M ein *innerer Punkt* von M und kein *Randpunkt*. Für den Satz von Stokes benötigen wir aber auch *Mannigfaltigkeiten mit Rand*.

Das euklidische Modell hierfür ist der abgeschlossene Halbraum

$$\mathbb{H}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geq 0\}.$$

Abb 6 Eindimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand

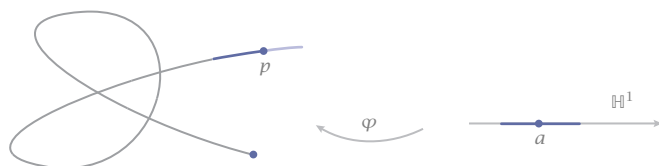
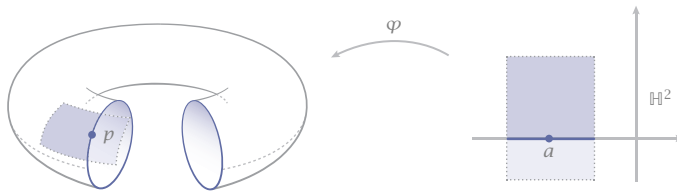


Abb 7 Zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand



Jeder Punkt x in \mathbb{H}^n mit $x_n > 0$ ist ein innerer Punkt von \mathbb{H}^n , und der Rand dieses Halbraums ist die Hyperebene

$$\partial\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\} = \mathbb{R}^{n-1} \times 0^1.$$

So ist \mathbb{H}^1 das abgeschlossene Intervall $[0, \infty)$, und \mathbb{H}^2 die obere abgeschlossene Halbebene.

- 4 **Definition** Eine nichtleere Teilmenge M des \mathbb{R}^{n+m} heißt *n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand* oder kurz *berandete n-Mannigfaltigkeit*, wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebung $W \subset \mathbb{R}^{n+m}$ und einen Diffeomorphismus $h: W \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ gibt, so dass entweder

$$h(M \cap W) \subset \mathbb{R}^n \times 0^m \quad (\iota)$$

oder

$$h(M \cap W) \subset \mathbb{H}^n \times 0^m, \quad h(p) \in \partial\mathbb{H}^n \times 0^m. \quad (\delta)$$

Der **Rand** ∂M von M besteht aus allen Punkten in M mit Eigenschaft (δ) . \times

Man beachte, dass beide Bedingungen nicht gleichzeitig erfüllt sein können. Denn gäbe es um ein und denselben Punkt p Diffeomorphismen h_ι und h_δ mit den jeweiligen Eigenschaften, so wäre $h_\delta \circ h_\iota^{-1}$ ein Diffeomorphismus, der eine offene Umgebung von $h_\iota(p)$ auf eine nicht-offene Umgebung von $h_\delta(p)$ abbildet, was nicht möglich ist.

► A. Jede Mannigfaltigkeit ist auch eine Mannigfaltigkeit mit Rand, ihr Rand ist in diesem Fall leer.

B. Jede abgeschlossene n -dimensionale Kugel im \mathbb{R}^n ist eine kompakte berandete n -Mannigfaltigkeit, ihr Rand ist eine $n - 1$ -dimensionale Sphäre.

C. Ein Volltorus ist eine kompakte berandete 3-Mannigfaltigkeit, sein Rand ist ein ›hohler‹ 2-dimensionaler Torus. ◀

Achtung Der Mannigfaltigkeiten-Rand ist nicht zu verwechseln mit dem topologischen Rand ∂D . Ist zum Beispiel D eine abgeschlossene Kreisscheibe im \mathbb{R}^2 , so ist ihr Mannigfaltigkeiten-Rand eine Kreiskurve, aber ihr topologischer Rand ist ganz D . \rightarrow

23.2

Vektorfelder, Formen und Orientierung

Ausgehend von der Beschreibung einer Mannigfaltigkeit durch lokale Koordinaten definieren wir nun Konstrukte wie Tangentialräume, Differenzialformen und Orientierungen auf Mannigfaltigkeiten.

■ Tangentialbündel und Vektorfelder

Sei M eine n -Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^{n+m} und

$$\varphi : \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow W \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

ein lokales Koordinatensystem um einen Punkt $p \in M$. Der Tangentialraum im Punkt $a = \varphi^{-1}(p)$ ist der Raum \mathbb{R}^n selbst, den wir uns mit seinem Nullpunkt an den Punkt a angeheftet vorstellen. Die Tangentialabbildung $\varphi_* := D\varphi$ bildet diesen in einen Unterraum des \mathbb{R}^{n+m} ab, den wir uns mit seinem Nullpunkt am Punkt p angeheftet vorstellen. Diese Abbildung

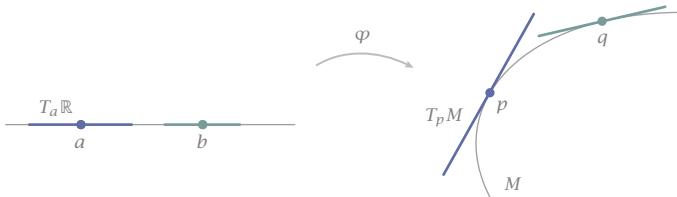
$$\varphi_* : T_a \mathbb{R}^n \rightarrow T_p \mathbb{R}^{n+m}, \quad v \mapsto D\varphi(a) v$$

ist injektiv, da $D\varphi$ maximalen Rang hat.

Das Bild $\varphi_*(T_a \mathbb{R}^n)$ ist also ein n -dimensionaler Unterraum von $T_p \mathbb{R}^{n+m}$. Dieser Raum hängt *nicht* von der Wahl der Koordinaten ab. Ist $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow W$ ein weiteres Koordinatensystem um p , so ist

$$\chi = \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n$$

Abb 8 Tangentialräume



ein lokaler Diffeomorphismus um a_3 . Damit ist

$$\varphi = \tilde{\varphi} \circ \chi, \quad \varphi_* = \tilde{\varphi}_* \circ \chi_*.$$

Da χ_* den Raum $T_a\mathbb{R}^n$ isomorph auf den Raum $T_{\tilde{a}}\mathbb{R}^n$ mit $\tilde{a} = \chi(a)$ abbildet, folgt

$$\varphi_*(T_a\mathbb{R}^n) = \tilde{\varphi}_*(T_{\tilde{a}}\mathbb{R}^n).$$

Somit hängt dieser Raum nicht vom Koordinatensystem ab, und folgende Definition ist gerechtfertigt.

Definition Sei M eine n -Mannigfaltigkeit. Ist $\varphi: U \rightarrow W$ ein Koordinatensystem um $p = \varphi(a) \in M$, so heißt

$$T_pM := \varphi_*(T_a\mathbb{R}^n)$$

der *Tangentialraum* von M an der Stelle p . Die Vereinigung

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_pM$$

aller dieser Tangentialräume heißt das *Tangentialbündel* von M . \times

Für gleichungsdefinierte Mannigfaltigkeiten stimmt diese Definition mit der früheren ^{18,17} überein.

Definition Ein *Vektorfeld* auf einer Mannigfaltigkeit M ist eine Abbildung

$$F: M \rightarrow TM$$

mit der Eigenschaft, dass $F(p) \in T_pM$ für alle $p \in M$. \times

Ein Vektorfeld $F: M \rightarrow TM$ ordnet also jedem Punkt $p \in M$ einen Vektor im darüberliegenden Tangentialraum T_pM zu. Ist

$$\pi: TM \rightarrow M, \quad T_pM \mapsto p$$

die kanonische Projektion des Tangentialbündels auf den Fußpunkt eines jeden Tangentialraumes, so gilt also

$$\pi \circ F = id_M.$$

Abbildungen dieser Art werden als *Schnitte* in einem Bündel über M bezeichnet.

Ein Vektorfeld F auf M ist nicht notwendigerweise auf einer Umgebung von M erklärt. Somit ist *a priori* nicht klar, wann F differenzierbar heißen soll. Dazu greifen wir auf lokale Koordinatensysteme zurück. — In jedem lokalen Koordinatensystem $\varphi: U \rightarrow W$ existiert ein eindeutiges Vektorfeld G auf U mit

$$F \circ \varphi = D\varphi \cdot G.$$

Für dieses Vektorfeld schreibt man auch

$$\varphi^*F := D\varphi^{-1}F \circ \varphi : U \rightarrow TU$$

und nennt es das auf U *zurückgeholte Vektorfeld*. Wir *definieren* dann ein Vektorfeld auf M als *differenzierbar*, wenn es zu jedem Punkt ein Koordinatensystem gibt, in dem das zurückgeholte Vektorfeld im üblichen Sinne differenzierbar ist. Da der Wechsel zwischen verschiedenen Koordinatensystemen differenzierbar ist, hängt diese Definition nicht von deren Wahl ab.

■ Differenzialformen

Fassen wir den Tangentialraum T_pM als Unterraum von $T_p\mathbb{R}^{n+m}$ auf, so ist der Raum $\Lambda_p^k M$ der alternierenden k -Formen im Punkt p nichts anderes als die Einschränkung dieser k -Formen auf T_pM . Das Bündel aller dieser Räume ist

$$\Lambda^k M := \bigcup_{p \in M} \Lambda_p^k M.$$

Eine *Differenzialform vom Grad k* oder kurz *k -Form* auf einer Mannigfaltigkeit M ist dann eine Abbildung

$$\omega : M \rightarrow \Lambda^k M$$

mit der Eigenschaft, dass $\pi \circ \omega = id_M$. Diese können wir darstellen als

$$\omega = \sum_{1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq n+m} \omega_{\mu_1, \dots, \mu_k} dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k},$$

wobei die Komponentenfunktionen $\omega_{\mu_1}, \dots, \omega_{\mu_k}$ im Allgemeinen nur auf M erklärt sind. Differenzierbarkeit und äußere Ableitung müssen wir daher wieder durch Rückgriff auf lokale Koordinaten erklären.

So heißt ω differenzierbar, wenn es zu jedem Punkt ein Koordinatensystem gibt, in dem die zurückgeholte Form im üblichen Sinne differenzierbar ist. Da der Wechsel zwischen verschiedenen Koordinatensystemen differenzierbar ist, hängt diese Definition nicht von deren Wahl ab. Etwas mehr Sorgfalt erfordert die Definition der äußeren Ableitung.

Satz und Definition *Zu jeder differenzierbaren k -Form ω auf einer Mannigfaltigkeit M existiert genau eine $k+1$ -Form $d\omega$ auf M , so dass*

$$\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega)$$

*in jedem Koordinatensystem φ auf M . Diese Form heißt die *äußere Ableitung* von ω . ✕*

««« Wir definieren $d\omega$ durch seine Wirkung auf $k + 1$ Tangentialvektoren

$$w_1, \dots, w_{k+1} \in T_p M.$$

In einem Koordinatensystem φ um $p = \varphi(a)$ gehen diese über in die Vektoren

$$v_\mu = \varphi^* w_\mu \in T_a \mathbb{R}^n, \quad 1 \leq \mu \leq k + 1.$$

Existierte das äußere Differenzial $d\omega$ in der üblichen Weise, so wäre nun 22.8

$$\begin{aligned} d\omega(w_1, \dots, w_{k+1}) &= d\omega(\varphi_* v_1, \dots, \varphi_* v_{k+1}) \\ &= (\varphi^* d\omega)(v_1, \dots, v_{k+1}) = d(\varphi^* \omega)(v_1, \dots, v_{k+1}). \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck existiert aber in jedem Fall, wenn wir ω als differenzierbar voraussetzen. Wir *definieren* also die $k + 1$ -form $d\omega$ durch

$$d\omega(w_1, \dots, w_{k+1}) := d(\varphi^* \omega)(\varphi^* w_1, \dots, \varphi^* w_{k+1}).$$

In der üblichen Weise zeigt man, dass dies nicht von der Wahl des Koordinatensystems abhängt. »»»

■ Orientierung

Für die Integrationstheorie und den Satz von Stokes müssen wir Mannigfaltigkeiten noch mit einer Orientierung versehen. Dazu treffen wir folgende

Vereinbarung *Der euklidische Raum \mathbb{R}^n sei mit der Orientierung der Standardbasis $[e_1, \dots, e_n]$ sowie dem Standardskalarprodukt $\langle v, w \rangle$ versehen. ✕*

Einem einzelnen Punkt p einer Mannigfaltigkeit M ordnen wir eine Orientierung zu, indem wir den Tangentialraum $T_p M$ mit einer Orientierung

$$\varrho(p) := [v_1, \dots, v_n](p)$$

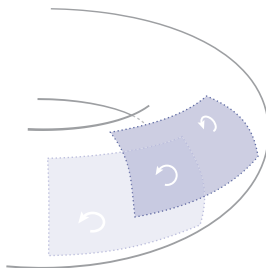
versehen, also eine angeordnete Basis (v_1, \dots, v_n) von $T_p M$ auswählen. Natürlich ist es nicht sinnvoll, dabei völlig willkürlich vorzugehen. Vielmehr sollte die Wahl dieser Orientierungen in einer konsistenten Weise erfolgen.

Innerhalb *eines* Koordinatensystems φ ist dies kein Problem. Hier nennen wir eine Wahl von Orientierungen konsistent, wenn auf dem gesamten Kartengebiet entweder $\varrho = [\varphi_* e_1, \dots, \varphi_* e_n]$ oder $\varrho = -[\varphi_* e_1, \dots, \varphi_* e_n]$ gilt - also *alle* Orientierungen entweder mit der Standardorientierung des \mathbb{R}^n übereinstimmen oder entgegengesetzt sind.

Eine solche konsistente Wahl können wir immer erreichen, indem wir ϱ auf dem Kartengebiet auf eine dieser beiden Weisen einfach *festlegen*. Haben wir aber eine solche Wahl getroffen, so pflanzt sie sich über überlappende Koordinatensysteme hinweg auf ganz M fort. Und dies kann zu Konflikten führen.

Abb 9

Zwei Kartengebiete
mit Orientierung



▶ Das *Möbiusband* entsteht, indem man die Enden eines Papierstreifen nach einer halben Drehung zusammenklebt. Beide Seiten des Papierbandes bilden dann eine einzige Fläche. Diese ist *nicht orientierbar*. Denn wählen wir in einem beliebigen Punkt p eine Orientierung, so führt deren stetige Fortsetzung nach einem Umlauf um das Band zur entgegengesetzten Orientierung in p . Eine überall konsistente Wahl von Orientierungen ist daher nicht möglich. ◀

Definition Eine Mannigfaltigkeit M heißt *orientierbar*, wenn jedem Punkt eine Orientierung so zugeordnet werden kann, dass sie in jedem lokalen Koordinatensystem konsistent ist. Eine Mannigfaltigkeit mit einer solchen Wahl heißt *orientierte Mannigfaltigkeit*. ✕

▶ Eine gleichungsdefinierte Mannigfaltigkeit $M = f^{-1}(0)$ ist orientierbar. Denn die Gradienten der Komponentenfunktionen,

$$n_k = \nabla f_k, \quad 1 \leq k \leq m,$$

bilden eine stetige Familie von Normalenvektoren an M und fixieren damit eine konsistente Orientierung $[n_1, \dots, n_m]$ des Normalenbündels $T^\perp M$. Dies induziert eine konsistente Orientierung $[v_1, \dots, v_n]$ des Tangentialbündels, indem wir fordern, dass

$$[v_1, \dots, v_n, n_1, \dots, n_m] = [e_1, \dots, e_{n+m}]. \quad \blacktriangleleft$$

Abb 10

Das Möbiusband

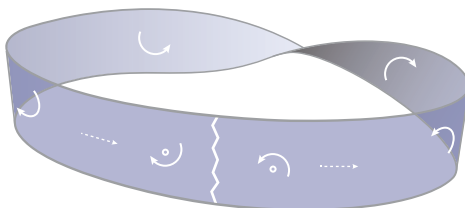
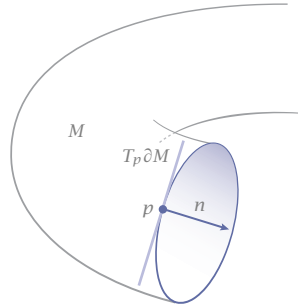


Abb 11

Tangentialraum und
äußere Normale an
einem Randpunkt



■ Mannigfaltigkeiten mit Rand

Unsere Definitionen von Tangentialraum, Vektorfeldern und Differentialformen übertragen sich ohne große Mühe auf Mannigfaltigkeiten mit Rand. Bei der Orientierung ergibt sich dabei ein zusätzlicher Aspekt.

Sei M eine n -Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist ∂M eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n - 1$, denn in jedem Koordinatensystem um einen Randpunkt p von M ist er das Bild eines Teils von $\partial\mathbb{H}^n$. Für die Tangentialräume gilt daher

$$T_p(\partial M) \subset T_p M.$$

Genauer ist $T_p(\partial M)$ ein linearer Unterraum von $T_p M$ der Kodimension 1. Somit ist $T_p^\perp(\partial M) \cap T_p M$ ein eindimensionaler Unterraum, und es existieren genau zwei normierte Tangentialvektoren, die senkrecht auf der Randmannigfaltigkeit stehen. Von diesen zeigt genau einer nach *außen*. In einem Koordinatensystem φ um den Randpunkt p ist dies gleichbedeutend damit, dass die letzte Komponente des zurückgeholten Normalenvektors $\varphi^* n(p)$ negativ ist. Diese Charakterisierung ist koordinatenunabhängig, denn jedes Koordinatensystem um einen Randpunkt bildet sowohl $\partial\mathbb{H}^n$ als auch \mathbb{H}^n in sich ab.

Abb 12

Induzierte
Orientierung des Randes

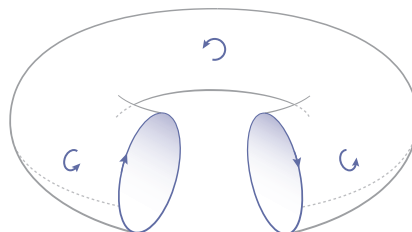
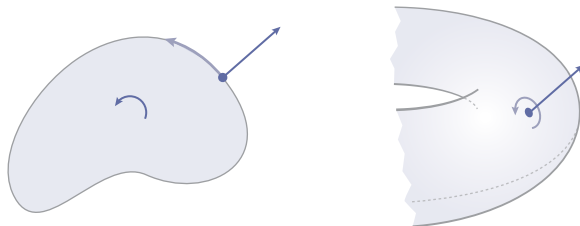


Abb 13

Induzierte Orientierung
des Randes einer Fläche
und des Volltorus



Satz und Definition Ist M eine Mannigfaltigkeit mit Rand, so existiert in jedem Randpunkt p von M ein eindeutiger *auswärts gerichteter Normaleinheitsvektor* $n(p)$, kurz *äußere Normale* genannt. \times

Mithilfe der äußeren Normalen können wir auf einer *orientierten* Mannigfaltigkeit mit Rand eine eindeutige *induzierte Orientierung* des Randes erklären.

Satz und Definition Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist auch der Rand ∂M eine orientierte Mannigfaltigkeit, und die *induzierte Orientierung* $\partial\varrho$ im Punkt $p \in \partial M$ ist gegeben durch

$$(\partial\varrho)(p) = [v_1, \dots, v_{n-1}]$$

mit denjenigen Basen (v_1, \dots, v_{n-1}) von $T_p\partial M$, für die

$$[n, v_1, \dots, v_{n-1}](p) = \varrho(p). \quad \times$$

⟨⟨⟨ Damit diese Festlegung sinnvoll ist, müssen wir zeigen, dass verschiedene Basen von $T_p\partial M$ mit dieser Eigenschaft gleichorientiert sind. Seien also (v_1, \dots, v_{n-1}) und (w_1, \dots, w_{n-1}) zwei Basen von $T_p\partial M$ mit

$$[n, v_1, \dots, v_{n-1}] = [n, w_1, \dots, w_{n-1}].$$

Ein Basiswechsel zwischen diesen beiden Basen ist eine lineare Transformation T mit $\det T > 0$ und $Tn = n$. Also hat T die Blockmatrixdarstellung

$$T = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

mit einer $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix A . Also ist auch $\det A > 0$ und somit

$$[v_1, \dots, v_{n-1}] = [w_1, \dots, w_{n-1}]. \quad \rangle\rangle\rangle$$

Bemerkung Die Bedingung an den Vektor n ist so gewählt, dass der Rand einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit in der Ebene *positiv*, und die Oberfläche einer Kugel, von außen gesehen, wie die euklidische Ebene orientiert ist Abb 13. \rightarrow

23.3

Der Satz von Stokes

Nun geht es um das Integral einer n -Form ω über eine n -Mannigfaltigkeit M . Dabei betrachten wir zuerst den Fall, dass der Träger von ω ganz in einem n -Würfel c enthalten ist, der sich durch Einschränkung eines Koordinatensystem φ auf den Standardwürfel ergibt, also durch

$$c = \varphi|_{\mathbb{I}^n}$$

gegeben ist. Dies ist keine wesentliche Einschränkung, da sich jedes Koordinatensystem durch Verschieben und Strecken der Koordinaten in ein Koordinatensystem $\varphi: U \rightarrow W$ mit $U \supset \mathbb{I}^n$ überführen lässt. Ist M orientierbar, so heißt c *orientierungserhaltend*, wenn es φ ist. Nur solche Würfel wollen wir im Folgenden betrachten und definieren hierfür

$$\int_M \omega := \int_c \omega = \int_{\mathbb{I}^n} c^* \omega = \int_{\mathbb{I}^n} \varphi^* \omega.$$

Diese Definition ist gerechtfertigt, denn das Integral hängt nicht vom Koordinatensystem ab.

Lemma Sei ω eine n -Form auf der orientierten n -Mannigfaltigkeit M . Sind c_1 und c_2 zwei orientierungserhaltende n -Würfel in M und

$$\text{supp } \omega \subset c_1(\mathbb{I}^n) \cap c_2(\mathbb{I}^n),$$

so gilt

$$\int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega. \quad \times$$

⟨⟨⟨⟨ Sei $V_\alpha = c_\alpha^{-1}(\text{supp } \omega)$ für $\alpha = 1, 2$. Dann ist

$$\chi := c_2^{-1} \circ c_1 : V_1 \rightarrow V_2$$

ein Diffeomorphismus χ mit $c_1 = c_2 \circ \chi$, und es gilt

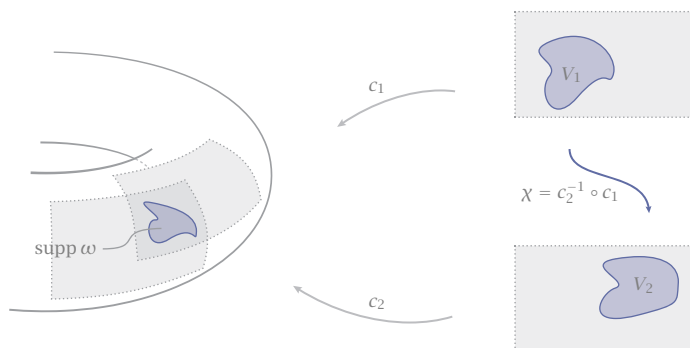
$$\int_{c_1} \omega = \int_{\mathbb{I}^n} c_1^* \omega = \int_{V_1} c_1^* \omega = \int_{V_1} \chi^* c_2^* \omega.$$

Hierbei ist $c_2^* \omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ mit einer Funktion f auf V_2 und $_{22.6}$

$$\chi^*(f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = (f \circ \chi)(\det D\chi) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Da der Koordinatenwechsel χ die Orientierung erhält, gilt

$$\det D\chi = |\det D\chi| > 0.$$

Abb 14 Träger von ω in zwei Kartengebieten

Mit $\chi(V_1) = V_2$ und der Transformationsformel 21.13 folgt daher weiter

$$\begin{aligned} \int_{V_1} \chi^* c_2^* \omega &= \int_{V_1} \chi^* (f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) \\ &= \int_{V_1} (f \circ \chi) |\det D\chi| d\lambda_n \\ &= \int_{V_2} f d\lambda_n = \int_{\mathbb{I}^n} c_2^* \omega = \int_{c_2} \omega. \quad \gggg \end{aligned}$$

■ Der allgemeine Fall

Im Allgemeinen wird der Träger einer Form nicht in einem einzigen Koordinatensystem enthalten sein – sonst wäre der ganze Aufwand mit den Mannigfaltigkeiten nicht nötig. Diesen Fall behandeln wir mithilfe einer Zerlegung der Eins. Dabei betrachten wir nur solche Zerlegungen \mathcal{T} , wo der Träger jeder Zerlegungsfunktion $\tau \in \mathcal{T}$ ganz im Bild eines n -Würfels enthalten ist. Dies lässt sich immer erreichen, indem man die Zerlegung der Eins einer Überdeckung von M durch Kartengebiete unterordnet.

Definition und Satz Sei \mathcal{T} eine Zerlegung der Eins auf M so, dass für jedes $\tau \in \mathcal{T}$ ein n -Würfel $c: \mathbb{I}^n \rightarrow M$ existiert mit

$$\text{supp } \tau \subset c(\mathbb{I}^n).$$

Für eine n -Form ω auf M sei dann

$$\int_M \omega := \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \int_M \tau \omega,$$

falls diese Reihe konvergiert. Dieses Integral ist unabhängig von \mathcal{T} . \times

⟨⟨⟨ Sei \mathcal{S} eine zweite Zerlegung der Eins auf M mit der geforderten Träger-Eigenschaft. Da der Träger jeder Zerlegungsfunktion kompakt und jede Zerlegung lokal endlich ist, sind für jedes $\tau \in \mathcal{T}$ und jedes $\sigma \in \mathcal{S}$ auch die Mengen

$$\mathcal{S}_\tau = \{\sigma \in \mathcal{S} : \sigma\tau \neq 0\}, \quad \mathcal{T}_\sigma = \{\tau \in \mathcal{T} : \tau\sigma \neq 0\}$$

endlich 21.7. Daher gilt

$$\tau = \tau \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} \sigma = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_\tau} \tau\sigma, \quad \sigma = \sigma \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \tau = \sum_{\tau \in \mathcal{T}_\sigma} \sigma\tau,$$

wobei jede Summe endlich ist. Folglich gilt auch

$$\begin{aligned} \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \int_M \tau\omega &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_\tau} \int_M \tau\sigma\omega \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} \sum_{\tau \in \mathcal{T}_\sigma} \int_M \sigma\tau\omega = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}} \int_M \sigma\omega. \quad \rangle\rangle\rangle \end{aligned}$$

Genau dieselben Definitionen gelten auch für Mannigfaltigkeiten mit Rand. Dabei ergeben sich keine neuen Schwierigkeiten. Wir sind daher jetzt in der Lage, den Satz von Stokes auf Mannigfaltigkeiten zu formulieren und zu beweisen.

- 5 **Allgemeiner Satz von Stokes** Sei M eine kompakte, orientierte, n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Für eine $n-1$ -Form ω auf M gilt dann

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

wobei ∂M mit der von M induzierten Orientierung versehen ist. \times

⟨⟨⟨ Der Beweis erfolgt in drei Schritten – zwei Spezialfälle innerhalb eines Koordinatensystems und der allgemeine Fall mit einer Zerlegung der Eins.

1. Fall Es gilt $\text{supp } \omega \subset c(\mathbb{I}^n)$ mit einem orientierungserhaltenden n -Würfel c in $M \setminus \partial M$. Aufgrund der Rechenregeln für die äußere Ableitung 22.8 und des Fundamentalsatzes im \mathbb{R}^n 22.10 gilt dann

$$\int_M d\omega = \int_c d\omega = \int_{\mathbb{I}^n} c^*(d\omega) = \int_{\mathbb{I}^n} d(c^*\omega) = \int_{\partial\mathbb{I}^n} c^*\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

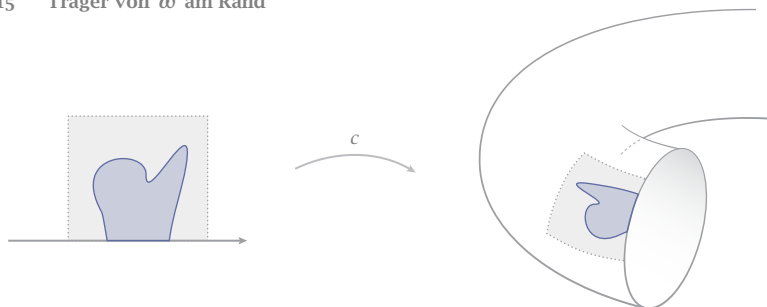
Da ω auf dem Rand von c verschwindet, ist also

$$\int_M d\omega = 0.$$

Wegen $\text{supp } \omega \subset M \setminus \partial M$ gilt andererseits ebenfalls

$$\int_{\partial M} \omega = 0.$$

Also sind beide Integrale gleich, nämlich Null, und die Behauptung ist in diesem Fall bewiesen.

Abb 15 Träger von ω am Rand

2. Fall Es gilt $\text{supp } \omega \subset c(\mathbb{I}^n)$ mit einem orientierungserhaltenden n -Würfel c in M , wobei c genau eine Seite mit ∂M gemeinsam hat. In einem in einer Umgebung von \mathbb{I}^n definierten Koordinatensystem von ∂M sei dies die $(n, 0)$ -Seite. Wir nehmen also an, dass $c_{n,0} \subset \partial M$, während alle übrigen Seiten keine inneren Punkt mit ∂M gemeinsam haben.

Da c die Orientierung von M erhält, ist

$$\varrho_M = [\partial_1 c, \dots, \partial_n c].$$

Die $(n, 0)$ -Seite von c ist

$$\check{c} := c \circ I_{n,0}^n = c \Big|_{x_n=0}.$$

Somit ist $\partial_k \check{c} = \partial_k c$ für $1 \leq k \leq n-1$. Außerdem weist die äußere Normale von M im Bereich dieses Würfels in die Richtung von $-\partial_n c$, da die Punkte mit $0 \leq x_n \leq 1$ innerhalb von M liegen. Also gilt für die Orientierung des Randes

$$\begin{aligned} \varrho_{\partial M} &= [n, \partial_1 \check{c}, \dots, \partial_{n-1} \check{c}] \\ &= -[\partial_n c, \partial_1 c, \dots, \partial_{n-1} c] \\ &= -(-1)^{n-1} [\partial_1 c, \dots, \partial_n c] \\ &= (-1)^n \varrho_M. \end{aligned}$$

Also ist aufgrund des Fundamentalsatzes im \mathbb{R}^n 22.10

$$\int_M d\omega = \int_c d\omega = (-1)^n \int_{\partial c} \omega.$$

Nun ist aber \check{c} die einzige Seite von c , auf der ω nicht verschwindet. Ferner ist \check{c} ein $n-1$ -Würfel in ∂M , der den Träger von ω innerhalb von ∂M enthält. Also gilt weiter

$$\int_{\partial c} \omega = (-1)^n \int_{c_{n,0}} \omega = (-1)^n \int_{\partial M} \omega.$$

Die letzten beiden Identitäten ergaben damit die Behauptung auch in diesem Fall.

3. Fall Betrachte nun den allgemeinen Fall. Wähle dazu eine Zerlegung der Eins \mathcal{T} auf M so, dass für jedes $\tau \in \mathcal{T}$ auf $\tau\omega$ der erste oder zweite Fall zutrifft. Da M kompakt ist, kann diese Zerlegung sogar endlich gewählt werden^{21.7}. Für die konstante Funktion 1 gilt dann

$$0 = d(1) = d \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \tau = \sum_{\tau \in \mathcal{T}} d\tau,$$

wobei die Summe endlich ist. Also gilt auch

$$\sum_{\tau \in \mathcal{T}} d\tau \wedge \omega = 0.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_M d\omega &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \int_M \tau d\omega \\ &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \int_M (d\tau \wedge \omega + \tau d\omega) \\ &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \int_M d(\tau\omega) \\ &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \int_{\partial M} \tau\omega \\ &= \int_{\partial M} \omega. \end{aligned}$$

That's it. >>>>

Bemerkung Der Satz von Stokes ist falsch für *nicht kompakte* Mannigfaltigkeit mit Rand. Denn in diesem Fall ist auch $M \setminus \partial M$ eine Mannigfaltigkeit mit Rand, nur ist der Rand hier die leere Menge. Es ist also in jedem Fall

$$\int_{\partial M} \omega = 0.$$

Es gibt aber $n - 1$ -Formen ω auf M mit

$$\int_M d\omega \neq 0.$$

Auf nicht kompakten Mannigfaltigkeit gilt der Satz vielmehr mit der zusätzlichen Annahme, dass $\text{supp } \omega$ kompakt ist. Der Beweis bleibt derselbe. \rightarrow

■ Die Sätze von Gauss und Stokes

Für zwei- und dreidimensionale Mannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^3 ergibt der Satz von Stokes die klassischen Integralsätze der Vektoranalysis. Dafür definieren wir das *vektorielle Linienelement*

$$d\vec{s} := (dx_1, dx_2, dx_3)^\top$$

und das *vektorielle Flächenelement*

$$d\vec{A} := (dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2)^\top.$$

Das *Volumenelement* ist nach wie vor $dV = dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.

Außerdem erinnern wir an die Definition des Nablaoperators. Sind die Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ und das Vektorfeld $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ differenzierbar, so heißen

$$\nabla f := \text{grad } f := (\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f)^\top,$$

$$\nabla \cdot F := \text{div } F := \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \partial_3 F_3,$$

$$\nabla \times F := \text{rot } F := (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)^\top$$

der *Gradient* von f sowie die *Divergenz* und *Rotation* von F .

Lemma Für differenzierbares $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ und $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gilt

$$df = \text{grad } f \cdot d\vec{s},$$

$$d(F \cdot d\vec{s}) = \text{rot } F \cdot d\vec{A},$$

$$d(F \cdot d\vec{A}) = \text{div } F \, dV.$$

Außerdem gilt immer

$$\nabla \times \nabla f = \text{rot grad } f = 0,$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times F) = \text{div rot } F = 0. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Die erste Identität ist offensichtlich. Die zweite ergibt sich mit

$$\begin{aligned} & d(F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3) \\ &= \partial_2 F_1 dx_2 \wedge dx_1 + \partial_3 F_1 dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + \partial_1 F_2 dx_1 \wedge dx_2 + \partial_3 F_2 dx_3 \wedge dx_2 \\ &\quad + \partial_1 F_3 dx_1 \wedge dx_3 + \partial_2 F_3 dx_2 \wedge dx_3 \\ &= (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2) dx_2 \wedge dx_3 + (\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3) dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) dx_1 \wedge dx_2. \end{aligned}$$

Und die dritte folgt mit

$$\begin{aligned} & d(F_1 dx_2 \wedge dx_3 + F_2 dx_3 \wedge dx_1 + F_3 dx_1 \wedge dx_2) \\ &= \partial_1 F_1 dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \text{zyklische Vertauschungen} \\ &= (\partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \partial_3 F_3) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3. \end{aligned}$$

Mit diesen Identitäten und $d \circ d = 0$ folgt schließlich

$$\begin{aligned} 0 &= d^2 f &= d(\text{grad } f \bullet d\vec{s}) &= \text{rot grad } f \bullet d\vec{A}, \\ 0 &= d^2(F \bullet d\vec{s}) &= d(\text{rot } F \bullet d\vec{A}) &= \text{div rot } F \bullet dV. \quad \gggg \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die folgenden Sätze der Vektoranalysis. Der Satz von Gauss wird auch *Divergenzsatz* genannt.

- 6 **Satz von Gauss** Sei M^3 eine kompakte orientierte 3-Mannigfaltigkeit mit Rand. Ist das Vektorfeld F in einer Umgebung von M^3 differenzierbar, so gilt

$$\int_{\partial M^3} F \bullet d\vec{A} = \int_{M^3} d(F \bullet d\vec{A}) = \int_{M^3} \text{div } F \, dV. \quad \times$$

- 7 **Satz von Stokes** Sei M^2 eine kompakte orientierte 2-Mannigfaltigkeit mit Rand. Ist das Vektorfeld F in einer Umgebung von M^2 differenzierbar, so gilt

$$\int_{\partial M^2} F \bullet d\vec{s} = \int_{M^2} d(F \bullet d\vec{s}) = \int_{M^2} \text{rot } F \bullet d\vec{A}. \quad \times$$

Der Fundamentalsatz für Wegintegrale gehört ebenfalls dazu.

- Satz von Fund** Sei M^1 eine kompakte orientierte 1-Mannigfaltigkeit mit Rand. Ist die Funktion f in einer Umgebung von M^1 differenzierbar, so gilt

$$\int_{\partial M^1} f = \int_{M^1} df = \int_{M^1} \text{grad } f \bullet d\vec{s}. \quad \times$$

23.4

Das Volumelement

Um die Integralsätze in klassischer Form zu notieren, benötigen wir noch das skalare Linien-, Flächen- und Volumelement. Zunächst der Standardraum.

- Lemma** Im euklidischen n -Raum gibt es genau eine alternierende n -Form ω , das *Volumelement*, so dass

$$\omega(v_1, \dots, v_n) = 1$$

für jede positiv orientierte Orthonormalbasis v_1, \dots, v_n . \times

⟨⟨⟨ Ist v_1, \dots, v_n irgendeine positiv orientierte Orthonormalbasis, so gibt es genau eine n -Form ω mit $\omega(v_1, \dots, v_n) = 1$, denn $\Lambda^n \mathbb{R}^n$ ist eindimensional. Ist w_1, \dots, w_n eine weitere positiv orientierte Orthonormalbasis, so ist der Basiswechsel T mit $Tv_\mu = w_\mu$ für $1 \leq \mu \leq n$ eine orientierungserhaltende, *orthogonale* Transformation. Also ist $\det T = 1$, und deshalb ^{22.4}

$$\begin{aligned}\omega(w_1, \dots, w_n) &= \omega(T_* v_1, \dots, T_* v_n) \\ &= T^* \omega(v_1, \dots, v_n) \\ &= (\det T) \omega(v_1, \dots, v_n) = 1.\end{aligned}$$

Also gibt es nur eine solche Form ω . ⟩⟩⟩

Ist M eine orientierte n -Mannigfaltigkeit, so ist jeder Tangentialraum ein orientierter n -dimensionaler Untervektorraum des Umgebungsraumes. Somit existiert in jedem Punkt p ein eindeutiges Volumelement $\omega(p)$. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass dies eine *differenzierbare n -Form* auf M definiert.

Definition Die auf diese Weise auf einer orientierten Mannigfaltigkeit M definierte n -Form heißt das *Volumenelement* auf M und wird mit dV bezeichnet. Die reelle Zahl

$$|M| := \int_M dV$$

heißt das *Volumen* von M . ✕

Bemerkung Die Bezeichnung dV bedeutet *nicht*, dass es sich um das Differenzial einer Funktion handelt. Es ist nur eine historisch bedingte Schreibweise. →

▶ Auf einer n -Mannigfaltigkeit M im \mathbb{R}^n , also einem Gebiet im \mathbb{R}^n , ist

$$dV = dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

und

$$|M| = \int_M dV = \int_M 1$$

das klassische Volumen von M , wenn dieses Integral endlich ist. ◀

Im eindimensionalen Fall bezeichnet man dieses Volumelement auch als *Linienelement* ds , im zweidimensionalen Fall als *Flächenelement* dA , und reserviert dV für das dreidimensionale Volumelement. Diese haben eine einfache geometrische Interpretation,.

8 Lemma Sind u, v, w positiv orientierte Tangentialvektoren an eine orientierte 1-, 2- respektive 3-Mannigfaltigkeit, so ist

- (i) $ds(u)$ die Länge des Vektors u ,
- (ii) $dA(u, v)$ der Flächeninhalt des Parallelogramms mit Seiten u, v ,
- (iii) $dV(u, v, w)$ das Volumen des Spates mit Seiten u, v, w . \times

⟨⟨⟨ Wir zeigen (ii). Wir können in T_pM eine Orthonormalbasis e_1, e_2 so wählen, dass $u = \lambda e_1$ mit $\lambda > 0$ und $v = \mu e_2 + \nu e_1$. Dann ist $\mu > 0$, da u und v positiv orientiert sind, und

$$dA(u, v) = dA(\lambda e_1, \mu e_2) = \lambda \mu dA(e_1, e_2) = \lambda \mu.$$

Dies ist gerade der Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Seiten u und v . ⟩⟩⟩

■ Das Linien- und das Flächenelement

Wir beschreiben das Linien- und das Flächenelement noch etwas genauer.

- 9 **Satz** Sei M eine orientierte 1-Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^n . Mit dem Tangenteneinheitsvektor T an M gilt dann

$$ds = T_1 dx_1 + \dots + T_n dx_n,$$

sowie auf TM

$$T_\nu ds = dx_\nu, \quad 1 \leq \nu \leq n. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Ist $\nu \in T_pM$ positiv orientiert, so ist $T = \nu / \|\nu\|$ und g

$$\begin{aligned} ds(\nu) &= \|\nu\| = \langle T, \nu \rangle = T_1 \nu_1 + \dots + T_n \nu_n \\ &= (T_1 dx_1 + \dots + T_n dx_n)(\nu). \end{aligned}$$

Dies ergibt die erste Identität. Die zweite Identität muss nur für den Vektor T verifiziert werden, da er in jedem Punkt den Tangentialraum aufspannt. Mit $ds(T) = 1$ ergibt sich dies aus

$$T_\nu ds(T) = T_\nu = dx_\nu(T). \quad \rangle\rangle\rangle$$

Nun zum Flächenelement. Sei M eine orientierte 2-Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^3 . Auch wenn diese nicht als Rand einer 3-Mannigfaltigkeit auftritt, können wir ihr eine eindeutige ›äußere‹ Normale wie folgt zuordnen.

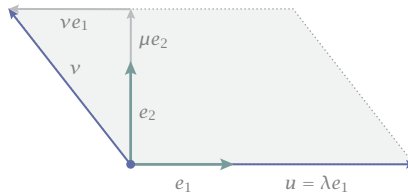
Seien $\nu, w \in T_pM$ positiv orientiert. Dann steht der Vektor $\nu \times w$ senkrecht auf T_pM , und n sei derjenige Einheitsvektor in dieser Richtung mit

$$[n, \nu, w] = [e_1, e_2, e_3].$$

In diesem Fall bilden n, ν, w ein *rechtshändiges Dreibein*: die Vektoren n, ν, w weisen, in dieser Reihenfolge, in dieselben Richtungen wie die ausgestreckten

Abb 16

Zum Flächenelement



Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand. Es ist nicht schwer zu verifizieren, dass diese »äußere« Normale wohldefiniert ist und differenzierbar vom Punkt p abhängt A_{-2} .

Bemerkung Es gilt auch die Umkehrung. Können wir auf einer Hyperfläche M im \mathbb{R}^3 eine differenzierbare Normalenfunktion $n: M \rightarrow \mathbb{S}^2$ erklären, so ist M orientierbar A_{-3} . Die Nichtorientierbarkeit des Möbiusbandes ist daher gleichbedeutend mit der Unmöglichkeit, dort eine stetige Normalenfunktion zu definieren — denn beide Seiten des Bandes gehören zur selben Fläche. \circ

- 10 **Satz** Sei M eine orientierte 2-Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^3 . Mit der nach außen gerichteten Einheitsnormalen n an M gilt

$$dA = n_1 dx_2 \wedge dx_3 + n_2 dx_3 \wedge dx_1 + n_3 dx_1 \wedge dx_2.$$

Ferner gelten auf TM die Identitäten

$$n_1 dA = dx_2 \wedge dx_3, \quad n_2 dA = dx_3 \wedge dx_1, \quad n_3 dA = dx_1 \wedge dx_2. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Sind $v, w \in T_p M$ positiv orientiert, so ist \circ

$$dA(v, w) = \|v \times w\|,$$

denn die Länge des Kreuzproduktvektors entspricht dem Inhalt des von v, w aufgespannten Parallelogramms. Aufgrund der Definition von n gilt außerdem

$$v \times w = n \|v \times w\|.$$

Also ist

$$\begin{aligned} dA(v, w) &= \langle n, v \times w \rangle = \begin{vmatrix} n_1 & v_1 & w_1 \\ n_2 & v_2 & w_2 \\ n_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} \\ &= (n_1 dx_2 \wedge dx_3 + n_2 dx_3 \wedge dx_1 + n_3 dx_1 \wedge dx_2)(v, w). \end{aligned}$$

Dies ist die erste Identität. Außerdem folgt für einen Vektor $u \in \mathbb{R}^3$

$$\langle u, v \times w \rangle = \langle u, n \rangle \|v \times w\| = \langle u, n \rangle dA(v, w).$$

Wählen wir für u die Basisvektoren e_1, e_2, e_3 , so erhalten wir

$$(dx_2 \wedge dx_3)(v, w) = n_1 dA(v, w)$$

sowie die entsprechenden zyklischen Vertauschungen hiervon, also die zweiten Gleichungen. \gggg

Bemerkung Die zweiten Gleichungen in diesem Satz gelten nur auf TM , also bei Anwendung auf Tangentialvektoren an M . Im Gesamttraum \mathbb{R}^3 gelten sie im Allgemeinen *nicht*. Entsprechendes gilt auch für das Linienelement. \rightarrow

23.5

Die klassischen Sätze

Wir stellen die Sätze von Gauss und Stokes jetzt mit den skalaren Linien- und Flächenelementen dar. Die Verbindung zu den vektoriellen Elementen stellt das folgende Lemma her.

Lemma Sei $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$F \cdot d\vec{s} = \langle F, T \rangle ds$$

auf einer Kurve mit positiv orientiertem Tangenteneinheitsvektor T , und

$$F \cdot d\vec{A} = \langle F, n \rangle dA$$

auf einer Fläche mit positiv orientierter Normalen n . \times

\llll Auf dem Tangentialraum einer Kurve ist $\int_{\mathcal{C}} T_v ds = dx_v$ und deshalb

$$F \cdot d\vec{s} = F_1 T_1 ds + F_2 T_2 ds + F_3 T_3 ds = \langle F, T \rangle ds.$$

Auf dem Tangentialraum einer Fläche ist $\int_{\mathcal{A}} dx_2 \wedge dx_3 = n_1 dA$ etc und damit

$$F \cdot d\vec{A} = F_1 n_1 dA + F_2 n_2 dA + F_3 n_3 dA = \langle F, n \rangle dA. \quad \gggg$$

Damit erhalten die Integralsätze die folgende Formulierung.

- 11 Satz von Gauss** Sei M^3 eine kompakte orientierte 3-Mannigfaltigkeit mit Rand. Ist das Vektorfeld F in einer Umgebung von M^3 differenzierbar, so gilt

$$\int_{\partial M^3} \langle F, n \rangle dA = \int_{M^3} \nabla \cdot F dV,$$

wobei n die äußere Normale an M^3 bezeichnet. \times

«««« Denn $\langle F, n \rangle dA = F \cdot d\vec{A}$ und

$$d(F \cdot d\vec{A}) = \operatorname{div} F dV = \nabla \cdot F dV. \quad \text{»»»»}$$

- 12 **Satz von Stokes** Sei M^2 eine kompakte orientierte 2-Mannigfaltigkeit mit Rand. Ist das Vektorfeld F in einer Umgebung von M^2 differenzierbar, so gilt

$$\int_{\partial M^2} \langle F, T \rangle ds = \int_{M^2} \langle \nabla \times F, n \rangle dA,$$

wobei n die äußere Normale an M^2 und T den Tangenteneinheitsvektor an ∂M^2 bezeichnet, die durch die Orientierung von M^2 bestimmt sind. \times

«««« Denn $\langle F, T \rangle ds = F \cdot d\vec{s}$ und

$$d(F \cdot d\vec{s}) = \nabla \times F d\vec{A} = \langle \nabla \times F, n \rangle dA. \quad \text{»»»»}$$

■ Die Formeln von Green

Ist das Vektorfeld F der Gradient einer Funktion f , so ist im Satz von Gauß das Volumenintegral über $\operatorname{div} \operatorname{grad} f$ zu bilden, was wegen

$$\nabla \cdot \nabla = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 =: \Delta$$

nichts anderes ist als die Anwendung des *Laplaceoperators* Δ auf f , also

$$\Delta f = \partial_1^2 f + \partial_2^2 f + \partial_3^2 f.$$

Korollar Ist die Funktion f in einer Umgebung von M^3 differenzierbar, so gilt

$$\int_{M^3} \Delta f dV = \int_{\partial M^3} \langle \nabla f, n \rangle dA. \quad \times$$

Das Skalarprodukt im Oberflächenintegral ist die Richtungsableitung von f in Richtung der äußeren Normalen an M^3 . Diese heißt die *Normalenableitung* von f und wird auch notiert als

$$\frac{\partial f}{\partial n} := \langle \nabla f, n \rangle.$$

Daher schreibt man die letzte Formel auch

$$\int_{M^3} \Delta f dV = \int_{\partial M^3} \frac{\partial f}{\partial n} dA.$$

Wenden wir den Satz von Gauss auf ein Vektorfeld $F = g \nabla f$ an, so wird mit der gewöhnlichen Produktregel

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot (g \nabla f) = \nabla g \cdot \nabla f + g \Delta f.$$

Das Ergebnis ist dann die *Greensche Formel*

$$\int_{M^3} (\nabla g \cdot \nabla f + g \Delta f) \, dV = \int_{\partial M^3} g \langle \nabla f, n \rangle \, dA.$$

Vertauschen wir g und f und bilden die Differenz, so fällt der Term $\nabla g \cdot \nabla f$ heraus, und wir erhalten folgendes Ergebnis.

- 13 **Greensche Formel** Sei M^3 eine kompakte orientierte 3-Mannigfaltigkeit mit Rand. Sind f und g in einer Umgebung von M^3 differenzierbar, so gilt

$$\int_{M^3} (f \Delta g - g \Delta f) \, dV = \int_{\partial M^3} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) \, dA. \quad \times$$

■ Koordinatendarstellung

Wir stellen das Flächenelement noch in lokalen Koordinaten dar. Wir erhalten damit die Flächenintegrale in klassischer Form.

Satz In einem orientierungstreuen Koordinatensystem $\varphi: (u, v) \mapsto \varphi(u, v)$ einer orientierten 2-Mannigfaltigkeit M^2 im \mathbb{R}^3 ist

$$n = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$$

und

$$\varphi^* dA = \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, du \wedge dv = \sqrt{EG - F^2} \, du \wedge dv$$

mit $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle$, $G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$, $F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle$. \times

«»« Es ist $\varphi^* dA = f(u, v) \, du \wedge dv$ mit g

$$f(u, v) = \varphi^* dA(e_1, e_2) = dA(\varphi_u, \varphi_v) = \|\varphi_u \times \varphi_v\|.$$

Die letzte Darstellung folgt hieraus mit $\|v \times w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w \rangle^2$. »»»

Korollar Der Flächeninhalt einer Fläche M mit Koordinaten $\varphi: D \rightarrow M$ ist

$$|M| = \int_D \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, d\lambda.$$

Das Integral einer skalaren Funktion $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ über M gegeben durch

$$\int_M f \, dA = \int_D f \circ \varphi \|\varphi_u \times \varphi_v\| \, d\lambda. \quad \times$$

► **Funktionsgraph** Der Graph einer differenzierbaren Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^3 und wird beschrieben durch ein einziges Koordinatensystem

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto (u, v, f(u, v))^T.$$

Also ist

$$\varphi_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u \end{pmatrix}, \quad \varphi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v \end{pmatrix}, \quad \varphi_u \times \varphi_v = \begin{pmatrix} -f_u \\ -f_v \\ 1 \end{pmatrix},$$

und damit

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\|^2 = 1 + f_u^2 + f_v^2.$$

Der Flächeninhalt des Graphen Γ von f über einem Gebiet D ist demnach

$$|\Gamma| = \int_{\Gamma} dA = \int_D \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2} \, d\lambda.$$

Entsprechendes gilt für das Integral einer skalaren Funktion über Γ . ◀

► **Rotationsfläche** Sei $f: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ differenzierbar. Durch Rotation des Graphen von f um die x -Achse entsteht eine Rotationsfläche R , die durch

$$\varphi: [a, b] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (t, \theta) \mapsto (t, f(t) \cos \theta, f(t) \sin \theta)^\top$$

parametrisiert wird. Es ist

$$\varphi_t = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \cos \theta \\ f'(t) \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \varphi_\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(t) \sin \theta \\ f(t) \cos \theta \end{pmatrix},$$

und damit

$$E = \|\varphi_t\|^2 = 1 + (f')^2, \quad G = \|\varphi_\theta\|^2 = f^2, \quad F = \langle \varphi_t, \varphi_\theta \rangle = 0.$$

Wegen $f \geq 0$ ist also

$$\varphi^* dA = f \sqrt{1 + (f')^2} \, dt \wedge d\theta.$$

Der Flächeninhalt der Rotationsfläche ist demnach

$$|R| = \int_R dA = 2\pi \int_a^b f(t) \sqrt{1 + (f'(t))^2} \, dt.$$

Typischerweise sind solche Integrale nicht mehr elementar auswertbar. ◀

Zum Vergleich notieren wir noch das entsprechende Ergebnis für Kurven.

Satz In einem Koordinatensystem φ einer orientierten 1-Mannigfaltigkeit M ist

$$T = \frac{\dot{\varphi}}{\|\dot{\varphi}\|}, \quad \varphi^* ds = \|\dot{\varphi}(t)\| \, dt.$$

Die Länge der Mannigfaltigkeit M mit Koordinaten $\varphi: I \rightarrow M$ ist demnach

$$|M| = \int_M ds = \int_I \|\dot{\varphi}(t)\| \, dt,$$

und das Integral einer skalaren Funktion f entlang M ist

$$\int_M \psi \, ds = \int_I f \circ \varphi \|\dot{\varphi}\| \, dt. \quad \times$$

Bemerkungen a. Die Länge einer stetigen Kurve $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ hatten wir als das Supremum der Längen aller einbeschriebenen Polygonzüge definiert, falls dieses Supremum endlich ist. Ist die Kurve stetig differenzierbar, so ist diese Länge durch das Integral über ds gegeben.

b. Für *Flächen* gilt dies nicht mehr! Man kann den Inhalt einer Fläche nicht mehr dadurch definieren, das man diese durch hinreichend kleine Polygone approximiert und das Supremum über deren Flächensumme bildet. Dieses Supremum kann unendlich sein, auch wenn das Integral über das Flächenelement endlich ist A-13. \rightarrow

■ Physikalischer Hintergrund

Die Begriffe Divergenz und Rotation sowie die klassischen Sätze der Vektoranalysis haben ihren Ursprung in der Strömungslehre.

Das Vektorfeld $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ beschreibe die *stationäre* Strömung einer Flüssigkeit. Das heißt, die Strömungslinien ändern sich *nicht* im Laufe der Zeit. Die Aufgabe ist, die Strömungsbilanz bezüglich eines fiktiven Volumens K innerhalb der Strömung zu bestimmen.

In einem beliebigen Koordinatensystem der Oberfläche von K ist das infinitesimale Strömungsvolumen gegeben durch das Volumen desjenigen Spates, das durch den Strömungsvektor F und den zwei Tangentialvektoren v und w des Koordinatensystems aufgespannt wird. Dieses Volumen ist gegeben durch

$$F \cdot (v \times w) = F \cdot d\vec{A}(v, w).$$

Der Beitrag einer nach außen gerichteten Strömung wird hierbei positiv gewertet, einer nach innen gerichteten Strömung negativ. Die gesamte Bilanz ist das Integral dieser Größe über den Rand ∂K des Volumens. Gemäß dem Satz von Gauss gilt hierfür

$$\int_{\partial K} F \cdot d\vec{A} = \int_K \operatorname{div} F \, dV.$$

Dies gilt für jedes fiktive Volumen K innerhalb der Strömung.

Betrachten wir nun Kugeln $B_r(x)$ um einen festen Punkt x mit immer kleineren Radien, so erhalten wir

$$\begin{aligned} (\operatorname{div} F)(x) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} \operatorname{div} F \, dV \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} F \cdot d\vec{A}. \end{aligned}$$

Somit beschreibt $\operatorname{div} F$ in jedem Punkt die *infinitesimale Strömungsbilanz* oder *Quelldichte* des Vektorfeldes F . Verschwindet die Divergenz überall, so heißt die Strömung *inkompressibel*.

- 14 **Notiz** Ein auf einem sternförmigen Gebiet inkompressibles Vektorfeld F besitzt ein *Vektorpotential* V . Das heißt, es gilt

$$F = \operatorname{rot} V. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Mit $\operatorname{div} F = 0$ ist $d(F \bullet d\vec{A}) = 0$. Aufgrund des Lemmas von Poincaré_{22,9} ist also $F \bullet d\vec{A}$ exakt, also

$$F \bullet d\vec{A} = d(V \bullet d\vec{s}) = \operatorname{rot} V \bullet d\vec{A}$$

mit einem gewissen Vektorfeld V . Also ist $F = \operatorname{rot} V$. ⟩⟩⟩

Betrachte nun eine fiktive Membran M mit Rand ∂M innerhalb der Strömung. Das Integral

$$\int_{\partial M} F \bullet d\vec{s} = \int_{\partial M} \langle F, T \rangle ds$$

können wir als Bilanz des Winkels des Strömungsvektors F mit der Tangentenrichtung T über den gesamten Rand ∂M interpretieren. Es stellt somit ein Maß der Zirkulation des Vektorfeldes entlang ∂M dar. Mit dem Satz von Stokes gilt nun

$$\int_{\partial M} F \bullet d\vec{s} = \int_M \operatorname{rot} F \bullet d\vec{A}.$$

Somit können wir $\operatorname{rot} F$ interpretieren als das Maß für die infinitesimale Verwirbelung eines Vektorfeldes. Verschwindet die Rotation überall, so heißt die Strömung *wirbelfrei*.

- Notiz** Ein auf einem sternförmigen Gebiet wirbelfreies Vektorfeld F ist ein *Gradientenfeld*. Das heißt, es existiert eine Funktion f , so dass

$$F = \nabla f. \quad \times$$

⟨⟨⟨ Mit $\operatorname{rot} F = 0$ ist auch $\operatorname{rot} F \bullet d\vec{A} = 0$ und damit $d(F \bullet d\vec{s}) = 0$. Also ist mit dem einfachen Lemma von Poincaré_{19,12}

$$F \bullet d\vec{s} = df = \nabla f \bullet d\vec{s}$$

mit einer skalaren Funktion f . Also ist $F = \nabla f$. ⟩⟩⟩

23.6

Zwei Anwendungen

Als erste Anwendung zeigen wir die Mittelwerteneigenschaft harmonischer Funktionen im \mathbb{R}^3 .

Satz Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und harmonisch, also $\Delta f = 0$. Dann gilt

$$f(p) = \frac{1}{|\partial B_r(p)|} \int_{\partial B_r(p)} f \, dA$$

für jede Kugel $B_r(p)$, die im Definitionsbereich von f enthalten ist. \times

⟨⟨⟨⟨ Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $p = 0$. Definiere φ_t durch

$$\varphi_t(x) := f(tx)$$

für alle $t \geq 0$ und $x \in \mathbb{R}^3$, für die tx im Definitionsbereich von f liegt. Betrachte

$$J(t) = \frac{1}{|B_r(0)|} \int_{\partial B_r(0)} \varphi_t \, dA.$$

Dann ist $J(0) = \varphi_0 = f(0)$. Es genügt daher zu zeigen, dass J konstant ist. Nun ist

$$\begin{aligned} \dot{J}(t) &= \int_{\partial B_r(0)} \frac{d}{dt} \varphi_t \, dA \\ &= \int_{\partial B_r(0)} \nabla f(tx) \cdot x \, dA = r \int_{\partial B_r(0)} \nabla f(tx) \cdot n \, dA, \end{aligned}$$

denn im Punkt $x \in \partial B_r(0)$ ist die äußere Normale $n = x/r$. Mit dem Satz von Gauss folgt

$$\dot{J}(t) = rt \int_{B_r(0)} \Delta f(tx) \, dV = 0,$$

da ja $\Delta f = 0$ nach Voraussetzung. $\rangle\rangle\rangle\rangle$

Zum Abschluss beweisen wir noch den folgenden

Satz des Archimedes Die Auftriebskraft eines in einer homogenen Flüssigkeit befindlichen Körpers ist gleich dem Gewicht des von diesem Körper verdrängten Volumens. \times

⟨⟨⟨⟨ Die Flüssigkeit fülle das Gebiet $\mathbb{M} = \{z \leq 0\}$ aus und habe die homogene Dichte 1. Der an einem Punkt in der Tiefe z ausgeübte Druck entspricht der Höhe der Flüssigkeitssäule über dem Punkt und ist nach unten gerichtet. Wegen $z < 0$ ist er also

$$P = ze_z.$$

Sei nun M eine berandete 3-Mannigfaltigkeit in \mathbb{M} . Der auf einen Randpunkt p von M wirkende Druck ist die in Normalenrichtung wirkende Komponente des Druckvektors

$$P_n = \langle P, n \rangle n.$$

Diese ist mit dem Flächenelement dA zu multiplizieren und über den gesamten Rand von M zu integrieren. Die Auftriebskraft ist demnach

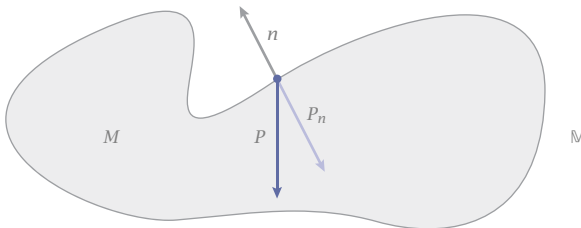
$$F = \int_{\partial M} \langle P, n \rangle dA.$$

Darauf können wir den Divergenzatz anwenden. Wegen $\operatorname{div} P = 1$ erhalten wir

$$F = \int_{\partial M} \langle P, n \rangle dA = \int_M \operatorname{div} P dV = \int_M dV = |M|.$$

Da wir die Dichte der Flüssigkeit auf 1 normalisiert hatten, entspricht der letzte Wert dem Gewicht der von M verdrängten Flüssigkeit. >>>>

Abb 17 Zum Satz des Archimedes



Aufgaben

- 1 a. Sei M^2 eine kompakte zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand im \mathbb{R}^2 . Sind die Funktionen u und v in einer Umgebung von M^2 differenzierbar, so gilt

$$\int_{M^2} (v_x - u_y) \, d\lambda = \int_{\partial M^2} (u \, dx + v \, dy).$$

- b. Ist A ein regulär berandetes Gebiet, so ist dessen Flächeninhalt

$$|A| = \frac{1}{2} \int_{\partial A} (x \, dy - y \, dx).$$

- 2 Zeigen sie, dass auf jeder orientierten 2-Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^3 in differenzierbarer Weise eine äußere Normale definiert werden kann.
- 3 Besitzt eine Hyperfläche M im \mathbb{R}^3 eine stetige Normalenfunktion, so ist M orientierbar.
- 4 Gibt es auf einer n -Mannigfaltigkeit M eine nirgends verschwindende n -Form, so ist M orientierbar.
- 5 a. Für eine $n - 1$ -Form ω auf einer kompakten n -Mannigfaltigkeit M gilt immer

$$\int_M d\omega = 0.$$

- b. Geben sie ein nicht-kompaktes Beispiel, wo dies nicht zutrifft.

- 6 Verallgemeinern sie den Divergenzsatz auf eine berandete n -Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^n . Drücken sie damit den Inhalt von $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ durch den Inhalt von $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ aus.

- 7 Bestimmen sie den Inhalt der Kugel $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ mithilfe des Flächenelementes dA .

- 8 Zeigen sie, dass jede geschlossene Differenzialform auf \mathbb{S}^2 exakt ist.

- 9 Sei M die 2-Sphäre im \mathbb{R}^3 mit Mittelpunkt m und Radius $r > 0$. Man bestimme

$$\int_M x^2 \, dy \wedge dz + y^2 \, dz \wedge dx + z^2 \, dx \wedge dy.$$

- 10 Seien M_1 und M_2 berandete n -Mannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^n mit der üblichen Orientierung, wobei

$$M_2 \subset M_1 \setminus \partial M_1$$

und $M_1 \setminus M_2$ beschränkt ist. Dann gilt

$$\int_{\partial M_1} \omega = \int_{\partial M_2} \omega$$

für jede geschlossene $n - 1$ -Form ω auf M_1 .

- 11 Sei K der 3-dimensionale Körper, der bei Rotation des Graphen von $x \mapsto x^\alpha$ über $[1, \infty)$ um die x -Achse entsteht. Für welche α ist das Volumen von K endlich, aber seine Oberfläche unendlich groß?

- 12 Man verifiziere den Divergenzatz von Gauss ₁₁ für ein 3-dimensionales kompaktes Intervall I :

$$\int_I \operatorname{div} F \, dV = \int_{\partial I} \langle F, n \rangle \, dA.$$

Hinweis: Man kann jeden Term $\partial_i F_i \, dV$ für sich betrachten.

- 13 Approximieren sie einen Zylindermantel endlichen Maßes gleichmäßig durch Dreiecke mit Ecken auf diesem Mantel derart, dass der Gesamtflächeninhalt dieser Dreiecke gegen unendlich strebt.

- 14 Sei K eine kompakte, berandete Untermannigfaltigkeit von M und $\varphi: \partial K \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung in eine n -Mannigfaltigkeit N .

a. Gibt es eine differenzierbare Abbildung $\Phi: K \rightarrow N$ mit $\Phi|_{\partial K} = \varphi$, so gilt

$$\int_{\partial K} \varphi^* \omega = 0$$

für jede geschlossene $n-1$ -Form ω auf N .

b. Sei $M = \mathbb{R}^m$ und $N = \partial K$. Dann gibt es keine differenzierbare Abbildung $\Phi: K \rightarrow \partial K$ mit $\Phi|_{\partial K} = \operatorname{id}$. Man sagt, *es gibt keine glatte Retraktion von K auf ∂K* .

- 15 *Zweite Guldinsche Regel* Der Oberflächeninhalt einer Rotationsfläche beträgt $2\pi r l$, wobei l die Länge eines Meridianschnitts und r den Abstand seines Schwerpunkts von der Rotationsachse bezeichnet. *Hinweis:* Vergleiche erste Guldinsche Regel _{A-21.16}.