20

Das Lebesgueintegral

Wir erklären nun das *Lebesgueintegral* für Funktionen

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Dabei gehen wir wie beim Cauchyintegral vor, indem wir das Integral zuerst für Treppenfunktionen definieren. Dabei genügt es, Maße für Intervalle zu betrachten. Eine allgemeine Maßtheorie wird nicht benötigt.

Dieses Integral wird auf solche nichtnegativen Funktionen ausgedehnt, die sich *punktweise* von unten durch Treppenfunktionen approximieren lassen. Dabei spielt gleichmäßige Konvergenz keine Rolle. Lassen wir auch den Wert ∞ zu, so ist das Integral für *jede* solche Funktion erklärt. Erst im dritten Schritt wird das Integral für allgemeine Funktionen als Differenz der Integrale ihres Positiv- und Negativteils erklärt. Diese Teilintegrale müssen allerdings endlich sein, damit deren Differenz wohldefiniert und endlich ist.

Das Lebesgueintegral ist von vornherein auf dem ganzen $\mathbb{R}^n$ erklärt. Das Integral über messbare Teilmengen erhält man hieraus durch Multiplikation mit deren charakteristischen Funktionen. Es gibt daher kein uneigentliches Lebesgueintegral, vielmehr ist das ›eigentliche Integral‹ ein Spezialfall des allgemeinen Lebesgueintegrals.

Die besondere Bedeutung des Lebesgueintegrals für die Analysis liegt darin, dass es mit Grenzübergängen unter sehr allgemeinen Bedingungen vertauscht.

20.1 Intervallfunktionen

Ein *Intervall* im $\mathbb{R}^n$ oder kurz *n-Intervall* ist das kartesische Produkt

$$I = I^1 \times .. \times I^n$$

aus n reellen Intervallen $I^1, .., I^n$.[1] Diese können offen, einseitig offen, abgeschlossen, beschränkt, unbeschränkt, zu einem Punkt entartet oder leer sein. Sind sie *alle* offen respektive abgeschlossen respektive beschränkt respektive kompakt, so ist es auch ihr Produkt. Ist dagegen *ein* reelles Intervall I^j entartet respektive leer, so ist auch das Produkt I entartet respektive leer.

Die Vereinigung zweier n-Intervalle ist im Allgemeinen kein n-Intervall. Für Durchschnitte gilt jedoch folgendes Lemma, dessen Beweis als Übung überlassen wird.

1 **Lemma** *Ist $(I_k)_{k \geqslant 1}$ eine Folge beliebiger n-Intervalle, so ist auch deren Durchschnitt ein n-Intervall.* $\rtimes$

▪ Intervallfunktionen

Sei $\mathcal{J}^n$ die Familie aller *beschränkten* n-Intervalle. Unbeschränkte Intervalle bleiben also außen vor.

Definition *Eine Intervallfunktion ist eine Funktion $\mu \colon \mathcal{J}^n \to \mathbb{R}$. Diese heißt*

(i) *additiv, wenn für alle $I_1, I_2 \in \mathcal{J}^n$*

$$I_1 \cap I_2 = \varnothing \ \wedge \ I_1 \cup I_2 \in \mathcal{J}^n \quad \Rightarrow \quad \mu(I_1 \cup I_2) = \mu(I_1) + \mu(I_2),$$

(ii) *monoton, wenn für alle $I_1, I_2 \in \mathcal{J}^n$*

$$I_1 \subset I_2 \quad \Rightarrow \quad \mu(I_1) \leqslant \mu(I_2),$$

(iii) *regulär, wenn zu jedem Intervall $I \in \mathcal{J}^n$ und $\varepsilon > 0$ ein offenes Intervall $I_* \supset I$ existiert, so dass*

$$|\mu(I_*) - \mu(I)| < \varepsilon. \quad \rtimes$$

[1] Im Folgenden bezeichnet ein Hochindex 1-Intervalle, ein Tiefindex n-Intervalle.

Abb 1

Entartete und nichtentartete 2-Intervalle

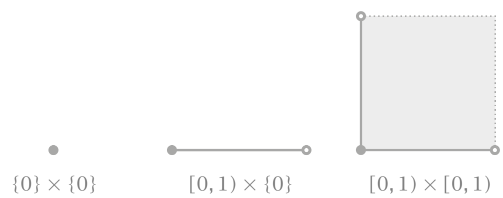


Abb 2

Intervall als Vereinigung von Intervallen

Man beachte, dass für die Additivität nur solche Intervalle betrachtet werden, deren Vereinigung wieder ein Intervall ist. — Nun einige einfache Bemerkungen.

2 **Lemma** *Ist eine Intervallfunktion μ additiv, so ist $\mu(\varnothing) = 0$.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Da $\varnothing \in \mathcal{J}^n$ und $\varnothing = \varnothing \cup \varnothing$, gilt auch $\mu(\varnothing) = \mu(\varnothing \cup \varnothing) = \mu(\varnothing) + \mu(\varnothing)$. Daraus folgt die Behauptung. ⟩⟩⟩⟩⟩

3 **Lemma** *Eine Intervallfunktion μ ist additiv genau dann, wenn für je endlich viele disjunkte Intervalle $I_1, .., I_m \subset \mathcal{J}^n$ gilt:*

$$I = \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant m} I_k \in \mathcal{J}^n \quad \Rightarrow \quad \mu(I) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} \mu(I_k). \qquad ⋊$$

Man beachte, dass $I = I_1 \cup .. \cup I_m$ wieder ein Intervall sein muss.

⟨⟨⟨⟨⟨ Der Beweis ist elementar, aber etwas umständlich, da man nicht direkt per Induktion vorgehen kann. Vielmehr zerlegt man zuerst die Intervalle I_k so in kleinere Intervalle, dass sich $\mu(I_k)$ durch Induktion als Summe ihrer Maße darstellen lässt. Danach erhält man ebenso das Gesamtmaß $\mu(I)$ durch Induktion – siehe Abbildung 2. Die Details übergehen wir. ⟩⟩⟩⟩⟩

4 **Lemma** *Eine additive Intervallfunktion μ ist monoton genau dann, wenn sie nichtnegativ ist.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Ist μ monoton, so gilt für jedes Intervall $I \in \mathcal{J}^n$ wegen $\varnothing \subset I$ auch $\mu(\varnothing) \leqslant \mu(I)$. Wegen $\mu(\varnothing) = 0$ $_{1.2}$ ist also μ nichtnegativ.

Sei umgekehrt μ nichtnegativ. Sind $J \subset I$ zwei Intervalle in $\mathcal{J}^n$, so ist die Differenz $I \setminus J$ darstellbar als Vereinigung disjunkter Intervalle $J_1, .., J_m$ $_{\text{A-1.9}}$. Mit $I = J \cup J_1 \cup .. \cup J_m$, der Additivität $_{1.3}$ und Nichtnegativität von μ folgt

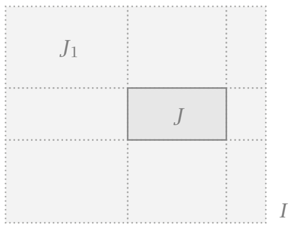
$$\mu(I) = \mu(J) + \mu(J_1) + .. + \mu(J_m) \geqslant \mu(J).$$

Also ist μ auch monoton. ⟩⟩⟩⟩⟩

Lemma *Eine monotone Intervallfunktion μ ist regulär genau dann, wenn es zu jedem Intervall $I \in \mathcal{J}^n$ und jedem $\varepsilon > 0$ ein offenes Intervall $I_* \supset I$ gibt, so dass $\mu(I_*) \leqslant \mu(I) + \varepsilon$.* ⋊

Abb 3

Darstellung von $I \setminus J$



⟪⟪ Ist μ monoton, so gilt für $I_* \supset I$ immer $\mu(I_*) \geqslant \mu(I)$. Es muss also nur noch $\mu(I_*) \leqslant \mu(I) + \varepsilon$ gefordert werden, um $|\mu(I_*) - \mu(I)| < \varepsilon$ zu erhalten. ⟫⟫

■ Maße

Wir spezifizieren nun diejenigen Intervallfunktionen, die sich für die Definition eines Integrals eignen.

Definition *Ein Maß ist eine additive, monotone, reguläre Intervallfunktion.* ⋊

Insbesondere ist also ein Maß μ immer nichtnegativ mit $\mu(\varnothing) = 0$. In der Maßtheorie ist der Begriff des Maßes wesentlich allgemeiner. Die hier gewählte Definition reicht aber für unsere Bedürfnisse.

▷ *Beispiele für Maße* A. Bezeichnet $|\cdot|$ die euklidische Länge eines eindimensionalen Intervalls, so wird für $I = I^1 \times .. \times I^n \in \mathfrak{I}^n$ durch

$$\lambda_n(I) = \lambda_n(I^1 \times .. \times I^n) \coloneqq \prod_{1 \leqslant \nu \leqslant n} |I^\nu|$$

das *Volumenmaß* λ_n auf $\mathbb{R}^n$ erklärt. Für $n = 1$ sprechen wir auch vom *Längenmaß*, für $n = 2$ vom *Flächenmaß*.

B. Sei $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ eine *diskrete Menge*, also eine Menge ohne Häufungspunkte. Eine beliebige Funktion

$$m: \ \Lambda \to (0, \infty)$$

ordnet jedem Punkt $p \in \Lambda$ eine *Masse* $m(p)$ zu. Mit der Definition

$$m(I) \coloneqq \sum_{p \in I \cap \Lambda} m(p), \qquad I \in \mathfrak{I}^n,$$

dehnen wir m zu einem Maß aus, genannt *diskrete Masseverteilung* auf Λ. Man beachte, dass $I \cap \Lambda$ immer endlich ist, auch wenn Λ unendlich ist.

C. Die *konstante Verteilung* $\nu: \Lambda \to \{1\}$ ist ein Spezialfall einer diskreten Masseverteilung. In diesem Fall ist

$$\nu(I) = \operatorname{card}(I \cap \Lambda),$$

20.4

also die Anzahl der Punkte in Λ, die in I liegen. Daher spricht man auch von einem *Zählmaß*. Zählmaße auf $\mathbb{N}$ oder $\mathbb{Z}$ erlauben es, Reihen als Integrale zu betrachten. Alle Sätze über das Lebesgueintegral gelten damit entsprechend auch für Reihen.

D. Jede monoton steigende Funktion $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert auf $\mathcal{J}^1$ durch

$$\mu_\varphi([a,b]) \coloneqq \varphi_+(b) - \varphi_-(a), \qquad \mu_\varphi((a,b]) \coloneqq \varphi_+(b) - \varphi_+(a),$$
$$\mu_\varphi([a,b)) \coloneqq \varphi_-(b) - \varphi_-(a), \qquad \mu_\varphi((a,b)) \coloneqq \varphi_-(b) - \varphi_+(a),$$

das sogenannte *Lebesgue-Stieltjes-Maß* μ_φ zur *Verteilungsfunktion* φ A-1.10. Ist zum Beispiel s eine Sprungstelle von φ, so ist

$$\mu_\varphi(\{s\}) = \varphi_+(s) - \varphi_-(s) > 0$$

die Sprunghöhe von φ in diesem Punkt.

E. Ein Maß μ_r auf $\mathbb{R}^r$ und ein Maß μ_s auf $\mathbb{R}^s$ definieren ein *Produktmaß* $\mu_{r,s} = \mu_r \times \mu_s$ auf $\mathbb{R}^{r+s}$. Denn jedes $I \in \mathcal{J}^{r+s}$ hat eine eindeutige Darstellung

$$I = I_r \times I_s, \qquad I_r \in \mathcal{J}^r, \quad I_r \in \mathcal{J}_s,$$

und

$$\mu_{r,s}(I) = \mu_{r,s}(I_r \times I_s) \coloneqq \mu_r(I_r)\mu_s(I_s)$$

ergibt ein wohldefiniertes Maß auf $\mathcal{J}^{r+s}$. Für das Volumenmaß gilt beispielsweise

$$\lambda_2 = \lambda_1 \times \lambda_1, \qquad \lambda_3 = \lambda_2 \times \lambda_1 = \lambda_1 \times \lambda_1 \times \lambda_1.$$

F. Ist $A \in \mathcal{J}^n$ mit $\lambda(A) > 0$ fest gewählt, so definiert

$$\lambda_A(I) \coloneqq \frac{\lambda(I \cap A)}{\lambda(A)}$$

das *relative Volumenmaß* λ_A. Für jedes Intervall $I \supset A$ gilt dann $\lambda_A(I) = 1$. ◁

Im Folgenden bezeichnet λ_n oder kürzer λ immer das Volumenmaß, auch wenn wir dies nicht jedes Mal erwähnen.

▪ Nullmengen

Ein Charakteristikum des zu definierenden Integrals ist, dass alles ignoriert werden kann, was auf *Nullmengen* stattfindet. Diese Mengen spielen deshalb eine wichtige Rolle.

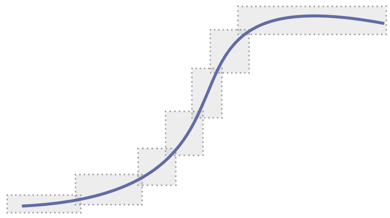
Definition *Sei μ ein Maß auf $\mathcal{J}^n$. Eine Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ heißt μ-Nullmenge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Folge von n-Intervallen $(I_k)_{k\geqslant 1}$ gibt, so dass*

$$N \subset \bigcup_{k\geqslant 1} I_k, \qquad \sum_{k\geqslant 1} \mu(I_k) < \varepsilon. \quad ⋊$$

20.5

Abb 4

Überdeckung einer λ-Nullmenge



Bemerkungen *a.* Eine μ-Nullmenge N kann also durch abzählbar viele Intervalle mit beliebig kleinem Gesamtmaß überdeckt werden. Dabei ist N eine völlig beliebige Menge. Sie kann zum Beispiel auch unbeschränkt sein.

b. Wird N bereits durch *endlich* viele Intervalle derart überdeckt, so ist N ebenfalls eine μ-Nullmenge. Denn wir können diese durch leere Intervalle zu einer abzählbar unendlichen Folge $(I_k)_{k\geqslant 1}$ ergänzen, die wegen $\mu(\varnothing) = 0$ die gewünschten Eigenschaften hat.

c. Jede Teilmenge einer μ-Nullmenge ist ebenfalls eine μ-Nullmenge.

d. Es hängt immer vom Maß μ ab, ob eine Menge eine Nullmenge ist. ⊸

5 **Lemma** *Die abzählbare Vereinigung von μ-Nullmengen ist wieder eine μ-Nullmenge.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $(N_k)_{k\geqslant 1}$ eine Folge von Nullmengen, N deren Vereinigung und $\varepsilon > 0$. Dann existiert zu jedem $k \geqslant 1$ eine Folge von Intervallen $(I_{k,l})_{l\geqslant 1}$ mit

$$N_k \subset \bigcup_{l\geqslant 1} I_{k,l}, \qquad \sum_{l\geqslant 1} \mu(I_{k,l}) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Die Vereinigung aller dieser Intervalle $I_{k,l}$ ist wieder abzählbar $_{3.19}$, und es gilt

$$N = \bigcup_{k\geqslant 1} N_k \subset \bigcup_{k,l\geqslant 1} I_{k,l}.$$

Außerdem gilt

$$\sum_{k,l\geqslant 1} \mu(I_{k,l}) = \sum_{k\geqslant 1} \left(\sum_{l\geqslant 1} \mu(I_{k,l}) \right) < \sum_{k\geqslant 1} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Da also zu jedem $\varepsilon > 0$ eine solche Überdeckung existiert, ist N ebenfalls eine μ-Nullmenge. ⟩⟩⟩⟩⟩

▹ A. Jedes Intervall $I \in \mathfrak{J}^n$ mit $\mu(I) = 0$ ist eine μ-Nullmenge.
B. Jede abzählbare Menge ist eine λ_n-Nullmenge für jedes $n \geqslant 1$.
C. Insbesondere ist $\mathbb{Q}$ eine λ_1-Nullmenge in $\mathbb{R}$.
D. Jede Hyperebene im $\mathbb{R}^n$ ist eine λ_n-Nullmenge.
E. Der Graph einer stetigen Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist eine λ_2-Nullmenge.

F. Ist m eine beliebige Masseverteilung auf der diskreten Menge $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$, so ist *jede Menge* $N \subset \mathbb{R}^n$, die keinen Punkt von Λ enthält, eine m-Nullmenge.

G. Ist die monoton steigende Funktion $\varphi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konstant auf einem Intervall I, so ist der offene Kern von I eine μ_φ-Nullmenge. ◂

Im Beweis des Satzes von Tonelli 21.1 benötigen wir noch folgende äquivalente Charakterisierung einer μ-Nullmenge.

6 **Lemma** *Eine Menge N ist eine μ-Nullmenge genau dann, wenn es eine Überdeckung (I_k) durch Intervalle gibt, so dass deren μ-Gesamtmaß endlich ist und jeder Punkt von N von unendlich vielen Intervallen überdeckt wird.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ ⇒ Zu jedem $k \geqslant 1$ existiert eine Überdeckung $(I_{k,l})_{l \geqslant 1}$ von N mit Gesamtmaß kleiner als $1/2^k$. Die *gesamte* Familie $(I_{k,l})_{k,l \geqslant 1}$ ist dann eine Überdeckung von N mit endlichem Gesamtmaß, wobei jeder Punkt von Intervallen beliebig kleinen Maßes überdeckt wird. Also wird jeder Punkt unendlich oft überdeckt.

⇐ Sei (I_k) eine solche Überdeckung. Zu $\varepsilon > 0$ existiert dann ein K mit

$$\sum_{k \geqslant K} \mu(I_k) < \varepsilon,$$

und $(I_k)_{k \geqslant K}$ ist immer noch eine Überdeckung von N. Also ist N eine μ-Nullmenge. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ μ-fast überall

Nun vereinbaren wir noch einige Redeweisen.

Eine Funktion f heißt *μ-definiert* auf $\mathbb{R}^n$, wenn es eine μ-Nullmenge N gibt, so dass f auf N^c definiert ist. Ist (f_k) eine Folge μ-definierter Funktionen, so gibt es auch *eine* gemeinsame μ-Nullmenge N, so dass *alle* f_k auf N^c definiert sind 1.5. Man sagt dann auch, die Folge $(f_k)_{k \geqslant 1}$ sei *μ-definiert*.

Allgemeiner sagt man, eine Eigenschaft gilt *μ-fast überall* auf $\mathbb{R}^n$, wenn es eine μ-Nullmenge N gibt, so dass diese Eigenschaft auf N^c gilt. So heißen zum Beispiel zwei Funktionen f und g *μ-fast überall gleich*, geschrieben $f =_\mu g$, wenn es eine μ-Nullmenge N gibt, so dass f und g auf N^c definiert sind und dort übereinstimmen. Entsprechend sind $f \leqslant_\mu g$ und $f \geqslant_\mu g$ erklärt.

Schließlich heißt eine Funktionenfolge (f_k) *μ-fast überall konvergent* oder kurz *μ-konvergent* gegen eine Funktion f, wenn es eine μ-Nullmenge N gibt, so dass alle f_k auf N^c definiert sind und dort punktweise gegen f konvergieren. Dafür schreiben wir auch $f_k \to_\mu f$. Entsprechend ist eine *μ-monotone* Funktionenfolge definiert.

Abb 5

Differenz zweier Intervalle

▪ Zulässige Mengen

Vereinigung und Differenz von Intervallen sind im Allgemeinen *keine* Intervalle. Daher betrachten wir nun die größere Familie der *zulässigen Mengen*, die ebenfalls sämtlich beschränkt sind.

Definition *Jede Vereinigung von endlich vielen Intervallen in $\mathfrak{J}^n$ heißt eine zulässige Menge im $\mathbb{R}^n$. Ihre Familie wird mit $\mathfrak{Z}^n$ bezeichnet.* ⋊

7 **Satz** *Die Familie $\mathfrak{Z}^n$ bildet einen Mengenkörper: Vereinigung, Durchschnitt und Differenz endlich vieler zulässiger Mengen sind wieder zulässige Mengen.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Seien $M = I_1 \cup .. \cup I_m$ und $N = J_1 \cup .. \cup J_n$ zulässige Mengen. Es ist klar, dass deren Vereinigung wieder eine zulässige Menge ist. Ihr Durchschnitt ist

$$M \cap N = \bigcup_{k,l} (I_k \cap J_l).$$

Jeder Schnitt $I_k \cap J_l$ ist ein beschränktes n-Intervall $_{1.1}$, und die Vereinigung ist endlich. Also ist $M \cap N$ ebenfalls zulässig.

Ihre Differenz können wir darstellen als

$$M \setminus N = (I_1 \cup .. \cup I_m) \setminus (J_1 \cup .. \cup J_n) = \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant m} \left\{ \bigcap_{1 \leqslant l \leqslant n} I_k \setminus J_l \right\}.$$

Jede Differenz $I_k \setminus I_l$ ist eine zulässige Menge, wie man elementar beweist. Durchschnitt und Vereinigung ergeben hieraus wieder zulässige Mengen, wie bereits gezeigt wurde. Also ist auch $M \setminus N$ zulässig. ⟩⟩⟩⟩⟩

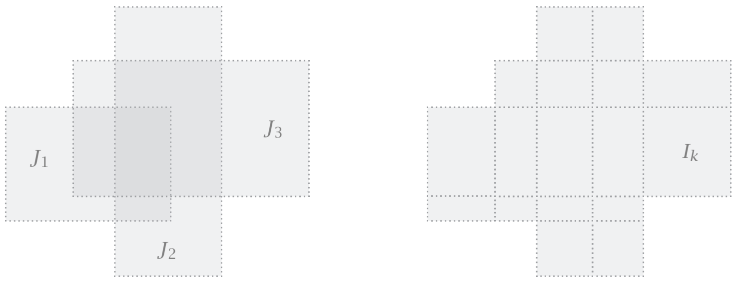
Wichtig für die Definition des Integrals ist die Beobachtung, dass zulässige Mengen immer als Vereinigung *disjunkter* Intervalle geschrieben werden können. Der Beweis des folgenden Lemmas ist als Übung überlassen.

8 **Lemma** *Jede zulässige Menge $M = J_1 \cup .. \cup J_n$ kann geschrieben werden als Vereinigung paarweise disjunkter Intervalle $I_1, .., I_m$ mit*

$$I_k \cap J_l \neq \varnothing \quad \Rightarrow \quad I_k \subset J_l$$

für alle k, l. Jedes I_k ist also ganz oder gar nicht in jedem J_l enthalten. ⋊

Abb 6 Darstellung einer zulässigen Menge



20.2 Treppenfunktionen

Wie beim Cauchyintegral definieren wir das Lebesgueintegral zunächst für besonders einfache Funktionen. Die Klasse dieser Funktionen hängt nicht vom Maß μ ab.

Definition *Eine Treppenfunktion auf dem $\mathbb{R}^n$ ist eine Funktion der Gestalt*

$$s = \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} c_k \chi_{I_k}$$

mit endlich vielen Intervallen $I_k \in \mathfrak{J}^n$ und reellen Zahlen $c_k \in \mathbb{R}$. Der Raum aller solchen Treppenfunktionen wird mit $\mathcal{T}^n$ bezeichnet. ⋊

Bemerkung Einige oder alle Koeffizienten c_k dürfen hierbei Null sein. Man muss also nicht solche Konstanzintervalle ›aussortieren‹, auf denen s verschwindet. ⊸

Jede Treppenfunktion s nimmt nur endlich viele Werte an und ist damit *beschränkt*. Ihr *Träger*, definiert als die *abgeschlossene* Menge

$$\operatorname{supp}(s) \coloneqq \{s \neq 0\}^- = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) \neq 0\}^-,$$

ist ebenfalls beschränkt, somit kompakt, und eine zulässige Menge.

Jede Treppenfunktion s besitzt unendlich viele solcher Darstellungen. Insbesondere gibt es auch immer Darstellungen mit disjunkten Intervallen I_k 1.8. Diese nennen wir ein *mit s verträgliches System*, und die einzelnen Intervalle heißen *Konstanzintervalle* von s. Ein gemeinsames verträgliches System gibt es auch für jede endliche Zahl von Treppenfunktionen:

9 **Lemma** *Zu je endlich vielen Treppenfunktionen gibt es immer ein gemeinsames verträgliches System von Konstanzintervallen.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Seien $s_1,..,s_n$ Treppenfunktionen und $I_{k,1},..,I_{k,l_k}$ die Konstanzintervalle von s_k. Die Vereinigung dieser endlich vielen Intervalle ist eine zulässige Menge. Es gibt daher ${}_{1.8}$ paarweise disjunkte Intervalle $J_1,..,J_r$ so, dass

$$\bigcup_{1\leqslant i\leqslant r} J_i = \bigcup_{1\leqslant k\leqslant n}\,\bigcup_{1\leqslant l\leqslant l_k} I_{k,l},$$

wobei jedes J_i ganz oder gar nicht in jedem dieser $I_{k,l}$ enthalten ist. Somit ist jedes J_i Konstanzintervall jeder Treppenfunktion s_k. Also bildet $J_1,..,J_r$ ein mit allen $s_1,..,s_n$ verträgliches System. ⟩⟩⟩⟩⟩

10 **Lemma** *Sind s und t Treppenfunktionen, so sind es auch αs für $\alpha\in\mathbb{R}$ sowie*

$$s+t,\quad st,\quad \max(s,t),\quad \min(s,t),\quad |s|.$$

Somit bildet $\mathcal{T}^n$ eine reelle Algebra. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Betrachte zum Beispiel $\max(s,t)$. Wählen wir zu s und t ein gemeinsames verträgliches System von Konstanzintervallen $I_1,..,I_m$ ${}_{1.9}$, so ist

$$s = \sum_{1\leqslant k\leqslant m} a_k\chi_{I_k},\qquad t = \sum_{1\leqslant k\leqslant m} b_k\chi_{I_k}.$$

Dann gilt

$$\max(s,t) = \sum_{1\leqslant k\leqslant m} \max(a_k,b_k)\chi_{I_k}.$$

Also ist $\max(s,t)$ ebenfalls eine Treppenfunktion. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Integral

Das Lebesgueintegral einer Treppenfunktion wird wie beim Cauchyintegral definiert. Der einzige Unterschied ist, dass wir Intervalle mit einem allgemeineren Maß als nur dem Volumenmaß messen.

Definition *Sei*

$$s = \sum_{1\leqslant k\leqslant m} c_k\chi_{I_k}$$

eine Treppenfunktion mit disjunkten Intervallen $I_k\in\mathcal{J}^n$. Dann ist das Lebesgueintegral von s bezüglich eines Maßes μ oder kurz das μ-Integral von s definiert als die reelle Zahl

$$I_\mu(s) := \sum_{1\leqslant k\leqslant m} c_k\mu(I_k). \qquad ⋊$$

Das Integral von Treppenfunktionen ist immer *endlich*, da alle Intervalle beschränkt sind und die Summe endlich ist.

Diese Definition ist natürlich erst gerechtfertigt, wenn wir zeigen, dass der Wert des Integrals nicht von der Darstellung von s abhängt. Der Beweis beruht darauf, dass es zu je zwei verschiedenen verträglichen Systemen von Konstanzintervallen einer Treppenfunktion immer ein weiteres solches System gibt, dessen Intervalle ganz oder gar nicht in den vorliegenden Intervallen enthalten sind $_{1.9}$. Der Rest ist dann Routine.

▹ a. Für das Längenmaß λ ist dies das Cauchyintegral $_{10.1}$.

b. Für eine Masseverteilung m auf einer diskreten Menge Λ ist

$$I_m(s) = \sum_{p\in\Lambda} s(p)m(p),$$

wobei wegen der Kompaktheit des Trägers von s die Summe sich nur über die endlich vielen Punkte in $\Lambda \cap \operatorname{supp}(s)$ erstreckt. Die Summe ist also endlich, auch wenn Λ keine endliche Menge ist.

c. Bezüglich des Zählmaßes ν auf $\mathbb{N}$ ist jede Funktion $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit beschränktem Träger eine Treppenfunktion, und

$$I_\nu(a) = \sum_{n\geqslant 1} a(n). \qquad ◃$$

11 **Satz** *Das μ-Integral auf $\mathcal{T}^n$ ist linear, monoton, und erfüllt die Dreiecksungleichung. Für Treppenfunktionen s,t und reelle Zahlen α gilt also*

(i) *Linearität:* $I_\mu(\alpha s + t) = \alpha I_\mu(s) + I_\mu(t)$,

(ii) *Monotonie:* $s \leqslant t \;\Rightarrow\; I_\mu(s) \leqslant I_\mu(t)$,

(iii) *Dreiecksungleichung:* $|I_\mu(s)| \leqslant I_\mu(|s|)$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Die letzten beiden Eigenschaften folgen aus der Positivität des Maßes. So ist zum Beispiel mit einem verträglichen Intervallsystem

$$|I_\mu(s)| = \left|\sum_{1\leqslant k\leqslant m} c_k\mu(I_k)\right| \leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant m} |c_k|\,\mu(I_k) = I_\mu(|s|).$$

Alles andere ist Routine. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Ausdehnung des Maßes

Die charakteristische Funktion einer zulässigen Menge ist ebenfalls eine Treppenfunktion $_{1.8}$. Wir können damit jedes Intervallmaß μ ausdehnen zu einer Funktion

$$\tilde\mu : \mathcal{Z}^n \to [0,\infty), \quad \tilde\mu(M) := I_\mu(\chi_M).$$

Für ein Intervall $I \in \mathcal{J}^n$ gilt insbesondere

$$\tilde\mu(I) = I_\mu(\chi_I) = 1\cdot\mu(I) = \mu(I),$$

denn χ_I ist eine Treppenfunktion mit Konstanzintervall I und Wert 1. Somit gilt $\tilde{\mu}|\mathcal{J}^n = \mu$, und $\tilde{\mu}$ definiert eine Fortsetzung von μ auf $\mathcal{Z}^n$. Im Weiteren schreiben wir hierfür ebenfalls wieder μ.

12 **Satz** *Die auf $\mathcal{Z}^n$ ausgedehnte Funktion μ ist ebenfalls additiv, monoton und regulär. Für zulässige Mengen M und N mit $N \subset M$ gilt außerdem*

$$\mu(M \setminus N) = \mu(M) - \mu(N). \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Sind M und N zulässig und $N \subset M$, so ist auch $O = M \setminus N$ zulässig $_{1.7}$, und $M = N \cup O$ ist eine disjunkte Vereinigung zulässiger Mengen. Aufgrund der Additivität ist dann

$$\mu(M) = \mu(N) + \mu(O) = \mu(N) + \mu(M \setminus N).$$

Da alle Terme *endlich* sind, folgt hieraus die letzte Behauptung. Alles Weitere ist als Übung überlassen. ⟩⟩⟩⟩⟩

20.3 Drei Hilfssätze

Für den weiteren Aufbau der Theorie benötigen wir drei Resultate über Folgen von nichtnegativen Treppenfunktionen. Die ersten beiden werden auch als *erster und zweiter Hauptsatz von Lebesgue* bezeichnet.

Mit $\mathcal{T}_+^n$ bezeichnen wir im Folgenden den Raum aller nichtnegativen Treppenfunktionen.

13 **Lemma A** *Sei (s_k) eine steigende Folge in $\mathcal{T}_+^n$. Gilt*

$$\lim_{k\to\infty} I_\mu(s_k) < \infty,$$

so gilt auch $\lim_{k\to\infty} s_k <_\mu \infty$. $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ Zu zeigen ist, dass

$$N = \{x \in \mathbb{R}^n : s_k(x) \to \infty\}$$

eine Nullmenge bildet. Sei dazu $I = \lim I_\mu(s_k) < \infty$ und $M > 0$. Für jedes k ist

$$E_k = \{s_k > M\} := \{x \in \mathbb{R}^n : s_k(x) > M\}$$

die Vereinigung endlich vieler Konstanzintervalle von s_k und damit zulässig. Ferner ist $s_k \geqslant M\chi_{E_k}$ und deshalb

$$I \geqslant I_\mu(s_k) \geqslant I_\mu(M\chi_{E_k}) = MI_\mu(\chi_{E_k}) = M\mu(E_k).$$

Für alle k gilt somit

$$\mu(E_k) \leqslant \frac{I}{M}.$$

Wegen der Monotonie der Folge (s_k) bildet (E_k) eine monoton steigende Folge zulässiger Mengen, und es gilt

$$N \subset \bigcup_{k\geqslant 0} E_k = \bigcup_{k\geqslant 1} (E_k \setminus E_{k-1}) \cup E_0.$$

Die Mengen E_0 und $E_k \setminus E_{k-1}$ für $k \geqslant 1$ sind sämtlich zulässig und disjunkt, für deren Maße gilt deshalb $_{1.12}$

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(E_k \setminus E_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (\mu(E_k) - \mu(E_{k-1})) = \mu(E_n) - \mu(E_0).$$

Zusammen mit $\mu(E_k) \leqslant 1/M$ folgt hieraus

$$\sum_{k\geqslant 1} \mu(E_k \setminus E_{k-1}) + \mu(E_0) \leqslant \frac{I}{M}.$$

Stellen wir jetzt noch jede dieser Mengen als endliche Vereinigung disjunkter Intervalle dar $_{1.8}$, so erhalten wir eine abzählbare Familie disjunkter Intervalle, die N überdecken und deren Maßsumme kleiner ist als I/M. Da I fest und M beliebig ist, ist N eine Nullmenge. ⟫⟫⟫

14 **Lemma B** *Sei (s_k) eine fallende Folge in $\mathcal{T}_+^n$. Gilt*

$$\lim_{k\to\infty} s_k =_\mu 0,$$

so gilt auch $\lim_{k\to\infty} I_\mu(s_k) = 0$. ⋊

⟪⟪⟪ Sei $s_0 \geqslant s_1 \geqslant s_2 \geqslant .. \geqslant 0$ eine solche Folge. Aufgrund der Monotonie des μ-Integrals $_{1.11}$ gilt dann auch

$$I_\mu(s_0) \geqslant I_\mu(s_1) \geqslant I_\mu(s_2) \geqslant .. \geqslant 0.$$

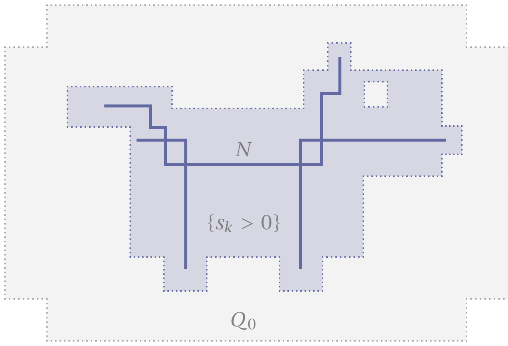
Zum Beweis des Lemmas genügt es daher zu zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \geqslant 0$ gibt, so dass $I_\mu(s_n) < \varepsilon$.

Aufgrund der Monotonie und Nichtnegativität der Treppenfunktionen s_k sind ihre Träger alle enthalten im Träger $Q_0 = \operatorname{supp}(s_0)$. Diese Menge ist zulässig sowie abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Außerdem existiert aufgrund der Monotonie der Folge der punktweise Limes der s_k, und nach Voraussetzung ist $N = \{\lim s_k > 0\}$ eine Nullmenge. Diese ist notwendigerweise in Q_0 enthalten.

Wir können auch noch annehmen, dass jedes s_k ein verträgliches System von Konstanzintervallen besitzt, welches Q_0 überdeckt. Gegebenenfalls ergänzen wir endlich viele geeignete Intervalle und weisen s_k dort den Wert 0 zu.

Abb 7

Zum Beweis von Lemma B



Sei nun $\varepsilon > 0$. Wir fassen dann alle Konstanzintervalle aller s_k, auf denen diese kleiner als ε sind, zu einer abzählbaren Familie zusammen und bezeichnen sie mit $I_1, I_2, \ldots$ Diese überdecken $Q_0 \setminus N$, da dort $s_k \searrow 0$. Ferner sei $J_1, J_2, ..$ eine Überdeckung von N durch n-Intervalle mit der Eigenschaft, dass

$$\sum_{l \geqslant 1} \mu(J_l) < \varepsilon/2.$$

Aufgrund der Regularität von μ existieren dazu *offene* Intervalle $\tilde{I}_l \supset I_l$ und $\tilde{J}_l \supset J_l$ mit

$$\sum_{l \geqslant 1} \mu(\tilde{I}_l \setminus I_l) + \sum_{l \geqslant 1} \mu(\tilde{J}_l) < \varepsilon.$$

Beide Familien zusammen bilden eine offene Überdeckung der kompakten Menge Q_0. Nach dem Satz von Heine-Borel 10.10 – der im $\mathbb{R}^n$ genau wie in $\mathbb{R}$ gilt und bewiesen wird A-1.2 – gibt es auch eine endliche Teilüberdeckung. Es gilt also

$$Q_0 \subset \tilde{I}_1 \cup .. \cup \tilde{I}_r \cup \tilde{J}_1 \cup .. \cup \tilde{J}_s$$

mit einer geeigneten Auswahl und Umnummerierung dieser Intervalle.

Zu jedem $\tilde{I}_l$ existiert nun ein Index k_l, so dass $s_{k_l} | I_l < \varepsilon$. Wir setzen $n = \max(k_1, .., k_r)$ und zeigen, dass $I_\mu(s_n)$ klein wird. Sei dazu

$$A = \bigcup_{1 \leqslant l \leqslant r} I_l, \qquad B = \bigcup_{1 \leqslant l \leqslant r} (\tilde{I}_l \setminus I_l) \ \cup \bigcup_{1 \leqslant l \leqslant s} \tilde{J}_l.$$

Dann ist $\chi_A + \chi_B \geqslant 1$ auf Q_0 und deshalb

$$I_\mu(s_n) \leqslant I_\mu((\chi_A + \chi_B)s_n) = I_\mu(\chi_A s_n) + I_\mu(\chi_B s_n).$$

Aufgrund der Wahl von n und der Monotonie der Folge (s_k) ist

$$s_n | I_l \leqslant s_{k_l} | I_l < \varepsilon$$

für jedes l und deshalb auch $s_n | A < \varepsilon$. Also gilt

$$I_\mu(\chi_A s_n) \leqslant \varepsilon I_\mu(\chi_{Q_0}) = \varepsilon\mu(Q_0).$$

Andererseits gilt

$$\mu(B) \leqslant \sum_{1\leqslant l\leqslant r} \mu(\tilde{I}_l \setminus I_l) + \sum_{1\leqslant l\leqslant s} \mu(\tilde{J}_l) < \varepsilon$$

und deshalb

$$I_\mu(\chi_B s_n) \leqslant \|s_n\|\, I_\mu(\chi_B) \leqslant \|s_0\|\, \mu(B) \leqslant \varepsilon\, \|s_0\|\,,$$

wobei $\|\cdot\|$ die Supremumsnorm bezeichnet. Also gilt insgesamt

$$I_\mu(s_n) \leqslant \varepsilon(\mu(Q_0) + \|s_0\|).$$

Da $\mu(Q_0)$ und $\|s_0\|$ unabhängig von n sind, ist die Behauptung bewiesen. ⟫⟫⟫

15 **Lemma C** *Seien $(s_k), (t_k)$ zwei monoton steigende Folgen in $\mathcal{T}_+^n$. Gilt*

$$\lim_{k\to\infty} s_k \leqslant_\mu \lim_{k\to\infty} t_k,$$

so gilt auch $\lim_{k\to\infty} I_\mu(s_k) \leqslant \lim_{k\to\infty} I_\mu(t_k)$. ⋊

⟪⟪⟪ Betrachte

$$u_{n,m} \coloneqq \max(s_n - t_m, 0).$$

Dies sind nichtnegative Treppenfunktionen, die für jedes feste n bezüglich m monoton fallen mit $\lim_{m\to\infty} u_{n,m} =_\mu 0$. Also gilt mit Lemma B $_{1.14}$ auch

$$\lim_{m\to\infty} I_\mu(u_{n,m}) = 0.$$

Wegen $u_{n,m} \geqslant s_n - t_m$ gilt andererseits $_{1.11}$ $I_\mu(u_{n,m}) \geqslant I_\mu(s_n) - I_\mu(t_m)$, also

$$I_\mu(t_m) \geqslant I_\mu(s_n) - I_\mu(u_{n,m})$$

für alle m. Also gilt auch $_{5.9}$

$$\lim_{m\to\infty} I_\mu(t_m) \geqslant I_\mu(s_n) - \lim_{m\to\infty} I_\mu(u_{n,m}) = I_\mu(s_n).$$

Da dies für jedes n gilt, muss auch $\lim_{m\to\infty} I_\mu(t_m) \geqslant \lim_{n\to\infty} I_\mu(s_n)$ gelten. Dies gilt auch für uneigentliche Grenzwerte. ⟫⟫⟫

20.4 Monoton approximierbare Funktionen

Bis jetzt gingen wir genau so vor wie bei der Definition des Cauchyintegrals, abgesehen vom Bezug auf ein allgemeines Maß. Der entscheidende Unterschied ergibt sich nun durch die Art, wie das Integral von den Treppenfunktionen auf eine größere Klasse von Funktionen ausgedehnt wird.

Dazu betrachten wir zuerst Funktionen, die sich punktweise durch monoton steigende Folgen von nichtnegativen Treppenfunktionen approximieren lassen. Diese Funktionen sind also *per definitionem* nichtnegativ und dürfen auch den Wert ∞ annehmen.

Definition *Eine Funktion $u\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ heißt μ-monoton approximierbar, wenn es eine μ-monoton steigende Folge (s_k) in $\mathcal{T}_+^n$ gibt, so dass*

$$u =_\mu \lim_{k\to\infty} s_k.$$

Der Raum dieser Funktionen wird mit $\mathcal{U}^n(\mu)$ bezeichnet. ⋊

A. Für jedes Intervall I gilt $\chi_I \in \mathcal{U}^n(\mu)$ A-1.14 .

B. Die Dirichletfunktion $\delta = \chi_{\mathbb{Q}}$ ist λ-monoton approximierbar A-1.7 .

C. Jede nichtnegative stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ ist in $\mathcal{U}^1(\lambda)$ A-1.14 .

D. Auch die Funktion $f \equiv \infty$ ist μ-monoton approximierbar.

E. Die charakteristische Funktion einer Cantormenge mit positivem Maß ist *nicht* λ-monoton approximierbar A-1.20 .

Multiplizieren wir eine solche Funktion mit 0, so können Ausdrücke der Form $0\cdot\infty$ auftreten. Im Rahmen der Integrationstheorie ist es sinnvoll, solchen Ausdrücken den Wert 0 zuzuweisen, was wir von nun an tun werden. Es gilt also

$$0\cdot\infty = 0$$

für alle Weitere.

16 **Lemma** *Sind u und v in $\mathcal{U}^n(\mu)$, so sind es auch cu für $c \geqslant 0$ sowie*

$$u+v, \quad uv, \quad \max(u,v), \quad \min(u,v). \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨ Sind zum Beispiel (s_k) und (t_k) monoton steigende Folgen in $\mathcal{T}_+^n$, so ist es auch $(s_k t_k)$, da nur Produkte nichtnegativer reeller Zahlen auftreten. Aus $s_k \nearrow_\mu u$ und $t_k \nearrow_\mu v$ folgt dann auch $s_k t_k \nearrow_\mu uv$ sowohl für eigentliche wie uneigentliche Grenzwerte. Entsprechend alles Übrige. ⟩⟩⟩⟩

Das Integral für Funktionen in $\mathcal{U}^n(\mu)$ wird in naheliegender Weise erklärt.

Definition *Ist $u \in \mathcal{U}^n(\mu)$ der punktweise Grenzwert einer μ-monoton steigenden Folge (s_k) in $\mathcal{T}_+^n$, so heißt*

$$I_\mu(u) \coloneqq \lim_{k\to\infty} I_\mu(s_k)$$

das Lebesgueintegral von u bezüglich μ oder kurz μ-Integral von u. Dieses kann auch den Wert ∞ annehmen. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Dieses Integral hängt nicht von der Wahl der Folge ab. Sei (t_k) eine weitere steigende Folge in $\mathcal{T}_+^n$ mit $t_k \nearrow_\mu u$. Dann gilt notwendigerweise

$$\lim s_k =_\mu \lim t_k.$$

Wenden wir Lemma C $_{1.15}$ mit $\leqslant_\mu$ und $\geqslant_\mu$ anstelle von $=_\mu$ an, so erhalten wir

$$\lim I_\mu(s_k) \leqslant \lim I_\mu(t_k), \qquad \lim I_\mu(s_k) \geqslant \lim I_\mu(t_k).$$

Also sind beide Grenzwerte gleich. ⟩⟩⟩⟩⟩

A. Für eine Treppenfunktion $s \in \mathcal{T}_+^n$ stimmt dieses Integral mit dem zuvor definierten überein, denn die konstante Folge (s) ist eine geeignete approximierende Folge.

B. Für die Dirichletfunktion δ gilt $I_\lambda(\delta) = 0$.

C. Eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to [0,\infty)$ ist der gleichmäßige Limes einer steigenden Folge von Treppenfunktionen in $\mathcal{T}_+^n$ $_{\text{A-1.13}}$. Setzen wir also f außerhalb von $[a,b]$ durch Null zu einer Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ fort, so stimmen Cauchy- und Lebesgueintegral überein:

$$\int_a^b f = I_\lambda(f).$$

D. Eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ besitzt immer ein λ-Integral. Dies kann auch den Wert ∞ annehmen und stimmt mit dem uneigentlichen Cauchyintegral von f überein $_{\text{A-1.11}}$.

17 **Lemma** *Für $u,v \in \mathcal{U}^n(\mu)$ und $c \geqslant 0$ gilt*

$$I_\mu(cu+v) = cI_\mu(u) + I_\mu(v).$$

Ist $u \leqslant_\mu v$, so gilt ferner $I_\mu(u) \leqslant I_\mu(v)$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sind (s_k) und (t_k) monoton steigende Folgen von nichtnegativen Treppenfunktionen mit $s_k \nearrow_\mu u$ und $t_k \nearrow_\mu v$, so ist $(cs_k + t_k)$ eine solche Folge mit $cs_k + t_k \nearrow_\mu cu + v$, und es gilt

$$\begin{aligned} I_\mu(cu+v) &= \lim I_\mu(cs_k + t_k) \\ &= \lim\,(I_\mu(cs_k) + I_\mu(t_k)) \\ &= \lim cI_\mu(s_k) + \lim I_\mu(t_k) = cI_\mu(u) + I_\mu(v). \end{aligned}$$

Entsprechend wird die Monotonie gezeigt $_{\text{A-1.15}}$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Man beachte, dass $\mathcal{U}^n(\mu)$ offensichtlich *kein Vekorraum* ist.

▪ Monotone Konvergenz

Wir zeigen nun, dass $\mathcal{U}^n(\mu)$ abgeschlossen ist unter monotoner Grenzwertbildung. Das heißt, der punktweise Grenzwert einer monoton steigenden Folge in $\mathcal{U}^n(\mu)$ gehört wieder zu $\mathcal{U}^n(\mu)$, und dieser Prozess vergrößert den Raum nicht. Außerdem vertauschen Integral und Grenzübergang.

18 **Satz von der monotonen Konvergenz** *Sei (u_k) eine μ-monoton steigende Folge in $\mathcal{U}^n(\mu)$. Dann ist auch*

$$u =_\mu \lim u_k \in \mathcal{U}^n(\mu),$$

und es gilt

$$I_\mu(u) = \lim I_\mu(u_k). \quad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Zu jedem u_k existiert eine steigende Folge $(s_{k,l})_{l\geqslant 1}$ in $\mathcal{T}_+^n$ mit

$$s_{k,1} \leqslant s_{k,2} \leqslant s_{k,3} \leqslant .. \leqslant s_{k,l} \nearrow_\mu u_k.$$

Dabei können wir annehmen, dass die punktweise Konvergenz für alle k außerhalb einer gemeinsamen Nullmenge N stattfindet ${}_{1.5}$. Dann sind die Funktionen

$$t_m \coloneqq \max\{s_{k,l} : 1 \leqslant k, l \leqslant m\}, \qquad m \geqslant 1,$$

als Maximum über jeweils endlich viele nichtnegative Treppenfunktionen ebenfalls nichtnegative Treppenfunktionen ${}_{1.10}$. Diese bilden ebenfalls eine monoton steigende Folge, wobei

$$t_m \leqslant_\mu u_m \leqslant_\mu u, \qquad m \geqslant 1.$$

Es gilt auch

$$t_m \nearrow_\mu u.$$

Denn gilt dies in einem Punkt p *nicht*, so ist $t_m(p) \leqslant \lim t_m(p) < u(p)$ für alle m. Dasselbe gilt dann auch für alle $s_{k,l}(p)$. Folglich gehört p zu der Nullmenge N, auf der die Treppenfunktionen nicht gegen u konvergieren.

Somit ist $u \in \mathcal{U}^n(\mu)$. Aus der Definition des Integrals folgt außerdem

$$\lim I_\mu(t_m) = I_\mu(u).$$

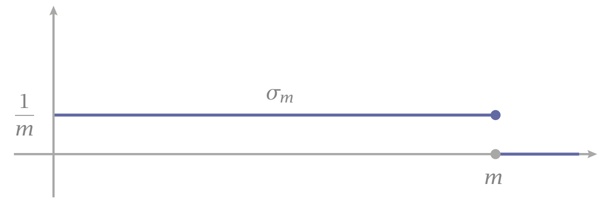
Wegen $t_m \leqslant_\mu u_m \leqslant_\mu u$ ist andererseits ${}_{1.17}$

$$I_\mu(t_m) \leqslant I_\mu(u_m) \leqslant I_\mu(u).$$

Also gilt auch $\lim I_\mu(u_m) = I_\mu(u)$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Abb 8

Die Treppenfunktion σ_m im Gegenbeispiel



19 ▹ *Ein Gegenbeispiel* Für nicht-monotone Folgen gilt dieser Satz nicht, selbst wenn die Konvergenz gleichmäßig ist. Für die Treppenfunktionen $\sigma_m = m^{-1}\chi_{[0,m]}$ beispielsweise gilt

$$\sigma_m \rightrightarrows 0, \qquad I_\mu(\sigma_m) \equiv 1 \not\to 0 = I_\mu(\lim \sigma_m),$$

doch die Konvergenz gegen die Nullfunktion ist nicht monoton. ◃

20.5 Messbare und summierbare Funktionen

Wir bilden nun den Raum aller Funktionen, die sich als *Differenz* von monoton approximierbaren Funktionen darstellen lassen. Um undefinierte Ausdrücke zu vermeiden, betrachten wir dabei nur Funktionen, die μ-fast überall endlich sind.

20 **Definition** *Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt μ-messbar, wenn*

$$f =_\mu u - v$$

mit $u, v \in \mathcal{U}^n(\mu)$, wobei

$$\max(u, v) <_\mu \infty.$$

Jede solche Darstellung heißt eine wohldefinierte Darstellung von f. Der Raum aller μ-messbaren Funktionen wird mit $\mathcal{M}^n(\mu)$ bezeichnet. ⋊

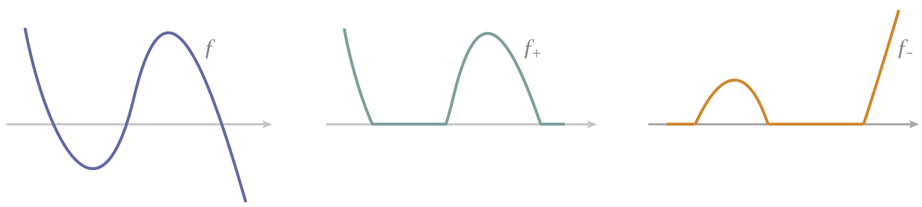
Man beachte, dass

$$\mathcal{U}^n(\mu) \not\subset \mathcal{M}^n(\mu).$$

Eine μ-monoton approximierbare Funktion ist dann und nur dann μ-messbar, wenn sie μ-fast überall endlich ist.

Satz *Der Raum $\mathcal{M}^n(\mu)$ bildet eine Algebra.* ⋊

Abb 9 Positivteil und Negativteil einer Funktion



⟨⟨⟨⟨⟨ Seien $f =_\mu u - v$ und $g =_\mu \tilde{u} - \tilde{v}$ wohldefinierte Darstellungen aus μ-fast überall endlichen $\mathcal{U}^n(\mu)$-Funktionen. Da Summen und Produkte aus solchen Funktionen wieder μ-monoton approximierbar [1.16] und μ-fast überall endlich sind, sind

$$\begin{aligned} f + g &=_\mu (u + \tilde{u}) - (v + \tilde{v}), \\ f - g &=_\mu (u + \tilde{v}) - (v + \tilde{u}), \\ fg &=_\mu (u\tilde{u} + v\tilde{v}) - (u\tilde{v} + v\tilde{u}) \end{aligned}$$

wohldefinierte Darstellungen von $f \pm g$ und fg. Also sind diese ebenfalls μ-messbar. Dasselbe gilt für skalare Vielfache, denn

$$cf =_\mu cu - cv$$

ergibt sowohl für $c \geqslant 0$ wie auch $c < 0$ wieder eine wohldefinierte Darstellung. Also ist $\mathcal{M}^n(\mu)$ eine Algebra. ⟩⟩⟩⟩⟩

Eine messbare Funktion hat natürlich viele verschiedene wohldefinierte Darstellungen. Gewissermaßen kanonisch ist dabei die Darstellung durch

$$f_+ := \max(f, 0), \qquad f_- := \max(-f, 0),$$

genannt der *Positivteil* respektive *Negativteil* der Funktion f. Auch der Negativteil einer Funktion ist also *nichtnegativ*, und offensichtlich gilt

$$f = f_+ - f_-, \qquad |f| = f_+ + f_-.$$

Unter anderem gelten die Identitäten

$$\begin{aligned} \max(f, g) &= (f - g)_+ + g = (f - g)_- + f, \\ \min(f, g) &= g - (f - g)_- = f - (f - g)_+, \end{aligned}$$

die man leicht verifiziert. Für $f = u - v$ folgt hieraus beispielsweise

$$f_+ = \max(u, v) - v, \qquad f_- = v - \min(u, v),$$

unabhängig davon, ob dies eine wohldefinierte Darstellung ist oder nicht. Daraus ergibt sich unmittelbar folgender

20.20

21 **Satz** *Sind f und g μ-messbar, so sind es auch*

$$f_+, \quad f_-, \quad |f|, \quad \max(f,g), \quad \min(f,g). \qquad \rtimes$$

Man beachte allerdings, dass f_+ und f_- zwar nicht negativ und messbar, aber *nicht notwendigerweise* monoton approximierbar sind. Dies gilt zum Beispiel für die charakteristischen Funktionen von Cantormengen mit positivem λ-Maß $_{\text{A-1.20}}$.

Summierbare Funktionen

Das Integral einer messbaren Funktion $f = u - v$ ist als Differenz der Integrale von u und v nur dann wohldefiniert, wenn wenigstens eines von ihnen endlich ist. Das Integral selbst darf unbeschränkt sein. Das erlaubt uns später, das Maß unbeschränkter Mengen durch das Integral ihrer charakteristischen Funktionen ohne einen weiteren Approximationsprozess zu erklären.

Definition *Eine Funktion $f \in \mathcal{M}^n(\mu)$ besitzt eine μ-summierbare Darstellung, wenn es eine wohldefinierte Darstellung $f =_\mu u - v$ gibt mit*

$$\min(I_\mu(u), I_\mu(v)) < \infty.$$

In diesem Fall heißt f μ-summierbar, und

$$I_\mu(f) := I_\mu(u) - I_\mu(v)$$

das Integral von f bezüglich μ oder kurz das μ-Integral von f. Der Raum der μ-summierbaren Funktionen wird mit $\mathcal{M}_s^n(\mu)$ bezeichnet. $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ Das Integral ist unabhängig von der summierbaren Darstellung. Denn ist $f =_\mu \tilde{u} - \tilde{v}$ eine zweite solche Darstellung, so ist $u + \tilde{v} =_\mu v + \tilde{u}$ und damit $_{1.17}$

$$I_\mu(u) + I_\mu(\tilde{v}) = I_\mu(u + \tilde{v}) = I_\mu(v + \tilde{u}) = I_\mu(v) + I_\mu(\tilde{u}).$$

Sind alle Ausdrücke endlich, so sind wir fertig. Ist aber zum Beispiel $I_\mu(u) = \infty$, so ist notwendigerweise $I_\mu(v) < \infty$. Dann ist aber auch $I_\mu(\tilde{u}) = \infty$ und $I_\mu(\tilde{v}) < \infty$, und damit

$$I_\mu(u) - I_\mu(v) = I_\mu(\tilde{u}) - I_\mu(\tilde{v}) \tag{1}$$

auf der erweiterten Zahlengeraden. Also ergeben beide Darstellungen dasselbe Integral $I_\mu(f)$. Analog argumentiert man im Fall $I_\mu(v) = \infty$. ⟩⟩⟩⟩⟩

In einer μ-summierbaren Darstellung $f =_\mu u - v$ sind also u und v monoton approximierbar, μ-fast überall endlich, und wenigstens eines der Integrale $I_\mu(u)$ und $I_\mu(v)$ ist endlich. Offensichtlich ist

$$\mathcal{T}^n \subset \mathcal{U}^n(\mu) \cap \mathcal{M}^n(\mu) \subset \mathcal{M}_s^n(\mu) \subset \mathcal{M}^n(\mu),$$

und jede Inklusion ist echt. Der Raum $\mathcal{M}_s^n(\mu)$ ist allerdings kein Vektorraum $_{\text{A-??}}$.

Der Positiv- und Negativteil einer messbaren Funktion nicht nur messbar $_{1.21}$, sondern tatsächlich *summierbar*. Grundlage dafür ist das folgende

22 **Lemma** *Ist f μ-messbar und nichtnegativ, so ist f μ-summierbar, und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine μ-summierbare Darstellung*

$$f =_\mu u - v, \qquad I_\mu(v) < \varepsilon. \quad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Besitzt f eine wohldefinierte Darstellung, so auch eine Darstellung $_{\text{A-1.17}}$

$$f =_\mu \sum_{k \geqslant 1} (u_k - v_k)$$

mit $\mathcal{U}^n(\mu)$-Funktionen u_k, v_k so, dass $v_k \leqslant u_k$ und $I_\mu(u_k) < \infty$ für alle $k \geqslant 1$. Für jedes $k \geqslant 1$ existiert dazu eine Treppenfunktion t_k mit

$$0 \leqslant t_k \leqslant v_k, \qquad I_\mu(v_k - t_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Dann gehören $\hat{u}_k = u_k - t_k \geqslant 0$ und $\hat{v}_k = v_k - t_k \geqslant 0$ ebenfalls zu $\mathcal{U}^n(\mu)$, ebenso

$$\hat{u} = \sum_{k \geqslant 1} \hat{u}_k, \qquad \hat{v} = \sum_{k \geqslant 1} \hat{v}_k$$

aufgrund des Satzes von der monotonen Konvergenz $_{1.18}$. Es gilt dann $f = \hat{u} - \hat{v}$ und

$$I_\mu(\hat{v}) = \sum_{k \geqslant 1} I_\mu(\hat{v}_k) = \sum_{k \geqslant 1} I_\mu(v_k - t_k) < \sum_{k \geqslant 1} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

wie gewünscht. ⟩⟩⟩⟩⟩

23 **Satz** *Ist f μ-messbar, so sind f_+, f_- und $|f|$ μ-summierbar, und es gilt*

$$I_\mu(|f|) = I_\mu(f_+) + I_\mu(f_-).$$

Ist f μ-summierbar, so ist $f = f_+ - f_-$ eine μ-summierbare Darstellung, und

$$I_\mu(f) = I_\mu(f_+) - I_\mu(f_-). \quad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Die erste Behauptung folgt aus dem vorangehenden Lemma. Um die zweite Behauptung zu zeigen, sei $f =_\mu u - v$ eine summierbare Darstellung mit nichtnegativen Funktionen. Dann gilt

$$u = f_+ + \min(u, v) \geqslant f_+, \qquad v = f_- + \min(u, v) \geqslant f_-,$$

und damit auch $_{1.22}$

$$I_\mu(u) \geqslant I_\mu(f_+), \qquad I_\mu(v) \geqslant I_\mu(f_-).$$

Da mindestens eines der links stehenden Integrale endlich ist, gilt dies auch für $I_\mu(f_+)$ und $I_\mu(f_-)$. Somit ist $f = f_+ - f_-$ eine summierbare Darstellung, und

$$I_\mu(f) = I_\mu(u) - I_\mu(v) = I_\mu(f_+) - I_\mu(f_-).$$

Eine μ-messbare Funktion ist somit nicht μ-summierbar, wenn sowohl $I_\mu(f_+)$ als auch $I_\mu(f_-)$ unbeschränkt sind.

A. Jede monoton approximierbare Funktion ist μ-summierbar.
B. Die Exponenzialfunktion exp ist λ-summierbar.
C. Die Sinusfunktion sin ist *nicht* λ-summierbar.

20.6 Die Sätze von Beppo Levi und Fatou

Der Satz von der monotonen Konvergenz $_{1.18}$ gilt auch für messbare Funktionen. Allerdings müssen wir eine obere Schranke voraussetzen, damit auch die Grenzfunktion μ-fast überall endlich ist.

24 **Satz von Beppo Levi** *Sei (f_k) eine μ-monoton steigende Folge nichtnegativer Funktionen in $\mathcal{M}^n(\mu)$. Gilt*

$$\sup I_\mu(f_k) < \infty \quad \textit{oder} \quad f =_\mu \lim f_k <_\mu \infty,$$

so ist f μ-summierbar, und es gilt

$$I_\mu(f) = \lim I_\mu(f_k).$$

Wir können annehmen, dass $f_0 \equiv 0$. Aufgrund des vorangehenden Satzes $_{1.22}$ existiert für jedes $k \geqslant 1$ eine summierbare Darstellung

$$f_k - f_{k-1} = u_k - v_k, \qquad I_\mu(v_k) < 2^{-k}.$$

Somit ist

$$f_k = \sum_{l=1}^{k}(f_l - f_{l-1}) = \sum_{l=1}^{k}(u_l - v_l) = g_k - h_k$$

mit

$$g_k = \sum_{l=1}^{k} u_l, \qquad h_k = \sum_{l=1}^{k} v_l.$$

Diese Funktionen bilden monoton steigende Folgen in $\mathcal{U}^n(\mu)$. Aufgrund des Satzes von der monotonen Konvergenz $_{1.18}$ gilt also

$$g_k \nearrow_\mu g \in \mathcal{U}^n(\mu), \qquad h_k \nearrow_\mu h \in \mathcal{U}^n(\mu).$$

Für alle k ist dabei

$$I_\mu(h_k) = \sum_{l=1}^{k} I_\mu(v_l) \leqslant \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} = 1.$$

Also ist [1.18] $I_\mu(h) = \lim I_\mu(h_k) \leqslant 1$ und damit [1.13] $h <_\mu \infty$. Dann ist aber auch

$$g_k = f_k + h_k \nearrow_\mu g <_\mu \infty,$$

denn entweder gilt $f <_\mu \infty$ oder $\sup I_\mu(g_k) \leqslant \sup I_\mu(f_k) < \infty$. Also ist

$$f =_\mu \lim f_k = \lim\,(g_k - h_k) = \lim g_k - \lim h_k =_\mu g - h$$

eine wohldefinierte und summierbare Darstellung, und es gilt

$$\begin{aligned} I_\mu(f) = I_\mu(g) - I_\mu(h) &= \lim I_\mu(g_k) - \lim I_\mu(h_k) \\ &= \lim\,(I_\mu(g_k) - I_\mu(h_k)) \\ &= \lim I_\mu(g_k - h_k) \\ &= \lim I_\mu(f_k). \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. »»»

Für nicht-monotone Folgen gilt dieser Satz nicht [1.19], denn das Gegenbeispiel zum Satz von der monotonen Konvergenz [1.19] funktioniert auch hier. Statt dessen gilt das

25 **Lemma von Fatou** *Sei (f_k) eine μ-fast überall konvergente Folge nichtnegativer Funktionen in $\mathcal{M}^n(\mu)$. Gilt*

$$\sup I_\mu(f_k) < \infty \quad \textit{oder} \quad f =_\mu \lim f_k <_\mu \infty,$$

so ist f μ-summierbar, und es gilt

$$I_\mu(f) \leqslant \liminf I_\mu(f_k). \qquad \rtimes$$

««« Betrachte die Funktionen

$$\phi_{k,l} \coloneqq \inf(f_k, .., f_l), \qquad k \leqslant l.$$

Diese sind sämtlich messbar [1.21], nichtnegativ, und bilden für jedes k eine monoton fallende Folge bezüglich l. Die Folge $(f_k - \phi_{k,l})_{l \geqslant k}$ ist monoton steigend in $\mathcal{M}^n(\mu)$ und nach oben durch f_k beschränkt. Wir können daher darauf den Satz von Beppo Levi [1.24] anwenden und schließen, dass

$$\phi_k = \lim_{l\to\infty} \phi_{k,l} = \inf(f_k, f_{k+1}, ..)$$

für jedes k summierbar ist, mit

$$I_\mu(\phi_k) \leqslant \inf_{l \geqslant k} I_\mu(f_l).$$

Die Folge (ϕ_k) steigt monoton, mit

$$\lim \phi_k = \liminf f_k =_\mu \lim f_k =_\mu f.$$

Wir können den Satz von Beppo Levi daher nochmals anwenden und schließen, dass f ebenfalls summierbar ist, mit

$$I_\mu(f) = \lim I_\mu(\phi_k) \leqslant \lim_k \inf_{l \geqslant k} I_\mu(f_l) = \liminf I_\mu(f_k).$$

Damit ist das Lemma bewiesen. »»»

▹ Das Beispiel 1.19 der Treppenfunktionen $\sigma_m = m^{-1}\chi_{[0,m]}$ zeigt auch, dass im Lemma von Fatou die strikte Ungleichung eintreten kann, denn

$$\sigma_m \rightrightarrows 0, \qquad I_\mu(\sigma_m) \equiv 1 > 0,$$

Auch ist die Nichtnegativität der Funktionenfolge notwendig, denn für $\bar{\sigma}_m = -\sigma_m$ gilt

$$\bar{\sigma}_m \rightrightarrows 0, \qquad I_\mu(\bar{\sigma}_m) \equiv -1 < 0.$$ ◃

26 **Satz** *Sei f μ-messbar und nichtnegativ. Dann gilt*

$$f =_\mu 0 \quad \Leftrightarrow \quad I_\mu(f) = 0.$$ ⋊

«««« Die Funktion f ist jedenfalls summierbar 1.22. Ist $f =_\mu 0$, so ist offensichtlich $I_\mu(f) = 0$. Um die Umkehrung zu beweisen, betrachte $f_k = kf$ für $k \geqslant 0$. Diese Folge ist nichtnegativ und monoton steigend in $\mathcal{M}^n(\mu)$ mit

$$\sup_{k \geqslant 0} I_\mu(f_k) = \sup_{k \geqslant 0} kI_\mu(f) = 0.$$

Der Satz von Beppo Levi ist damit anwendbar, und der punktweise Limes der f_k eine summierbare Funktion. Dies ist aber nur möglich, wenn $f =_\mu 0$. »»»

20.7 Integrierbare Funktionen

Das Integral summierbarer Funktionen kann unbeschränkt sein. Mit Blick auf die Konstruktion vollständig normierter Räume wie die L^p-Räume ist es aber notwendig, Räume von summierbaren Funktionen mit endlichen Integral zu betrachten.

Definition und Satz *Eine μ-summierbare Funktion f heißt μ-integrierbar, wenn ihr μ-Integral endlich ist. Der Raum aller μ-integrierbaren Funktionen wird mit $\mathcal{L}^n(\mu)$ bezeichnet.* ⋊

Es gilt also

$$\mathcal{T}^n \subset \mathcal{L}^n(\mu) \subset \mathcal{M}_s^n(\mu) \subset \mathcal{M}^n(\mu),$$

und jede Inklusion ist echt. Eine Funktion in $\mathcal{U}^n(\mu)$ gehört dann und nur dann zu $\mathcal{L}^n(\mu)$, wenn ihr Integral endlich ist.

Satz *Der Raum $\mathcal{L}^n(\mu)$ ist ein Vektoraum, und das Lebesgueintegral definiert ein lineares Funktional*

$$I_\mu : \mathcal{L}^n(\mu) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto I_\mu(f). \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Wir zeigen die Additivität. Funktionen $f, g \in \mathcal{L}^n(\mu)$ besitzen summierbare Darstellungen $f = u - v$ und $g = \tilde{u} - \tilde{v}$ mit integrierbaren Funktionen in $\mathcal{U}^n(\mu)$. Dann sind auch $u + \tilde{v}$ und $v + \tilde{u}$ integrierbare $\mathcal{U}^n(\mu)$-Funktionen $_{1.17}$ und damit

$$f - g = (u + \tilde{v}) - (v + \tilde{u})$$

eine Darstellung mit integrierbaren Funktionen. Weiter folgt

$$\begin{aligned} I_\mu(f - g) &= I_\mu(u + \tilde{v}) - I_\mu(v + \tilde{u}) \\ &= I_\mu(u) - I_\mu(v) - I_\mu(\tilde{u}) + I_\mu(\tilde{v}) \\ &= I_\mu(f) - I_\mu(g). \end{aligned}$$

Alles andere wird entsprechend gezeigt. ⟩⟩⟩⟩⟩

Von nun an verwenden wir die klassische Leibnizsche Notation

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}\mu := I_\mu(f)$$

auch für das Lebesgueintegral. Ein Unterschied zum Cauchyintegral besteht allerdings darin, dass eine Funktion f dann und nur dann μ-integrierbar ist, wenn es auch $|f|$ ist. Dies ergibt sich daraus, dass $f = f_+ - f_-$ eine summierbare Darstellung von f ist. Allgemeiner gilt folgendes

27 **Majorantenkriterium** *Ist f μ-messbar, g μ-integrierbar und $|f| \leqslant_\mu g$, so ist auch f μ-integrierbar, und es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} g \,\mathrm{d}\mu. \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Aus $|f| \leqslant_\mu g$ und der Integrierbarkeit von g folgt $_{1.23}$

$$I_\mu(f_+) + I_\mu(f_-) = I_\mu(|f|) \leqslant I_\mu(g) < \infty.$$

Also sind beide links stehenden Integrale endlich, und folglich $_{1.23}$

$$I_\mu(f) = I_\mu(f_+) - I_\mu(f_-) < \infty. \quad ⟩⟩⟩⟩⟩$$

Der wichtigste Satz der Lebesguetheorie betrifft die Vertauschbarkeit von Integration und punktweisen Limes unter sehr allgemeinen Bedingungen. Er wird auch als *Satz von der dominierten Konvergenz* bezeichnet.

28 **Satz von Lebesgue** *Sei (f_k) eine μ-fast überall konvergente Folge in $\mathcal{M}^n(\mu)$. Gibt es eine Funktion $g \in \mathcal{L}^n(\mu)$, so dass*

$$|f_k| \leqslant_\mu g, \qquad k \geqslant 1,$$

so ist $f =_\mu \lim f_k$ μ-integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k \,\mathrm{d}\mu. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Die Funktionen $g + f_k$ sind sämtlich messbar, nichtnegativ, und konvergieren μ-fast überall gegen $g + f$. Außerdem gilt für alle k

$$g + f_k \leqslant g + |f_k| \leqslant_\mu 2g <_\mu \infty.$$

Mit dem Lemma von Fatou ist somit $g + f$ integrierbar, und es gilt

$$\begin{aligned} I_\mu(g+f) &= I_\mu(g + \lim f_k) \\ &\leqslant \liminf I_\mu(g+f_k) \\ &= I_\mu(g) + \liminf I_\mu(f_k). \end{aligned}$$

Da g integrierbar ist, ist auch f integrierbar, und es folgt

$$I_\mu(f) \leqslant \liminf I_\mu(f_k).$$

Argumentiert man entsprechend für $g - f_k \geqslant 0$, so folgt

$$\begin{aligned} I_\mu(g-f) &= I_\mu(g - \lim f_k) \\ &\leqslant \liminf I_\mu(g-f_k) \\ &= I_\mu(g) - \limsup I_\mu(f_k), \end{aligned}$$

und man erhält

$$\limsup I_\mu(f_k) \leqslant I_\mu(f).$$

Somit konvergiert die Folge $I_\mu(f_k)$ mit Grenzwert $I_\mu(f)$. ⟩⟩⟩⟩⟩

▹ Das Beispiel 1.19 der Treppenfunktionen $\sigma_m = m^{-1}\chi_{[0,m]}$ zeigt auch, dass eine integrierbare Majorante unverzichtbar ist. Die kleinste Majorante ist hier

$$g = \sum_{m\geqslant 1} m^{-1}\chi_{(m-1,m]}.$$

Ihr λ-Integral ist die harmonische Reihe. Also ist g nicht λ-integrierbar. Und tatsächlich gilt der Satz von Lebesgue für die Folge (σ_m) *nicht.* ◂

20.8 Messbare Mengen

Definition *Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ heißt μ-messbar, wenn ihre charakteristische Funktion χ_A μ-messbar und damit ${}_{1.22}$ auch μ-summierbar ist. Ihr Maß ist dann*

$$\mu(A) := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_A \,\mathrm{d}\mu.$$

Die Familie aller μ-messbaren Mengen wird mit $\mathcal{A}^n(\mu)$ bezeichnet. ⋊

⊳ A. Jedes Intervall und jede zulässige Menge ist μ-messbar, und ihr Maß stimmt mit dem bereits definierten Maß überein.

B. $\mathbb{Q}^n$ und $\mathbb{R}^n$ sind μ-messbar, und im Fall des Volumenmaßes λ ist

$$\lambda(\mathbb{Q}^n) = 0, \qquad \lambda(\mathbb{R}^n) = \infty.$$

C. Jede Borelmenge – siehe nächste Seite –ist μ-messbar für jedes Maß μ. ⊲

29 **Lemma** *Ist (A_k) eine monoton steigende Folge μ-messbarer Mengen, so ist auch $A = \bigcup_k A_k$ μ-messbar, und es gilt*

$$\mu(A) = \lim \mu(A_k).$$ ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Die charakteristischen Funktionen χ_{A_k} bilden eine monoton steigende Folge nichtnegativer messbarer Funktionen mit $\chi_{A_k} \nearrow \chi_A \leqslant 1$. Der Satz von Beppo Levi ${}_{1.24}$ ist also anwendbar. Somit ist $\chi_A \in \mathcal{M}_s^n(\mu)$ und

$$\mu(A) = I_\mu(\chi_A) = \lim I_\mu(\chi_{A_k}) = \lim \mu(A_k).$$ ⟩⟩⟩⟩⟩

Satz *Die Familie $\mathcal{A}^n(\mu)$ aller μ-messbaren Mengen bildet eine σ-Algebra: sie enthält die leere Menge und ist abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen und abzählbaren Durchschnitten sowie Komplementbildung.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Die Vereinigung zweier messbarer Mengen ist wieder messbar, denn ${}_{1.22}$ $\chi_{A\cup B} = \sup(\chi_A, \chi_B)$ ist messbar. Dasselbe gilt dann für Vereinigungen endlich vieler messbarer Mengen. Die Vereinigung abzählbar vieler messbarer Mengen A_k ist darstellbar als Vereinigung einer steigenden Folge messbarer Mengen,

$$A = \bigcup_k A_k = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{k\leqslant n} A_k,$$

und damit ebenfalls messbar ${}_{1.29}$. Das Komplement A^c einer messbaren Menge A ist messbar, denn $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$.

Die Messbarkeit abzählbar vieler Durchschnitte folgt mit den bisherigen Ergebnissen und der Regel von de Morgan,

$$\bigcap_k A_k = \Big(\bigcup_k A_k^c\Big)^c.$$ ⟩⟩⟩⟩⟩

Da sich offene Mengen als abzählbare Vereinigung von n-Intervallen schreiben lassen und deren Komplemente die abgeschlossenen Mengen bilden, erhalten wir folgendes

Korollar *Offene und abgeschlossene Mengen sind messbar bezüglich jeden Maßes μ.* ⋊

⊳ Der Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen, genannt *G_δ-Mengen*, ist μ-messbar. Dasselbe gilt für die Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Mengen, genannt *F_σ-Mengen*. ⊲

Die Familie $\mathcal{A}^n(\mu)$ aller μ-messbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ enthält damit auch die *Borelalgebra* $\mathcal{B}^n$, welche definiert ist als die kleinste σ-Algebra, die alle offenen und abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ enthält. Sie hängt also nicht von der Wahl eines Maßes, sondern nur von der Topologie des $\mathbb{R}^n$ ab. Es gilt beispielsweise

$$\mathcal{B}^n \subsetneq \mathcal{A}^n(\lambda) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n),$$

worauf wir hier allerdings nicht eingehen werden.

Integrale über messbare Mengen

Alle Integrale erstreckten sich bisher über den Gesamtraum $\mathbb{R}^n$. Integrale über messbare Teilmengen werden hierauf zurückgeführt, indem man die betreffende Funktion durch 0 auf deren Komplement fortsetzt.

Ist also $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge und $f\colon A \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion, so definieren wir deren Fortsetzung auf den Gesamtraum $\mathbb{R}^n$ als

$$f_A \coloneqq \begin{cases} f & \text{auf } A, \\ 0 & \text{auf } A^c. \end{cases}$$

Für eine auf ganz $\mathbb{R}^n$ erklärte Funktion f gilt also $f_A = \chi_A f$. Die Funktion f heißt *μ-messbar auf A*, wenn sowohl A als auch f_A μ-messbar sind. Ihr Integral über A ist dann definiert als

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu \coloneqq \int_{\mathbb{R}^n} f_A \,\mathrm{d}\mu.$$

Man überlegt sich, dass alle bisherigen Sätzen entsprechend auch hierfür gelten.

20.9 Parameterabhängige Integrale

Eine typische Anwendung des Satzes von Lebesgue betrifft parameterabhängige Integrale. Sei dazu I ein nichtentartetes Intervall und

$$f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (t, x) \mapsto f(t, x)$$

eine Funktion mit der Eigenschaft, dass für jedes $t \in I$ die *partielle Funktion*

$$f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad f_t(x) = f(t, x)$$

messbar ist. Der Parameter ist also t, und f_t bezeichnet hier nicht die partielle Ableitung nach t, sondern die Funktion zum fixierten Parameterwert t.

Satz *Für ein $a \in I$ gelte*

$$f_a =_\mu \lim_{t \to a} f_t.$$

Gibt es eine integrierbare Funktion g mit $|f_t| \leqslant_\mu g$ für alle $t \in I$, so sind auch alle f_t integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_a \,\mathrm{d}\mu = \lim_{t \to a} \int_{\mathbb{R}^n} f_t \,\mathrm{d}\mu. \qquad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Die Integrierbarkeit aller f_t folgt aus der Existenz einer integrierbaren Majorante $g\,{}_{1.27}$. Ist (t_k) eine beliebige Folge in I mit $t_k \to a$, so gilt

$$f_a =_\mu \lim f_{t_k}, \qquad |f_{t_k}| \leqslant g.$$

Mit dem Satz von Lebesgue ${}_{1.28}$ folgt daher

$$I_\mu(f_a) = I_\mu(\lim f_{t_k}) = \lim I_\mu(f_{t_k}).$$

Da dies für jede solche Folge (t_k) gilt, folgt hieraus die Behauptung ${}_{7.3}$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Korollar *Sei $f_x = f(\cdot, x)$ für fast jedes $x \in \mathbb{R}^n$ stetig auf I. Gibt es eine integrierbare Funktion g mit $|f_t| \leqslant g$ für alle $t \in I$, so ist auch*

$$F : I \to \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f_t \,\mathrm{d}\mu$$

stetig auf I. ⋊

30 **Satz** *Es sei f_a für ein $a \in I$ integrierbar, und die partielle Ableitung $f' = \partial_t f$ existiere in jedem Punkt von $I \times \mathbb{R}^n$. Gibt es eine integrierbare Funktion g mit $|f_t'| \leqslant g$ für alle $t \in I$, so ist auch*

$$F : I \to \mathbb{R}, \quad F(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f_t \,\mathrm{d}\mu$$

auf I differenzierbar, und es gilt

$$F'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f'_t \,\mathrm{d}\mu, \qquad t \in I. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Aus dem Mittelwertsatz der Differenzialrechnung 8.10 und der Schranke für f' folgt für beliebige $t_k \neq t$ in I die Abschätzung

$$\left| \frac{f(t_k,x) - f(t,x)}{t_k - t} \right| \leqslant \sup_{s \in I} |f'(s,x)| \leqslant g(x).$$

Insbesondere ist

$$|f(t,x)| \leqslant |f(a,x)| + |t-a|\, g(x),$$

und damit f_t integrierbar für *alle* $t \in I$. Konvergiert nun (t_k) gegen t, so folgt aus der gleichmäßigen Schranke für die Differenzenquotienten und dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\begin{aligned} \lim \frac{F(t_k) - F(t)}{t_k - t} &= \lim \int \frac{f(t_k,x) - f(t,x)}{t_k - t} \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int \lim \frac{f(t_k,x) - f(t,x)}{t_k - t} \,\mathrm{d}\mu = \int f'_t \,\mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Da dies für jede solche Folge (t_k) gilt, ist F differenzierbar, und F' ist durch das letzte Integral gegeben. ⟩⟩⟩⟩⟩

⊳ A. Für $t > 0$ ist bekanntlich

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-tx} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{t}.$$

Auf jedem t-Intervall $[\alpha, \infty)$ mit $\alpha > 0$ besitzt die Funktion $x^n \mathrm{e}^{-tx}$ für $n \geqslant 0$ die integrierbare Majorante $x^n \mathrm{e}^{-\alpha x}$. Wir dürfen daher unter dem Integral nach t differenzieren und erhalten für die erste Ableitung

$$\int_0^\infty x \mathrm{e}^{-tx} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{t^2},$$

und induktiv

$$\int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-tx} \,\mathrm{d}x = (-1)^n \partial_t^n \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tx} \,\mathrm{d}x = (-1)^n \partial_t^n \frac{1}{t} = \frac{n!}{t^{n+1}}, \qquad n \geqslant 0.$$

Mit $t = 1$ erhalten wir insbesondere

$$\int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x = n! \; .$$

B. *Ableitung der Fouriertransformation:* Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrierbar. Die *Fouriertransformierte* von f ist, bis auf einen skalaren Faktor, die komplexwertige Funktion

$$\hat{f}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} \,\mathrm{d}x.$$

Das Integral einer komplexwertigen Funktion wird hierbei durch die Integrale der Real- und Imaginärteile gebildet und hat, bis auf die Monotonie, dieselben Eigenschaften wie das reellwertige Integral. Insbesondere gilt auch die Dreiecksungleichung A-1.28 .

Wegen

$$|f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}| \leqslant |f(x)|, \qquad x, t \in \mathbb{R},$$

ist $|f|$ eine konvergente Majorante des Integranden für alle t. Da dieser in t stetig ist, ist $\hat{f}$ stetig auf $\mathbb{R}$.

Ist zusätzlich auch xf integrierbar, so hat die t-Ableitung des Integranden $|xf|$ als gleichmäßige integrierbare Majorante. Also ist $\hat{f}$ differenzierbar und

$$\begin{aligned} D\hat{f}(t) &= \int_{\mathbb{R}} \partial_t (f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx})\,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{i}\int_{\mathbb{R}} xf(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Somit ist $\hat{f}$ sogar stetig differenzierbar, und es gilt

$$D\hat{f} = -\mathrm{i}(xf)\hat{}\ .$$

Mehr dazu im Kapitel über die Fouriertransformation. ◂