# 19

# Wegintegrale

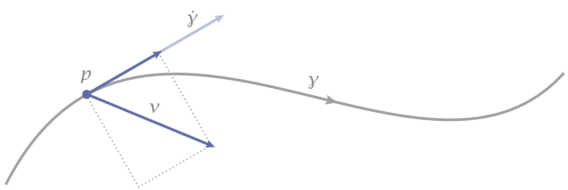
Die entlang eines geradlinigen Weges bei gleichbleibender Krafteinwirkung geleistete Arbeit ist das Produkt aus zurückgelegter Wegstrecke und in Richtung dieser Wegstrecke wirkender Kraftkomponente. Will man allgemeiner die geleistete Arbeit entlang eines beliebigen Weges $\gamma$ innerhalb eines Kraftfeldes $v$ bestimmen, so ist in jedem Punkt die anliegende Kraft auf den momentanen Geschwindigkeitsvektor zu projizieren und das resultierende Produkt über den Weg zu integrieren. Dies führt zu einem Integral der Form

$$\int_a^b \langle v(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, \mathrm{d}t$$

für die geleistete Arbeit.

Mathematisch kann man den Integranden auffassen als die Anwendung der *Linearform* $\langle v, \cdot \rangle$ auf den *Vektor* $\dot{\gamma}$. Die Weiterentwicklung dieses Gedankens führt zum Begriff der *Differenzialform*, die entlang eines Weges zu integrieren ist. Dies vermeidet unter anderem die Einbeziehung eines Skalarprodukt und erlaubt eine koordinatenfreie Interpretation solcher Kurvenintegrale.

**Abb 1** **Weg in einem Kraftfeld**



## 19.1 Pfaffsche Formen

Sei zunächst $V$ ein Vektorraum endlicher Dimension und $V^* = L(V, \mathbb{R})$ sein Dualraum, also der Raum aller stetigen linearen Abbildungen $V \to \mathbb{R}$.

1 **Definition** *Eine Pfaffsche Form oder 1-Form ist eine Abbildung*

$$\alpha : V \hookrightarrow V^*, \quad x \mapsto \alpha(x),$$

*die jedem Punkt in ihrem Definitionsbereich eine Linearform zuordnet.* ⋊

Pfaffsche Formen werden auch *Differenzialformen vom Grad 1* genannt. Für die Anwendung einer 1-Form $\alpha$ am Punkt $x$ auf einen Vektor $h \in V$ schreiben wir $\alpha(x)h$ oder kürzer $\alpha(h)$, wenn der Punkt $x$ keine besondere Rolle spielt.

Wir beschränken uns auf *reellwertige* 1-Formen. Komplexwertige 1-Formen spielen in der Funktionentheorie eine zentrale Rolle und werden dort betrachtet.

2 ⊳ A. Eine differenzierbare Funktion $f : V \hookrightarrow \mathbb{R}$ definiert eine Pfaffsche Form

$$\mathrm{d}f : V \hookrightarrow V^*, \qquad x \mapsto \mathrm{d}f(x),$$

genannt das *Differenzial* von $f$, indem wir definieren:

$$\mathrm{d}f(x)h := Df(x)h = \partial_h f(x).$$

B. Sei $v : V \hookrightarrow V$ ein stetiges *Vektorfeld*, also eine Abbildung, die jedem Punkt in seinem Definitionsbereich in $V$ einen Vektor *desselben* Vektorraumes zuordnet. Mithilfe eines Skalarprodukt $\langle \cdot , \cdot \rangle$ auf $V$ induziert dies eine 1-Form

$$\alpha_v := \langle v, \cdot \rangle .$$

C. Insbesondere ist

$$\mathrm{d}f = \alpha_{\nabla f},$$

denn aufgrund der Definition des Gradienten ist ja

$$\mathrm{d}f(h) = Df\,h = \langle \nabla f, h \rangle . \quad ⊲$$

### ▪ Der Standardfall

Wie sehen 1-Formen im Standardfall $V = \mathbb{R}^n$ aus? Auf dem $\mathbb{R}^n$ sind die *Koordinatenfunktionen*

$$\pi_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \pi_k(x) = x_k,$$

stetig differenzierbar, und es gilt

$$\mathrm{d}\pi_k(h) = D\pi_k(h) = h_k.$$

Für die Standardbasis $e_1, .., e_n$ des $\mathbb{R}^n$ gilt insbesondere

$$\mathrm{d}\pi_k(e_l) = \delta_{kl}, \qquad 1 \leqslant k, l \leqslant n.$$

Die Differenziale $\mathrm{d}\pi_1, .., \mathrm{d}\pi_n$ bilden also gerade die zur Standardbasis $e_1, .., e_n$ *duale Basis*. Bezeichnen wir jetzt vereinfachend die $k$-te Koordinatenfunktion mit $x_k$ anstelle von $\pi_k$, gelangen wir zur folgenden

**Definition** *Die zur Standardbasis $e_1, .., e_n$ des Vektorraumes $\mathbb{R}^n$ duale Basis wird mit $\mathrm{d}x_1, .., \mathrm{d}x_n$ bezeichnet. Es gilt also*

$$\mathrm{d}x_k(e_l) = \delta_{kl}, \qquad 1 \leqslant k, l \leqslant n.$$

Jede 1-Form im $\mathbb{R}^n$ kann damit dargestellt werden als Linearkombination dieser Basisformen, also als

$$\alpha = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\, \mathrm{d}x_k.$$

Ihre Koeffizienten sind reelle Funktionen, für die

$$a_k = \alpha(e_k)$$

gilt.

A. Im eindimensionalen Standardfall hat jede Pfaffsche Form die Gestalt

$$\alpha = a(x)\, \mathrm{d}x.$$

Sie ist also durch eine einzige skalare Funktion gegeben.

B. Das Differenzial einer $C^1$-Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ hat die Darstellung

$$\mathrm{d}f = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(x)\, \mathrm{d}x_k,$$

denn $\mathrm{d}f(e_k) = Df e_k = \partial_k f$. Die partiellen Ableitungen von $f$ sind also gerade die Koeffizienten des Differenzials $\mathrm{d}f$ bezüglich der Standardbasis.

C. Die im Standardfall durch ein Vektorfeld $v = \sum_{k=1}^{n} v_k(x) e_k$ induzierte 1-Form [2] ist

$$\alpha_v = \langle v, \cdot \rangle = \sum_{k=1}^{n} v_k(x)\, \mathrm{d}x_k,$$

denn deren Koeffizienten sind $\alpha_v(e_k) = \langle v, e_k \rangle = v_k$. Dies schreibt man auch gerne als klassisches Skalarprodukt

$$\alpha_v = v \bullet \mathrm{d}x$$

aus $v = (v_1, .., v_n)$ und $\mathrm{d}x = (\mathrm{d}x_1, .., \mathrm{d}x_n)$.

Schließlich erklären wir noch die Regularität von 1-Formen.

**Definition** *Eine 1-Form $\alpha$ heißt stetig respektive von der Klasse $C^r$, wenn sie als Abbildung $\alpha\colon V \to V^*$ stetig respektive von der Klasse $C^r$ ist.* ⋊

Für eine Basisdarstellung einer 1-Form bedeutet dies, dass sämtliche Koeffizientenfunktionen stetig respektive von der Klasse $C^r$ sind.

## 19.2 Kurven- und Wegintegrale

Wir definieren nun das Integral von 1-Formen entlang Kurven so, wie wir es in der Einleitung skizziert haben. Dabei betrachten wir stückweise stetig differenzierbare Kurven, die wir in Abschnitt 13.5 wie folgt definiert hatten. Zur Wiederholung:

**Definition** *Eine stetige Kurve $\gamma\colon I \to V$ ist stückweise stetig differenzierbar, wenn es eine Teilung $(t_1, .., t_n)$ des Intervalls $I$ gibt, so dass alle Abschnitte $\gamma|_{[t_{k-1},t_k]}$ mit $1 \leqslant k \leqslant n$ stetig differenzierbar sind. Die Klasse aller dieser Kurven wird mit $D^1(I,V)$ bezeichnet.* ⋊

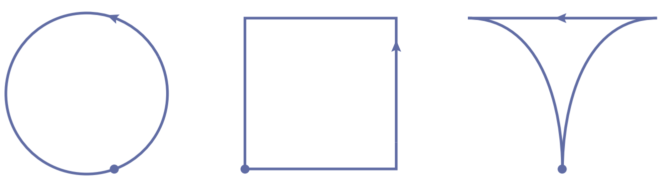
Insbesondere besitzt die Ableitung einer $D^1$-Kurve in jedem inneren Teilungspunkt links- und rechtsseitige Grenzwerte. Summe und skalare Vielfache von $D^1$-Kurven sind wieder $D^1$-Kurven. Somit ist $D^1(I,V)$ ein reeller Vektorraum.

Da wir es im Folgenden nur mit Integralen zu tun haben, müssen wir die Teilungspunkte einer $D^1$-Kurve nicht explizit betrachten. Für die Länge einer solchen Kurve gilt zum Beispiel

$$L(\gamma) = \sum_{k=1}^{n} L(\gamma|_{[t_{k-1},t_k]}) = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot\gamma(t)\|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,\mathrm{d}t,$$

denn die endlich vielen Sprungstellen des Integranden an den Teilungspunkten haben keinen Einfluss auf das Integral 10.12. Ebenso verhält es sich mit den übrigen Integralen, die wir noch betrachten werden.

Abb 2 Stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurven



19.4

Nun zur Definition des Kurvenintegrals.

3 **Definition** *Sei $\alpha\colon V \hookrightarrow V^*$ eine stetige 1-Form und $\gamma\colon [a,b] \to V$ eine stückweise stetig differenzierbare Kurve im Definitionsbereich von $\alpha$. Dann heißt*

$$\int_\gamma \alpha \coloneqq \int_a^b \alpha(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t$$

*das Kurvenintegral von $\alpha$ längs der Kurve $\gamma$.* ⋊

An jedem Kurvenpunkt $\gamma(t)$ wird also die 1-Form $\alpha(\gamma(t))$ auf den Vektor $\dot\gamma(t)$ angewendet. Das Ergebnis ist eine skalare Funktion, die wie üblich über das Parameterintervall der Kurve integriert wird.

Im Standardfall mit

$$\alpha = \sum_{k=1}^n a_k(x)\,\mathrm{d}x_k, \qquad \dot\gamma = \sum_{l=1}^n \dot\gamma_l(t)e_l$$

ergibt dies

$$\int_\gamma \alpha = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n a_k(\gamma(t))\dot\gamma_k(t)\right)\mathrm{d}t,$$

da ja

$$\mathrm{d}x_k(\dot\gamma) = \sum_{l=1}^n \dot\gamma_l\,\mathrm{d}x_k(e_l) = \dot\gamma_k.$$

4 ⊳ *Ein beliebiges Beispiel* Sei $\alpha = y^2\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y$ eine 1-Form auf $\mathbb{R}^2$. Betrachte die Kurvem

$$\gamma_\sigma\colon\ [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_\sigma(t) = (t, t^\sigma)$$

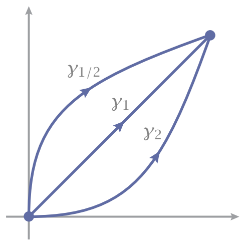
für $\sigma > 0$. Dann erhält man

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_\sigma} \alpha &= \int_0^1 (t^{2\sigma}\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)\,(1, \sigma t^{\sigma-1})^\top\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (t^{2\sigma} + \sigma t^{\sigma-1})\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{t^{2\sigma+1}}{2\sigma+1} + t^\sigma\Big|_0^1 \\ &= 1 + \frac{1}{2\sigma+1}.\end{aligned}$$

Das Ergebnis hängt also vom Weg ab, auch wenn alle Kurven denselben Anfangspunkt $(0,0)$ und denselben Endpunkt $(1,1)$ haben. ◂

Abb 3

Integrationswege $\gamma_\sigma$ in Beispiel 4




5 ▷ *Windungsform* Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sei

$$\upsilon = \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2 + y^2}.$$

Für die Standardparametrisierung $\gamma$ des Einheitskreises, also $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ mit $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, erhält man

$$\begin{aligned}\int_\gamma \upsilon &= \int_0^{2\pi} (-\sin t\,\mathrm{d}x + \cos t\,\mathrm{d}y)\,(-\sin t, \cos t)^\top \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,\mathrm{d}t \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

Ist allgemeiner $m \in \mathbb{Z}$ und $\gamma_m$ mit $\gamma_m(t) = (\cos mt, \sin mt)$ der $m$-mal durchlaufene Einheitskreis, so ist

$$\int_{\gamma_m} \upsilon = \int_0^{2\pi} m(\sin^2 t + \cos^2 t)\,\mathrm{d}t = 2\pi m.$$

Das Integral misst also, bis auf den Faktor $2\pi$, wie oft sich $\gamma_m$ um den Nullpunkt herum windet. Dies gilt auch für $m = 0$, denn $\gamma_0$ ist eine Punktkurve, die sich *nicht* um den Nullpunkt windet Wie wir noch sehen werden, gilt dies auch für jede andere geschlossene Kurve, die nicht durch den Nullpunkt hindurch läuft $_{13}$. Aus diesem Grund heißt $\upsilon$ auch *Windungsform*. ◁

Wir wollen uns noch davon überzeugen, dass unsere Definition des Kurvenintegrals $_3$ ›natürlich‹ ist. Das heißt, wir gelangen zu demselben Integral, wenn wir es durch endliche Summen approximieren. Sei dazu $(t_1, .., t_n)$ eine Teilung von $[a, b]$. Eine zugehörige Teilungssumme ist dann

$$W_T(\alpha) = \sum_{k=1}^{n} \alpha(\gamma(\tau_k))(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})),$$

wobei die Auswertungspunkte $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ beliebig gewählt seien.

6 **Satz** *Ist $\alpha$ stetig und $\gamma$ stückweise stetig differenzierbar, so gilt*

$$W_T(\alpha) \to \int_\gamma \alpha = \int_a^b \alpha(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t,$$

*wenn die Feinheit der Teilung $T$ gegen Null strebt.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Eine stückweise stetig differenzierbare Kurve $\gamma$ ist rektifizierbar. Es ist also $L \coloneqq L(\gamma) < \infty$. Außerdem ist ihre Spur eine kompakte Teilmenge von $V$. Die stetige 1-Form $\alpha$ entlang $\gamma$ ist somit *gleichmäßig* stetig $_{7.32}$. Das heißt, zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\|\alpha \circ \gamma|_u^v\|_* < \frac{\varepsilon}{L}, \qquad |u - v| < \delta. \tag{1}$$

Dabei bezeichnet $\|\cdot\|_*$ die durch eine Norm $\|\cdot\|$ auf $V$ induzierte Operatornorm auf $V^*$. Es gilt also $|\alpha(h)| \leqslant \|\alpha\|_* \|h\|$. Schreibe jetzt

$$\begin{aligned} W_T(\alpha) &= \sum_{k=1}^n \alpha(\gamma(\tau_k))(\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})) \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha(\gamma(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \alpha(\gamma(\tau_k))\dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Dann wird mit der Definition des Wegintegrals $_3$

$$W_T(\alpha) - \int_\gamma \alpha = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} [\alpha(\gamma(\tau_k)) - \alpha(\gamma(t))]\,\dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ist die Feinheit von $T$ kleiner als $\delta$, so können wir auf jeden Term in eckigen Klammern die Abschätzung (1) anwenden und erhalten

$$\begin{aligned} \left| W_T(\alpha) - \int_\gamma \alpha \right| &\leqslant \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\alpha(\gamma(\tau_k)) - \alpha(\gamma(t))\|_* \,\|\dot{\gamma}(t)\|\,\mathrm{d}t \\ &< \frac{\varepsilon}{L} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot{\gamma}(t)\|\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\varepsilon}{L} \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|\,\mathrm{d}t = \varepsilon. \end{aligned}$$

Das war zu zeigen. ⟩⟩⟩⟩⟩

## Invarianz

Das Interessante und Wesentliche am Kurvenintegral ist, dass es *unabhängig* von der gewählten Parametrisierung der Kurve ist.

**Lemma** *Sei $\alpha\colon V \hookrightarrow V^*$ eine stetige 1-Form, $\gamma\colon I \to V$ eine $D^1$-Kurve im Definitionsbereich von $\alpha$ und $\varphi\colon I_* \to I$ eine orientierungstreue $D^1$-Parametertransformation. Dann gilt*

$$\int_{\gamma\circ\varphi} \alpha = \int_\gamma \alpha. \quad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Seien $\gamma$ und $\varphi$ zunächst stetig differenzierbar. Für $I_* = [a_*, b_*]$ gilt

$$I = [a,b] = \varphi(I_*) = [\varphi(a_*), \varphi(b_*)],$$

da $\varphi$ die Orientierung erhält. Für $\gamma_* = \gamma \circ \varphi$ folgt mit der klassischen Substitutionsregel daher

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_*} \alpha &= \int_{a_*}^{b_*} \alpha(\gamma_*(t))\dot\gamma_*(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{a_*}^{b_*} \alpha(\gamma(\varphi(t)))\dot\gamma(\varphi(t))\dot\varphi(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{\varphi(a_*)}^{\varphi(b_*)} \alpha(\gamma(s))\dot\gamma(s)\,\mathrm{d}s = \int_a^b \alpha(\gamma(s))\dot\gamma(s)\,\mathrm{d}s = \int_\gamma \alpha.
\end{aligned}$$

Mit einer geeigneten Zerlegung in endlich viele Teilintervalle folgt die Behauptung dann auch für $D^1$-Kurven und $D^1$-Parametertransformationen. ⟩⟩⟩⟩⟩

Die Unabhängigkeit des Kurvenintegrals einer 1-Form von der gewählten Parametrisierung der Kurve erlaubt es uns, dieses auch für einen *Weg* zu definieren, also eine *Äquivalenzklasse* von parametrisierten Kurven.

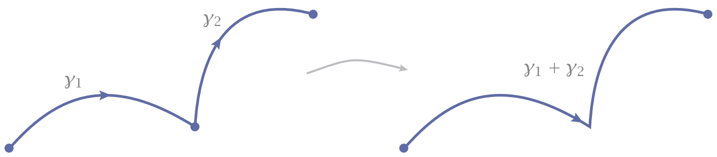
**Definition** *Das Wegintegral einer stetigen 1-Form $\alpha$ entlang eines Weges $\omega$ ist definiert als*

$$\int_\omega \alpha \coloneqq \int_\gamma \alpha,$$

*wobei $\gamma$ eine beliebige $D^1$-Parametrisierung von $\omega$ bezeichnet.* $\rtimes$

*Bemerkung* Man kann das Wegintegral auch für geeignete *stetige* Kurven definieren und stetige Parametertransformationen betrachten. Uns geht es hier jedoch nicht um möglichst geringe Regularitätsvoraussetzungen. Daher gehen wir darauf nicht ein. ⊸

Abb 4 Addition von Kurven




- **Wegadditivität**

Das Wegintegral $\int_\omega \alpha$ ist nicht nur linear bezüglich der Differenzialform $\alpha$, sondern auch additiv bezüglich des Integrationsweges $\omega$. Dazu definieren wir die Addition geeigneter Wege wie folgt. Seien $\omega_1$ und $\omega_2$ zwei Wege in $V$, wo der Endpunkt von $\omega_1$ mit dem Anfangspunkt von $\omega_2$ zusammenfällt, und

$$\gamma_1 : [a,b] \to V, \qquad \gamma_2 : [c,d] \to V$$

zwei stetige Parametrisierungen dieser Wege. Dann ist $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, und wir können das zweite Parameterintervall noch so verschieben, dass $b = c$. Dann definiert

$$\gamma_1 + \gamma_2 : [a,d] \to V, \quad (\gamma_1 + \gamma_2)(t) \coloneqq \begin{cases} \gamma_1(t), & a \leqslant t \leqslant b, \\ \gamma_2(t), & c \leqslant t \leqslant d, \end{cases}$$

eine stetige Kurve in $V$. Die zugehörige Äquivalenzklasse definieren wir als

$$\omega_1 + \omega_2 \coloneqq [\gamma_1 + \gamma_2].$$

Diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Parametrisierungen A-1. Sind zudem $\omega_1$ und $\omega_2$ von der Klasse $D^1$, so ist es auch $\omega_1 + \omega_2$

Ist ferner $\omega = [\gamma]$, und bezeichnet $\gamma_-$ die in umgekehrter Richtung durchlaufene Kurve $\gamma$, so ist durch $-\omega \coloneqq [\gamma_-]$ der umgekehrt durchlaufene Weg definiert.

**Rechenregeln** *Seien $\alpha : V \to V^*$ eine stetige 1-Form und $\omega, \omega_1, \omega_2$ stückweise stetig differenzierbare Wege im Definitionsbereich von $\alpha$. Dann gilt*

$$\int_{-\omega} \alpha = -\int_\omega \alpha, \qquad \int_{\omega_1+\omega_2} \alpha = \int_{\omega_1} \alpha + \int_{\omega_2} \alpha,$$

*falls die Summe von $\omega_1$ und $\omega_2$ erklärt ist. Weiter gilt*

$$\left| \int_\omega \alpha \right| \leqslant L(\omega) \max_{p \in \omega} \|\alpha(p)\|_* ,$$

*wenn die Länge bezüglich einer Norm $\|\cdot\|$ auf $V$ bestimmt wird und $\|\cdot\|_*$ die zugehörige induzierte Norm auf $V^*$ bezeichnet.* ⋊

⟪⟪ Wir beweisen nur die letzte Behauptung, der Rest ist Routine. Mit einer beliebigen Parametrisierung $\gamma\colon [a,b] \to V$ von $\omega$ gilt

$$\begin{aligned} \left|\int_\omega \alpha\right| &= \left|\int_a^b \alpha(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \int_a^b |\alpha(\gamma(t))\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_a^b \|\alpha(\gamma(t))\|_* \,\|\dot\gamma(t)\|\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \max_{p\in\omega} \|\alpha(p)\|_* \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Das letzte Integral ist gerade die Länge $L(\omega)$ von $\omega$. ⟫⟫

## 19.3 Wegintegrale exakter 1-Formen

Die explizite Bestimmung eines klassischen Integrals ist aufgrund des Hauptsatzes 10.16 gleichbedeutend mit dem Auffinden einer Stammfunktion. Entsprechendes gilt auch für Wegintegrale, wenn die betreffende 1-Form *exakt* ist.

**Definition** *Eine 1-Form $\alpha$ heißt exakt, wenn es eine $C^1$-Funktion $f$ gibt, so dass*

$$\alpha = \mathrm{d}f$$

*auf dem gemeinsamen offenen Definitionsbereich. Jede solche Funktion $f$ heißt eine Stammfunktion von $\alpha$.* ⋊

▹ *1-Formen auf einem Intervall* Ist $\alpha = a(x)\,\mathrm{d}x$ stetig auf dem Intervall $I$ und $x_0 \in I$, so definiert aufgrund des Stammfunktionensatzes 10.14 [1]

$$f(x) := \int_{x_0}^x a(t)\,\mathrm{d}t, \qquad x \in I,$$

eine stetig differenzierbare Funktion $f$ auf $I$ mit der Eigenschaft, dass

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x = a(x)\,\mathrm{d}x.$$

Somit ist *jede* auf einem Intervall stetige 1-Form exakt. ◃

[1] Im Folgenden verwenden wir $\mathrm{d}t$ für das klassische Integral und $\mathrm{d}x$ für 1-Formen.

*Zentralfeld auf* $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ Eine 1-Form der Gestalt

$$\alpha = \varphi(\|x\|) \sum_{k=1}^{n} x_k \, \mathrm{d}x_k$$

mit einer stetigen Funktion $\varphi\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist exakt. Eine Stammfunktion $f$ auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist zum Beispiel gegeben durch

$$f(x) = F(\|x\|) = \int_1^{\|x\|} t\varphi(t) \, \mathrm{d}t.$$

Denn für die euklidische Norm gilt

$$\mathrm{d}(\|x\|) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\|x\|} \, \mathrm{d}x_k, \qquad x \neq 0,$$

und somit ist

$$\mathrm{d}f(x) = F'(\|x\|)\mathrm{d}(\|x\|) = \varphi(\|x\|) \sum_{k=1}^{n} x_k \, \mathrm{d}x_k.$$

Die Wegintegrale exakter 1-Formen sind nun leicht zu berechnen. Es gilt folgende Verallgemeinerung des Hauptsatzes 10.16.

7 **Hauptsatz für Wegintegrale** *Ist die 1-Form* $\alpha$ *exakt mit Stammfunktion* $f$*, so gilt*

$$\int_\omega \alpha = \int_\omega \mathrm{d}f = f\Big|_{\omega_a}^{\omega_b}$$

*für jeden stückweise stetig differenzierbaren Weg* $\omega$ *im Definitionsbereich von* $\alpha$ *mit Anfangspunkt* $\omega_a$ *und Endpunkt* $\omega_b$*. Das Wegintegral einer exakten 1-Form hängt also nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges ab, nicht aber von dessem Verlauf.*

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $\omega$ zunächst $C^1$ und $\gamma\colon [a,b] \to V$ eine $C^1$-Parametrisierung von $\omega$. Dann ist $f \circ \gamma$ ebenfalls stetig differenzierbar, und es gilt

$$\mathrm{d}f(\gamma(t))\dot\gamma(t) = Df(\gamma(t))\gamma'(t) = (f \circ \gamma)'(t).$$

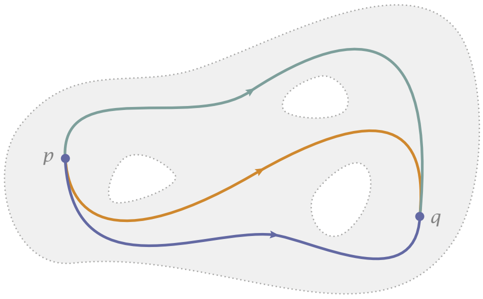
Also ist

$$\begin{aligned}\int_\omega \alpha = \int_\gamma \mathrm{d}f &= \int_a^b \mathrm{d}f(\gamma(t))\dot\gamma(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \int_a^b (f \circ \gamma)'(t) \, \mathrm{d}t = f \circ \gamma\Big|_a^b = f\Big|_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} = f\Big|_{\omega_a}^{\omega_b}.\end{aligned}$$

Mit einer geeigneten Zerlegung in endlich viele Teilintervalle folgt die Behauptung dann auch für stückweise stetig differenzierbare Wege, weil sich die Randwerte an den inneren Zerlegungspunkten aufheben. ⟩⟩⟩⟩⟩

Abb 5

Verschiedene Wege von $p$ nach $q$




Die Wegunabhängigkeit ist somit eine *notwendige* Bedingung für die Exaktheit einer 1-Form. Die 1-Form in Beispiel 4 und die Windungsform $\upsilon$ in Beispiel 5 können deshalb nicht exakt sein.

Wir werden gleich sehen, dass umgekehrt die Bedingung der Wegunabhängigkeit auch *hinreichend* ist, wenn der Definitionsbereich nicht in mehrere Komponenten zerfällt.

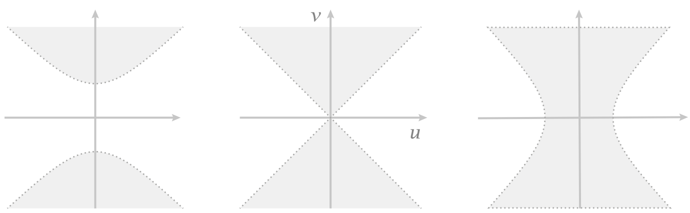
**Definition** *Eine Teilmenge $M$ von $V$ heißt wegzusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten in $M$ eine ganz in $M$ verlaufende stückweise differenzierbare Kurve gibt, die diese Punkte verbindet.* ⋊

A. Jedes reelle Intervall ist wegzusammenhängend.
B. Jede konvexe Menge ist wegzusammenhängend.
C. $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist wegzusammenhängend für $n \geqslant 2$, nicht aber für $n = 1$.
D. Nur die Menge rechts in Abbildung 6 ist wegzusammenhängend.

Offene *und* wegzusammenhängende Mengen spielen eine wichtige Rolle in der Analysis und haben deshalb eine eigene Bezeichnung.

**Definition** *Ein Gebiet ist eine nichtleere, offene und wegzusammenhängende Menge.* ⋊

Abb 6 Die Menge $\Omega_\varepsilon$ für $\varepsilon < 0$, $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon > 0$



▷ A. Jede nichtleere offene konvexe Menge ist ein Gebiet.

B. Die Menge $\Omega_\varepsilon = \{(u,v) : v^2 > u^2 - \varepsilon\}$ ist nur für $\varepsilon > 0$ ein Gebiet.

C. Die Vereinigung zweier Gebiete ist wieder ein Gebiet genau dann, wenn ihr Durchschnitt nicht leer ist. ◁

Das nächste Lemma zeigt, dass hinsichtlich Stammfunktionen die Gebiete in höheren Dimensionen dieselbe Rolle spielen wie die Intervalle in einer Dimension.

8 **Lemma** *Auf einem Gebiet $\Omega$ ist eine differenzierbare Abbildung $f : \Omega \to W$ konstant genau dann, wenn $Df$ verschwindet.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ $\Rightarrow$ Das ist trivial, unabhängig davon, ob $\Omega$ ein Gebiet ist oder nicht.

$\Leftarrow$ Fixiere einen Punkt $x_0 \in \Omega$ und betrachten einen weiteren Punkt $x \in \Omega$. Es existiert eine stückweise differenzierbare Kurve $\gamma : [a,b] \to \Omega$ mit

$$\gamma(a) = x_0, \qquad \gamma(b) = x.$$

Dann ist auch $g = f \circ \gamma : [a,b] \to W$ stückweise differenzierbar. Da $Df$ nach Voraussetzung überall verschwindet, gilt also auch stückweise

$$g'(t) = Df(\gamma(t))\gamma'(t) = 0.$$

Somit ist $g$ sogar $C^1$ und wegen $g' = 0$ auch konstant. Also ist $g(a) = g(b)$, was gleichbedeutend ist mit $f(x) = f(x_0)$. Da $x \in \Omega$ beliebig war, ist $f$ konstant auf ganz $\Omega$. ⟩⟩⟩⟩

Auf einem *Gebiet* ist eine differenzierbare Abbildung somit konstant genau dann, wenn ihre Ableitung überall verschwindet $_8$. Für eine skalare Funktion ist dies gleichbedeutend damit, dass ihr Differenzial verschwindet. Somit gilt folgendes

**Korollar** *Auf einem Gebiet unterscheiden sich die Stammfunktionen einer exakten 1-Form nur durch eine additive Konstante.* ⋊

Wir zeigen nun, dass auf einem Gebiet die Wegunabhängigkeit von 1-Form-Integralen auch *hinreichend* für die Exaktheit der 1-Form ist.

9 **Satz** *Sei $\alpha$ eine stetige 1-Form auf einem Gebiet $\Omega$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *$\alpha$ ist exakt auf $\Omega$.*

(ii) *Das Wegintegral von $\alpha$ ist unabhängig vom Verlauf des Weges.*

(iii) *Das Wegintegral von $\alpha$ verschwindet für jeden geschlossenen Weg.* ⋊

⟪⟪⟪ (i) ⇒ (ii) Das ist der Hauptsatz 7.

(ii) ⇒ (iii) Ein geschlossener Weg hat denselben Anfangs- und Endpunkt wie ein punktförmiger Weg. Das Wegintegral über einen Punktweg ist aber immer Null. Also gilt dies auch für beliebige geschlossene Wege.

(iii) ⇒ (ii) Seien $\omega_1$ und $\omega_2$ zwei $D^1$-Wege in $\Omega$ mit gleichem Anfangs- und Endpunkt. Dann ist $\omega_1 - \omega_2$ ein geschlossener Weg, und es gilt

$$0 = \int_{\omega_1-\omega_2} \alpha = \int_{\omega_1} \alpha - \int_{\omega_2} \alpha.$$

Das ist gleichbedeutend mit der Behauptung.

(ii) ⇒ (i) Dies ist der wesentliche Teil des Satzes. Da nach Voraussetzung jedes Wegintegral von $\alpha$ nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängt, können wir eine Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) \coloneqq \int_{x_0}^{x} \alpha$$

definieren, indem wir einen beliebigen Punkt $x_0 \in \Omega$ fixieren und das Integral über einen *beliebigen* Weg in $\Omega$ von $x_0$ nach $x$ bilden. Zu zeigen ist, dass dies eine Stammfunktion von $\alpha$ definiert.

Betrachte $x \in \Omega$. Für alle hinreichend kleinen $h$ liegt $[x, x+h]$ ganz in $\Omega$, und aufgrund der Wegunabhängigkeit des Integrals ist

$$f(x+h) - f(x) = \int_{x_0}^{x+h} \alpha - \int_{x_0}^{x} \alpha = \int_{[x,x+h]} \alpha.$$

Parametrisieren wir $[x, x+h]$ durch $t \mapsto x + th$ mit $0 \leqslant t \leqslant 1$, so folgt

$$f(x+h) - f(x) = \int_0^1 \alpha(x+th)h \,\mathrm{d}t.$$

Subtrahieren wir $\alpha(x)h$, so erhalten wir

$$f(x+h) - f(x) - \alpha(x)h = \int_0^1 [\alpha(x+th) - \alpha(x)]\, h \,\mathrm{d}t.$$

Aufgrund der Stetigkeit von $\alpha$ ist aber $[\alpha(x+th) - \alpha(x)]\, h = o(h)$, also

$$f(x+h) = f(x) + \alpha(x)h + o(h).$$

Somit ist $f$ im Punkt $x$ total differenzierbar, und es gilt

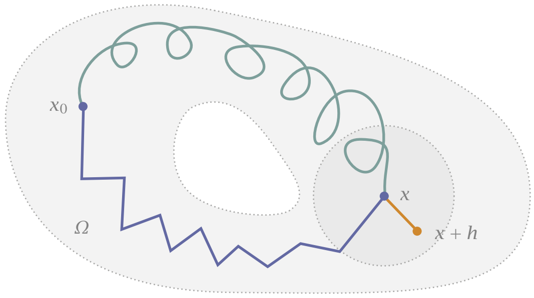
$$\mathrm{d}f(x)h = Df(x)h = \alpha(x)h.$$

Somit ist $\mathrm{d}f = \alpha$, was zu zeigen war. ⟫⟫⟫

19.14

Abb 7

Definition von $\int_{x_0}^{x} \alpha$




## 19.4 Lokal exakte 1-Formen

Der letzte Satz 9 charakterisiert exakte 1-Formen eindeutig über die Wegunabhängigkeit. Doch ist das Kriterium wenig praktikabel, da man nicht alle Wegintegrale überprüfen kann. Dagegen ist es leicht, eine *notwendige* Bedingung zu formulieren.

10 **Integrabilitätsbedingung** *Ist eine 1-Form $\alpha = \sum_{k=1}^n a_k \,\mathrm{d}x_k$ exakt und stetig differenzierbar, so erfüllen ihre Koeffizienten die Integrabilitätsbedingung*

$$\partial_l a_k = \partial_k a_l, \qquad 1 \leqslant k, l \leqslant n. \quad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Nach Voraussetzung ist

$$\alpha = \mathrm{d}f = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f \,\mathrm{d}x_k$$

mit einer stetig differenzierbar Funktion $f$. Ist $\alpha$ stetig differenzierbar, so sind alle partiellen Ableitungen von $f$ nochmals stetig differenzierbar. Somit ist $f$ sogar $C^2$, und mit dem Lemma von Schwarz 14.18 gilt

$$\partial_l a_k = \partial_l(\partial_k f) = \partial_k(\partial_l f) = \partial_k a_l, \qquad 1 \leqslant k, l \leqslant n. \quad ⟩⟩⟩⟩⟩$$

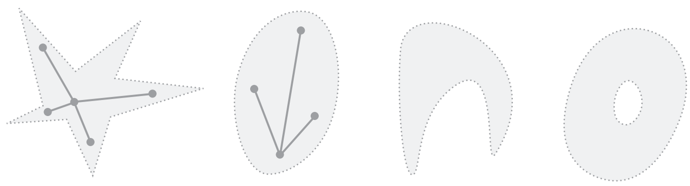
**Definition** *Eine stetig differenzierbare 1-Form heißt geschlossen, wenn sie die Integrabilitätsbedingungen 10 erfüllt.* $\rtimes$

**Korollar** *Jede stetig differenzierbare exakte 1-Form ist geschlossen.* $\rtimes$

11 ⊳ A. Auf dem $\mathbb{R}^2$ ist $u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y$ geschlossen, falls $\partial_y u = \partial_x v$.
B. Somit ist $y^2\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y$ nicht geschlossen, da $\partial_y(y^2) = 2y \neq 0 = \partial_x(1)$.
C. Die Windungsform $\upsilon$ 5 ist geschlossen, denn

$$\partial_x\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \partial_y\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Abb 8 Sternförmige und nicht sternförmige Mengen



D. Auf dem $\mathbb{R}^3$ ist $\alpha = u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y + w\,\mathrm{d}z$ geschlossen, falls

$$\partial_y w = \partial_z v, \qquad \partial_z u = \partial_x w, \qquad \partial_x v = \partial_y u.$$

Dies ist äquivalent zu

$$\nabla \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} w_y - v_z \\ u_z - w_x \\ v_x - u_y \end{pmatrix} = 0.$$

Man nennt dies auch die *Rotation* des Vektorfelds $(u, v, w)^\top$. ◂

## Das Lemma von Poincaré

Die Frage stellt sich, ob umgekehrt jede geschlossene 1-Form exakt ist. Die Antwort hierauf hat einen lokalen und einen globalen Aspekt. Lokal ist dies immer der Fall, wenn das Definitionsgebiet folgende geometrische Gestalt hat.

**Definition** *Eine Teilmenge $M$ des $\mathbb{R}^n$ heißt sternförmig, wenn es einen Punkt $m \in M$ gibt, so dass $[m, x] \subset M$ für alle $x \in M$. Jeder solche Punkt $m$ heißt ein Zentrum von $M$.* ⋊

Jede sternförmige Menge ist wegzusammenhängend, aber natürlich ist nicht jede wegzusammenhängende Menge sternförmig – siehe Abbildung 8.

▹ A. Jedes Intervall ist sternförmig bezüglich jedes seiner Punkte.
B. Die geschlitzte Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus (0, \infty)$ ist sternförmig mit Zentrum $0$.
C. Die gepunktete Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist *nicht* sternförmig.
D. Die Sphären $\mathbb{S}^n$, $n \geqslant 0$, sind *nicht* sternförmig.
E. Eine Menge ist sternförmig bezüglich jedes ihrer Punkte genau dann, wenn sie konvex ist. ◂

12 **Lemma von Poincaré** *Jede geschlossene 1-Form auf einem sternförmigen Gebiet ist exakt.* ⋊

19.16

Zunächst eine Vorüberlegung. *Falls* $\alpha = \mathrm{d}f$, also

$$\alpha(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\,\mathrm{d}x_k = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(x)\,\mathrm{d}x_k,$$

so gilt auch

$$\text{œ}\alpha(tx)x = \sum_{k=1}^{n} a_k(tx)x_k = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(tx)x_k = \partial_t f(tx).$$

Somit können wir $f$ aus $\alpha$ rekonstruieren, indem wir $\alpha(tx)x$ über $[0,1]$ integrieren. Diese Beobachtung ist die Grundlage des folgendes Beweises.

*Beweis des Lemmas von Poincaré* Sei $\alpha$ eine geschlossene 1-Form auf einer offenen sternförmigen Menge $\Omega$. Durch Translation der Koordinaten können wir erreichen, dass $\Omega$ sternförmig bezüglich $0$ ist. Dann ist

$$f(x) = \int_0^1 \alpha(tx)x\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{l=1}^{n} a_l(tx)x_l\,\mathrm{d}t$$

für jedes $x \in \Omega$ wohldefiniert, denn der Integrationsweg $[0,x]$ ist in $\Omega$ enthalten und die Koeffizienten von $\alpha$ sind stetig differenzierbar auf $\Omega$. Also definiert dies eine Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$.

Da die Koeffizienten $a_k$ in jeder Variablen $x_k$ stetig differenzierbar sind, ist es auch $f$ 14.19, und wir erhalten $\partial_k f$ durch Differenziation unter dem Integral. Es gilt also

$$\begin{aligned}\partial_k f(x) &= \int_0^1 \sum_{l=1}^{n} \partial_k(a_l(tx)x_l)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \Big(a_k(tx) + t\sum_{l=1}^{n} \partial_k a_l(tx)x_l\Big)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Aufgrund der Integrabilitätsbedingung ist aber $\partial_k a_l = \partial_l a_k$, und weiter ist

$$a_k(tx) + t\sum_{l=1}^{n} \partial_l a_k(tx)x_l = \partial_t(t a_k(tx)).$$

Also erhalten wir insgesamt

$$\partial_k f(x) = \int_0^1 \partial_t(t a_k(tx))\,\mathrm{d}t = t a_k(tx)\Big|_0^1 = a_k(x).$$

Somit gilt

$$\mathrm{d}f = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f\,\mathrm{d}x_k = \sum_{k=1}^{n} a_k\,\mathrm{d}x_k = \alpha.$$

Das war zu zeigen.

Auf sternförmigen Gebieten ist jede geschlossene 1-Form also exakt. Dies können sehr große Gebiete sein. Auf jeden Fall schließt es aber kleine Umgebungen eines jeden Punktes ein. Somit erhalten wir folgendes lokales Resultat.

**Korollar** *Jede geschlossene 1-Form ist lokal exakt.* $\rtimes$

Die Frage, wann aus der lokalen auch die globale Exaktheit folgt, betrachten wir im nächsten Abschnitt.

## 19.5 Global exakte 1-Formen

Eine geschlossene und damit lokal exakte 1-Form ist nicht notwendigerweise auch global exakt. Zum Beispiel ist die Windungsform $\upsilon$ [5] geschlossen [11] und daher *lokal* exakt. Sie ist aber *nicht global* exakt, da ihr Integral längs dem geschlossenen Einheitskreis nicht Null ist [5].

Wir wissen bereits, dass notwendig und hinreichend für die Exaktheit einer Form die Unabhängigkeit ihrer Wegintegrale vom *Verlauf* der Wege ist [9]. Als Erstes stellen wir nun fest, dass dies für lokal exakte Formen jedenfalls immer dann gilt, wenn diese Wege ineinander deformiert werden können. Hierzu benötigen wir den Begriff der *Homotopie* von Kurven.

**Definition** *Zwei stetige Kurven $\gamma_0, \gamma_1 \colon [a,b] \to \Omega$ mit gemeinsamen Anfangspunkt $p$ und Endpunkt $q$ heißen homotop in $\Omega$, wenn es eine stetige Abbildung*

$$h\colon\ [0,1]\times[a,b] \to \Omega, \quad (s,t) \mapsto h(s,t) =: h_s(t),$$

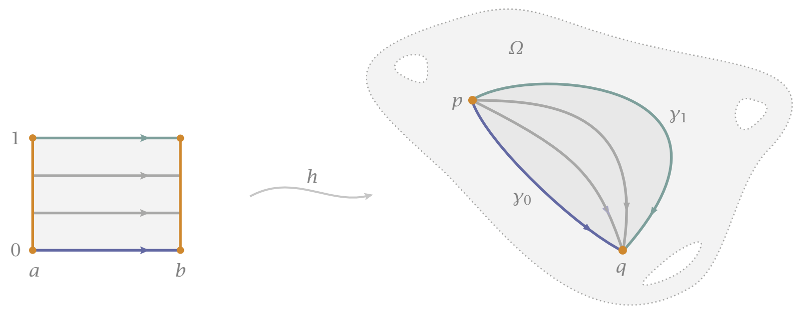
*gibt, so dass*

$$h_0 = \gamma_0, \qquad h_1 = \gamma_1$$

*sowie $h_s(a) = p$ und $h_s(b) = q$ für alle $0 \leqslant s \leqslant 1$.* $\rtimes$

Für jedes $s \in [0,1]$ ist also $h_s$ eine stetige Kurve von $p$ nach $q$ innerhalb von $\Omega$, die für $s = 0$ mit $\gamma_0$ und für $s = 1$ mit $\gamma_1$ übereinstimmt. Da $h$ auch stetig in $s$ ist, erhalten wir eine stetige Deformation der Kurve $\gamma_0$ in die Kurve $\gamma_1$, wobei die Endpunkte fixiert sind. Wichtig ist, dass diese Homotopie ganz in $\Omega$ verläuft. Die Kurven $\gamma_s$ dürfen nicht über ›Löcher‹ in $\Omega$ hinweggezogen werden – siehe Abbildung 9.

Abb 9 Homotopie von $\gamma_0$ und $\gamma_1$ in $\Omega$




▹ Sind $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ zwei Kurven in $\Omega$ mit gemeinsamen Anfangs- und Endpunkt, und gilt

$$[\gamma_0(t), \gamma_1(t)] \subset \Omega, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

so sind sie homotop mittels der Homotopie $h : [0,1] \times [a,b] \to \Omega$ mit

$$h(s,t) = (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t). \quad ◃$$

Da wir entlang den Kurven in einer Homotopie integrieren wollen, benötigen wir noch etwas mehr als nur deren Stetigkeit.

**Definition** *Zwei Kurven $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ mit gleichem Anfangs- und Endpunkt sind $D^1$-homotop, wenn es eine Homotopie $h : [0,1] \times [a,b] \to \Omega$ dieser Kurven gibt, die auf jedem horizontalen oder vertikalen Schnitt des Rechtecks $[0,1] \times [a,b]$ stückweise stetig differenzierbar ist.* ⋊

Ein *horizontaler Schnitt* ist hierbei eine Teilmenge

$$\{s\} \times [a,b] \subset [0,1] \times [a,b].$$

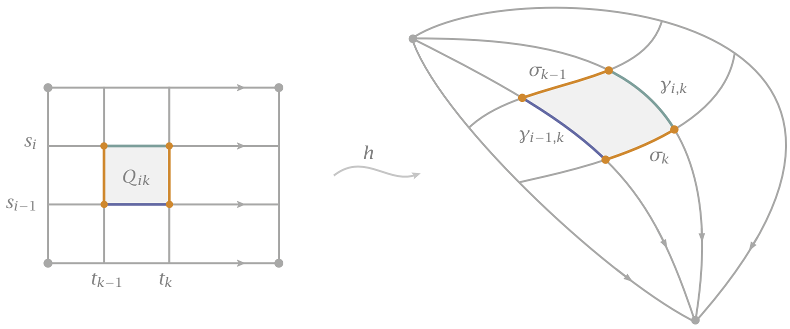
Entsprechend sind vertikale Schnitte erklärt.

**Homotopiesatz** *Sei $\alpha$ eine lokal exakte 1-Form auf $\Omega$. Dann gilt*

$$\int_{\gamma_0} \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha,$$

*wann immer die Kurven $\gamma_0$ und $\gamma_1$ $D^1$-homotop in $\Omega$ sind.* ⋊

Abb 10 Zum Beweis des Homotopiesatzes




⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $Q = [0,1] \times [a,b]$ und $h\colon Q \to \Omega$ eine $D^1$-Homotopie von $\gamma_0$ und $\gamma_1$ in $\Omega$. Zuerst zeigen wir, dass sich $Q$ so in *endlich viele* achsenparallele Rechtecke zerlegen lässt, dass $\alpha$ auf dem Bild jedes dieser Rechtecke exakt ist.

Angenommen, dies ist *nicht* möglich. Dann können wir eine fallende Folge abgeschlossener Rechtecke $Q \supset Q_1 \supset Q_2 \supset ..$ konstruieren, jedes ein Viertel so groß wie das vorangehende, so dass $\alpha$ auf dem Bild von $Q_k$ keine Stammfunktion besitzt. Der Durchschnitt aller $Q_k$ ist dann ein Punkt $r \in Q$. Nach dem Lemma von Poincaré $_{12}$ ist aber $\alpha$ in einer offenen Umgebung $U$ von $h(r)$ exakt. Diese Umgebung enthält aber die Bilder der $Q_k$ mit $k$ hinreichend groß. Somit erhalten wir einen Widerspruch.

Es gibt somit Teilungen $(s_1, .., s_m)$ von $[0,1]$ und $(t_1, .., t_n)$ von $[a,b]$ so, dass $\alpha$ in einer Umgebung des Bildes jedes Rechtecks

$$Q_{ik} = [s_{i-1}, s_i] \times [t_{k-1}, t_k], \qquad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

exakt ist. Wir zeigen nun, dass die Integrale entlang der Kurven $\gamma_i \coloneqq h_{s_i}$ für sukzessive Teilungspunkte unverändert bleiben, also

$$\int_{\gamma_{i-1}} \alpha = \int_{\gamma_i} \alpha, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m,$$

gilt. Daraus folgt dann die Behauptung.

Betrachte dazu die Kurvenabschnitte

$$\gamma_{i,k} = h(s_i, \cdot\,)\Big|_{[t_{k-1}, t_k]}, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

sowie die Verbindungskurven

$$\sigma_k = h(\,\cdot\,, t_k)\Big|_{[s_{i-1}, s_i]}, \qquad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Diese sind sämtlich stückweise stetig differenzierbar, und es gilt

$$\gamma_{i-1,k} + \sigma_k = \sigma_{k-1} + \gamma_{i,k}.$$

19.20

Gemeinsam bilden diese Kurven den Rand des Bildes des Rechtecks $Q_{ik}$ unter $h$. Nach Konstruktion ist $\alpha$ exakt in einer Umgebung dieser Menge, und daher das Wegintegral entlang beider Kurven gleich. Es gilt also

$$\int_{\gamma_{i-1,k}} \alpha + \int_{\sigma_k} \alpha = \int_{\sigma_{k-1}} \alpha + \int_{\gamma_{i,k}} \alpha.$$

Da dies für jedes $1 \leqslant k \leqslant n$ gilt, ergibt Aufsummieren über $k$ und Kürzen der Integrale über $\sigma_1, .., \sigma_{m-1}$ die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_{i-1,k}} \alpha + \int_{\sigma_m} \alpha = \int_{\sigma_0} \alpha + \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_{i,k}} \alpha. \tag{2}$$

Die Integrale über $\sigma_0$ und $\sigma_n$ sind aber Null, da es sich um Punktkurven handelt. Also folgt

$$\int_{\gamma_{i-1}} \alpha = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_{i-1,k}} \alpha = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_{i,k}} \alpha = \int_{\gamma_i} \alpha.$$

Da wir in endlich vielen Schritten von $\gamma_0$ zu $\gamma_1$ gelangen, ist damit alles bewiesen. ⟩⟩⟩⟩⟩

Der Homotopiesatz gilt für beliebige $D^1$-homotope Kurven mit festem Anfangs- und Endpunkt. Für *geschlossene* Kurven kann man aber diese letzte Forderung fallen lassen. Dies führt zum Begriff der *freien Homotopie*.

**Definition** *Zwei geschlossene Kurven $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ heißen frei homotop in $\Omega$, wenn es eine stetige Abbildung*

$$h : [0,1] \times [a,b] \to \Omega, \quad (s,t) \mapsto h(s,t) = h_s(t),$$

*gibt, so dass*

$$h_0 = \gamma_0, \qquad h_1 = \gamma_1,$$

*und jede Kurve $h_s$ für $0 \leqslant s \leqslant 1$ geschlossen ist.* ⋊

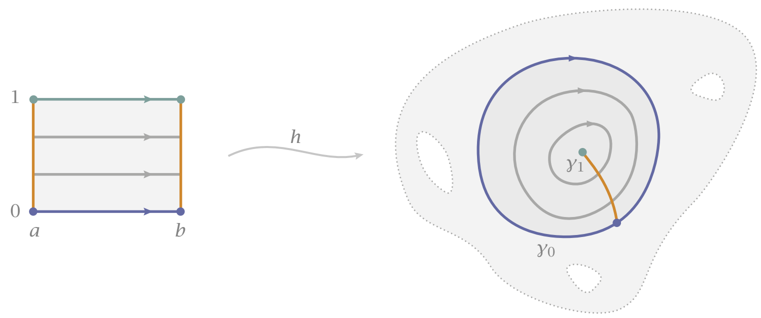
Alle Kurven $h_s$ der Homotopie verlaufen also in $\Omega$ und sind geschlossen. *Frei $D^1$-homotope Kurven* sind analog zu $D^1$-homotopen Kurven definiert.

13 **Freier Homotopiesatz** *Sei $\alpha$ eine lokal exakte 1-Form auf $\Omega$. Sind $\gamma_0$ und $\gamma_1$ zwei geschlossene, in $\Omega$ frei $D^1$-homotope Kurven, so gilt*

$$\int_{\gamma_0} \alpha = \int_{\gamma_1} \alpha. \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Der Beweis ist identisch mit dem letzten Beweis, bis auf die Bemerkung über die $\sigma$-Integrale in (2). Diese sind nicht Null, sondern *gleich*. Die Folgerung hieraus gilt also ebenfalls. ⟩⟩⟩⟩⟩

Abb 11 Freie Homotopie von $\gamma_0$ zu einer Punktkurve $\gamma_1$




Ein wichtiger Spezialfall dieses Satzes ergibt sich für *nullhomotope Kurven*. Dies sind geschlossene Kurven, die frei homotop zu einer Punktkurve sind. Da das Kurvenintegral einer beliebigen 1-Form über eine Punktkurve verschwindet, erhalten wir folgenden

14 **Satz** *Ist $\alpha$ eine lokal exakte 1-Form auf $\Omega$, so ist*

$$\int_\gamma \alpha = 0$$

*für jede in $\Omega$ $D^1$-nullhomotope Kurve $\gamma$.* ⋊

Wir kommen nun zurück zu der Frage, wann eine lokal exakte 1-Form auch global exakt ist. Wir wissen bereits, dass dies genau dann der Fall ist, wenn ihr Wegintegral entlang jedes geschlossenen Weges verschwindet 9. Aufgrund des letzten Satzes ist dies sicher immer dann der Fall, wenn jede geschlossene Kurve nullhomotop ist. Dies ist nun eine rein topologische Frage und betrifft ausschließlich die Geometrie des Gebietes.

**Definition** *Eine wegzusammenhängende Teilmenge $M$ in $\mathbb{R}^n$ heißt einfach zusammenhängend, wenn jede geschlossene Kurve in $M$ nullhomotop ist.* ⋊

Abb 12 Einfach zusammenhängende Menge, und nicht

A. Eine sternförmige Menge ist einfach zusammenhängend.
B. Die Sphären $\mathbb{S}^n$ sind einfach zusammenhängend für $n \geqslant 2$.
C. Der punktierte Raum $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ist einfach zusammenhängend.
D. Die punktierte Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist *nicht* einfach zusammenhängend.
E. Ebensowenig ist die Kreislinie $\mathbb{S}^1$ einfach zusammenhängend.
F. Der Raum $\mathbb{R}^3$ ohne eine der Koordinatenachsen ist ebenfalls nicht einfach zusammenhängend.

15 **Satz** *Auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet $\Omega$ ist jede lokal exakte 1-Form auch global exakt. Insbesondere gilt*

$$\int_\gamma \alpha = 0$$

*für jede geschlossene $D^1$-Kurve in $\Omega$.*

Das Wegintegral einer lokal exakten 1-Form entlang eines beliebigen geschlossenen Weges ist invariant unter freien Homotopien. In einem einfach zusammenhängenden Gebiet ist jede solche Kurve nullhomotop, und damit jedes solche Wegintegral Null. Also ist die lokal exakte 1-Form auch global exakt $_{9}$.

*Bemerkung* Der letzte Satz bietet auch eine Möglichkeit zu zeigen, dass ein Gebiet *nicht* einfach zusammenhängend ist. Dies ist der Fall, wenn das Wegintegral einer geschlossenen 1-Form entlang eines einzigen geschlossenen Weges *nicht* Null ist. Eine geeignete 1-Form hierfür ist meist die Windungsform $\upsilon$ $_{5}$.

Als letzten Satz erwähnen wir eine Anwendung aus der klassischen Mechanik. Tatsächlich standen solche Anwendungen am Anfang der Entwicklung des Kalküls der Wegintegrale.

**Satz** *Auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet im $\mathbb{R}^3$ ist jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $V$ mit $\nabla \times V = 0$ ein Gradientenfeld, also*

$$V = \nabla U$$

*mit einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion $U$.*

Die Bedingung $\nabla \times V = 0$ ist gleichbedeutend damit, dass die dem Vektorfeld $V$ mittels des Standardskalarprodukts zugeordnete 1-Form $\alpha_V$ geschlossen ist $_{11}$. Also ist $\alpha_V$ lokal exakt. Auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet ist sie dann auch global exakt $_{15}$. Es gibt also eine stetig differenzierbare Funktion $U$ mit $\mathrm{d}U = \alpha_V$. Dies ist aber gleichbedeutend mit

$$\nabla U = V.$$

Da außerdem $V$ $C^1$ ist, ist $U$ selbst $C^2$.