

# 21

## Integration im $\mathbb{R}^n$

Für Regelfunktionen stimmt das Lebesgueintegral mit dem Regelintegral überein. Im eindimensionalen Fall stehen uns daher die vertrauten Techniken zur Verfügung, um Integrale zu berechnen. Doch wie geht man in höheren Dimensionen vor?

Im Wesentlichen gibt es zwei Möglichkeiten. Die erste ist als Satz von Fubini bekannt. Er erlaubt es unter recht allgemeinen Voraussetzungen, ein  $n$ -dimensionales Integral als Hintereinanderausführung niederdimensionaler Integrale darzustellen und so im Prinzip auf  $n$  eindimensionale Integrale zurückzuführen.

Die zweite besteht darin, ein Integral durch Einführung geeigneter Koordinaten – wie zum Beispiel Polar- oder Kugelkoordinaten – zu vereinfachen. Die hierfür nötige  $n$ -dimensionale Transformationsformel ergibt sich allerdings, anders als im eindimensionalen Fall, nicht direkt aus einer Kettenregel. Vielmehr ist einiges Geschick erforderlich, um diese mit dem Satz von Fubini und partieller Integration herzuleiten.

Es gibt noch eine dritte Möglichkeit – die als Satz von Stokes bekannte Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes auf höhere Dimensionen. Diesen betrachten wir im nächsten Kapitel, da er einigen begrifflichen Aufwand erfordert.

## 21.1

## Der Satz von Fubini

Wir betrachten das Problem, ein  $n$ -dimensionales Integral als Folge 1-dimensionaler Integrale darzustellen, die wir – zumindest im Prinzip – berechnen können. Die Grundidee ist das *Prinzip des Cavalieri*. Sei  $D$  eine abgeschlossene Menge in der  $(u, v)$ -Ebene. Jeder  *$u$ -Schnitt*

$$D_u = \{v : (u, v) \in D\}$$

ist eine abgeschlossene 1-dimensionale Menge mit 1-dimensionalem Maß

$$L(D_u) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{D_u} d\lambda_1.$$

Der Flächeninhalt von  $D$  sollte sich dann als 1-dimensionales Integral über diese Schnittlängen darstellen lassen, also

$$\lambda_2(D) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_D d\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}} L(D_u) d\lambda_1 = \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} \chi_D d\lambda_1 \right) d\lambda_1.$$

Für das Flächenmaß von Intervallen ist dies jedenfalls richtig, denn die Fläche eines 2-Intervalls ist das Produkt der Längen seiner Seiten. Damit gilt es ebenso für alle zulässigen 2-dimensionalen Mengen, denn diese lassen sich als disjunkte Vereinigung von 2-Intervallen darstellen. Somit sollte dies auch für alle ebenen Gebiete gelten, die sich gut durch zulässige Mengen approximieren lassen.

Der Satz von Fubini verallgemeinert diesen Gedanken auf Maße in beliebigen Dimensionen, die sich als Produktmaße darstellen lassen. Dazu betrachten wir jetzt den Raum

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s, \quad r, s \geq 1.$$

Das Maß auf diesem Raum ist gegeben als Produkt

$$\mu_n = \mu_r \times \mu_s$$

Abb 1

Zum Prinzip des Cavalieri

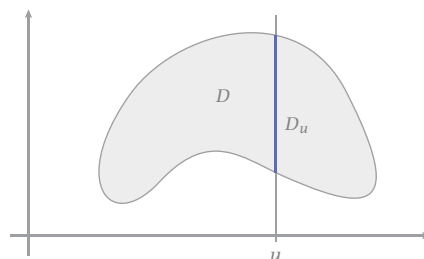
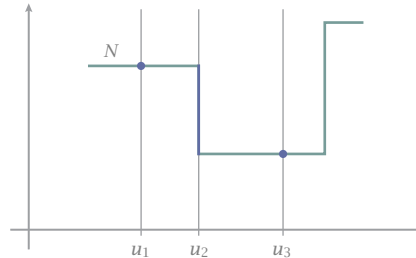


Abb 2  
Nullmenge mit  
verschiedenen  
Schnitten



zweier Maße auf den Faktorräumen. Ziel ist, ein Integral bezüglich  $\mu_n$  durch zwei Integrale bezüglich der Maße  $\mu_r$  und  $\mu_s$  darzustellen.

Eine Komplikation besteht darin, dass im Allgemeinen nicht alle Schnitte einer  $\mu_n$ -Nullmenge auch  $\mu_r$ - oder  $\mu_s$ -Nullmengen sind, sondern auch positives Maß haben können. Die genaue Formulierung des Satzes ist daher etwas umständlich, auch wenn dies für seine Anwendung selten eine Rolle spielt.

Wir vereinbaren noch folgende Notationen. Ist eine Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = f(u, v)$$

gegeben, so sei ihr *u-Schnitt* die partielle Funktion<sup>1</sup>

$$f_u : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}, \quad v \mapsto f_u(v) := f(u, v).$$

Ist diese Funktion  $\mu_s$ -integrierbar für alle  $u$  außerhalb einer  $\mu_r$ -Nullmenge in  $\mathbb{R}^r$ , so erhalten wir durch Integration über  $\mathbb{R}^s$   $\mu_r$ -fast überall erklärte Funktion

$$F : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(u) =_{\mu_r} \int_{\mathbb{R}^s} f_u \, d\mu_s.$$

Die Frage ist, ob diese Funktion  $\mu_r$ -integrierbar ist, und ob

$$\int_{\mathbb{R}^r} F \, d\mu_r = \int_{\mathbb{R}^r} \left( \int_{\mathbb{R}^s} f \, d\mu_s \right) d\mu_r = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_n.$$

Diese Frage beantworten wir zuerst für monoton approximierbare Funktionen.

1 **Satz von Tonelli** Sei  $f \in \mathcal{U}^n(\mu_n)$ . Dann ist

$$f_u \in_{\mu_r} \mathcal{U}^s(\mu_s), \quad F :=_{\mu_r} \int_{\mathbb{R}^s} f \, d\mu_s \in \mathcal{U}^r(\mu_r),$$

und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^r} F \, d\mu_r = \int_{\mathbb{R}^r} \left( \int_{\mathbb{R}^s} f \, d\mu_s \right) d\mu_r.$$

Dies gilt auch für den Fall unbeschränkter Integrale.  $\times$

<sup>1</sup> Partielle Ableitungen benötigen wir hier nicht, so dass keine Verwechslungsgefahr besteht.

■ **Beweis des Satzes von Tonelli**

Für den Beweis sei  $\mathcal{U}^i = \mathcal{U}^i(\mu_i)$  für  $i = n, r, s$ . Da jedes Maß sich auf genau einen Raum bezieht, können wir auf deren Angabe in Integralen verzichten. — Der Beweis erfolgt nun in mehreren Schritten.

**Schritt 1** *Der Satz von Tonelli gilt für die charakteristischen Funktionen beschränkter Intervalle.* ✕

⟨⟨⟨ Für  $I = I_r \times I_s$  mit Intervallen  $I_r \in \mathcal{J}^r$  und  $I_s \in \mathcal{J}^s$  ist  $f = \chi_I = \chi_{I_r} \chi_{I_s}$ . Für jeden  $u$ -Schnitt gilt

$$f_u = \chi_{I,u} = \chi_{I_r}(u) \chi_{I_s} \in \mathcal{U}^s,$$

und Integration über  $\mathbb{R}^s$  ergibt

$$F = \int \chi_{I_r} \chi_{I_s} d\mu_s = \mu_s(I_s) \chi_{I_r} \in \mathcal{U}^r.$$

Aufgrund der Definition des Produktmaßes  $\mu_n = \mu_r \times \mu_s$  gilt schließlich

$$\begin{aligned} \int F d\mu_r &= \mu_s(I_s) \int \chi_{I_r} d\mu_r \\ &= \mu_s(I_s) \mu_r(I_r) = \mu_n(I) = \int f d\mu_n. \end{aligned}$$

Damit ist für  $\chi_I$  alles gezeigt. ⟩⟩⟩

**Schritt 2** *Der Satz von Tonelli gilt für alle Treppenfunktionen.* ✕

⟨⟨⟨ Treppenfunktionen sind Linearkombinationen charakteristischer Funktionen von Intervallen. Daher genügt es zu zeigen, dass dieser Satz für eine Linearkombination  $\alpha f + \beta g$  gilt, wenn er für Treppenfunktionen  $f$  und  $g$  gilt. Gilt nun der Satz von Tonelli für  $f$  und  $g$ , so gilt auch für jeden  $u$ -Schnitt

$$(\alpha f + \beta g)_u = \alpha f_u + \beta g_u \in \mathcal{T}^s,$$

und es ist

$$F = \int f d\mu_s \in \mathcal{T}^r, \quad G = \int g d\mu_s \in \mathcal{T}^r.$$

Also ist auch

$$\int (\alpha f + \beta g) d\mu_s = \alpha \int f d\mu_s + \beta \int g d\mu_s = \alpha F + \beta G \in \mathcal{T}^r.$$

Und schließlich gilt dann auch, mit dem Satz von Tonelli für  $f$  und  $g$ ,

$$\begin{aligned} \int (\alpha f + \beta g) d\mu_n &= \alpha \int f d\mu_n + \beta \int g d\mu_n \\ &= \alpha \int F d\mu_r + \beta \int G d\mu_r = \int (\alpha F + \beta G) d\mu_r. \end{aligned}$$

Das war zu zeigen. ⟩⟩⟩

**Hilfssatz** Sei  $N$  eine  $\mu_n$ -Nullmenge. Dann ist  $\mu_r$ -fast jeder  $u$ -Schnitt

$$N_u = \{v : (u, v) \in N\} \subset \mathbb{R}^s$$

eine  $\mu_s$ -Nullmenge.  $\times$

⟨⟨⟨ Zu der  $\mu_n$ -Nullmenge  $N$  existiert <sup>20.6</sup> eine Folge  $(I_k)$  von  $n$ -Intervallen, so dass jeder Punkt in  $N$  von unendlich vielen Intervallen überdeckt wird und

$$\sum_{k \geq 1} \mu_n(I_k) < \infty.$$

Die  $u$ -Schnitte  $(I_{k,u})$  bilden dann eine Überdeckung von  $N_u$  durch  $s$ -Intervalle, wobei jeder Punkt von  $N_u$  unendlich oft überdeckt wird. Für das Maß dieser  $u$ -Schnitte gilt

$$\sum_{k \geq 1} \mu_s(I_{k,u}) = \sum_{k \geq 1} \int \chi_{I_{k,u}} d\mu_s = \lim_{m \rightarrow \infty} \psi_m(u)$$

mit

$$\psi_m = \sum_{1 \leq k \leq m} \int \chi_{I_k} d\mu_s.$$

Dies ist eine monoton steigende Folge von Funktionen in  $\mathcal{T}^r$  mit beschränkter Integralfolge, denn

$$\int \psi_m d\mu_r = \sum_{1 \leq k \leq m} \int \left( \int \chi_{I_k} d\mu_s \right) d\mu_r \leq \sum_{k \geq 1} \mu_n(I_k) < \infty.$$

Mit Lemma A <sup>20.13</sup> gilt also  $\lim \psi_m <_{\mu_r} \infty$ , und damit auch

$$\sum_{k \geq 1} \mu_s(I_{k,u}) <_{\mu} \infty.$$

Also <sup>20.6</sup> ist  $N_u$  für  $\mu_r$ -fast alle  $u$  eine  $\mu_s$ -Nullmenge.  $\rangle\rangle\rangle$

**Schritt 3** Der Satz gilt für alle monoton approximierbaren Funktionen.  $\times$

⟨⟨⟨ Sei  $f \in \mathcal{U}^n$  und  $(f_k)$  eine Folge von Treppenfunktionen mit

$$f_k \nearrow_{\mu_n} f, \quad I_{\mu_n}(f_k) \nearrow I_{\mu_n}(f).$$

Die Folge konvergiert also außerhalb einer  $\mu_n$ -Nullmenge monoton gegen  $f$ . Aufgrund des Hilfssatzes gibt es dann eine  $\mu_r$ -Nullmenge  $N_r$  in  $\mathbb{R}^r$ , so dass auch

$$f_{k,u} \nearrow_{\mu_s} f_u, \quad u \notin N_r.$$

Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz <sup>20.18</sup> folgt

$$f_u \in \mathcal{U}^s, \quad \int f_{k,u} d\mu_s \nearrow \int f_u d\mu_s, \quad u \notin N_r.$$

Damit gilt also

$$F_k = \int f_k \, d\mu_s \nearrow_{\mu_r} F = \int f \, d\mu_s,$$

wobei die  $F_k$  eine Folge in  $\mathcal{T}^r$  bilden. Wiederum mit dem Satz von der monotonen Konvergenz ist also  $F \in \mathcal{U}^r$ , und mit Schritt 2 ist

$$\begin{aligned} \int F \, d\mu_r &= \lim \int F_k \, d\mu_r \\ &= \lim \int f_k \, d\mu_n = \int f \, d\mu_n. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für jede Funktion  $f \in \mathcal{U}^n$  bewiesen.  $\gggg$

#### ■ Der Satz von Fubini

Nun betrachten wir den Fall beliebiger messbarer Funktionen. Wie beim Übergang vom Satz von Beppo Levi zum Satz von Lebesgue setzen wir voraus, dass die betrachtete Funktion nicht nur messbar, sondern integrierbar ist. Diese Annahme ist unverzichtbar.

2 **Satz von Fubini** Sei  $f \in \mathcal{L}^n(\mu_n)$ . Dann ist

$$f_u \in_{\mu_r} \mathcal{L}^s(\mu_s), \quad F :=_{\mu_r} \int_{\mathbb{R}^s} f \, d\mu_s \in \mathcal{L}^r(\mu_r),$$

und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^r} F \, d\mu_r = \int_{\mathbb{R}^r} \left( \int_{\mathbb{R}^s} f \, d\mu_s \right) d\mu_r. \quad \times$$

$\llll$  Sei  $f = g - h$  eine zulässige Darstellung von  $f$  durch monoton approximierbare Funktionen. Für  $g$  und  $h$  gilt somit der Satz von Tonelli, wobei nach Voraussetzung alle auftretenden Integrale endlich sind. Die Behauptung für  $f$  ergibt sich hieraus mit der Linearität des Integrals.  $\gggg$

In klassischer Notation für Volumenmaße sagt dieser Satz Folgendes aus. Ist  $f = f(x) = f(u, v)$  integrierbar, so ist der  $u$ -Schnitt  $f(u, \cdot)$  für fast jedes  $u$  eine integrierbare Funktion von  $v$ . Dessen Integral bezüglich  $v$  definiert fast überall eine integrierbare Funktion  $F$  von  $u$ , und für deren Integral gilt

$$\int_{\mathbb{R}^r} F(u) \, du = \int_{\mathbb{R}^r} \left( \int_{\mathbb{R}^s} f(u, v) \, dv \right) du = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx.$$

Aus Symmetriegründen können wir die Rollen von  $u$  und  $v$  vertauschen und erhalten dementsprechend

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^s} \left( \int_{\mathbb{R}^r} f(u, v) \, du \right) dv.$$

Dabei bezeichnen  $du$ ,  $dv$ ,  $dx$  die Volumenmaße auf  $\mathbb{R}^r$ ,  $\mathbb{R}^s$  respektive  $\mathbb{R}^n$ .

In der Regel lässt man die Klammern hierbei weg und schreibt kürzer

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^s} \int_{\mathbb{R}^r} f(u, v) \, du \, dv = \int_{\mathbb{R}^r} \int_{\mathbb{R}^s} f(u, v) \, dv \, du.$$

Dies ist »von innen nach außen« zu lesen. Beim letzten Integral zum Beispiel wird der Integrand zuerst bezüglich  $v$  über  $\mathbb{R}^s$  integriert, und das Ergebnis anschließend bezüglich  $u$  über  $\mathbb{R}^r$ . Dies ist etwas ganz anderes als das Integral über  $\mathbb{R}^n$  auf der linken Seite!

Typischerweise werden die Sätze von Tonelli und Fubini gemeinsam angewendet, um erst die Integrierbarkeit einer Funktion festzustellen und dann deren Integral durch iterierte Integrale darzustellen.

- 3 **Satz von Tonelli-Fubini** Sei  $f \in \mathcal{M}^n(\lambda)$ . Existiert eines der Integrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \, dx, \quad \int_{\mathbb{R}^s} \int_{\mathbb{R}^r} |f(u, v)| \, du \, dv, \quad \int_{\mathbb{R}^r} \int_{\mathbb{R}^s} |f(u, v)| \, dv \, du$$

und ist endlich, so auch jedes andere, und alle sind gleich. In diesem Fall ist  $f$  integrierbar, und es gilt der Satz von Fubini 2. ✕

««« Ist das erste Integral endlich, so ist  $f$  integrierbar. Dann ist der Satz von Fubini auf  $f$  und  $|f|$  anwendbar, und wir sind fertig.

Sei jetzt zum Beispiel das letzte Integral endlich. Die abgeschnittenen Funktionen  $\phi_k = \min(|f|, k\chi_{[-k,k]^n})$  sind integrierbar, und mit Fubini gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_k \, dx &= \int_{\mathbb{R}^r} \int_{\mathbb{R}^s} \phi_k(u, v) \, dv \, du \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^r} \int_{\mathbb{R}^s} |f(u, v)| \, dv \, du < \infty. \end{aligned}$$

Da dies eine gleichmäßige Schranke für alle  $k$  darstellt, ist auch  $|f| = \lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k$  integrierbar, und wir können wie zuvor argumentieren. »»»

### ■ Beispiele

- 4 ▶ A. Sei  $\mathbb{D}$  die abgeschlossene Einheitskreisscheibe und  $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig. Dann ist definitionsgemäß

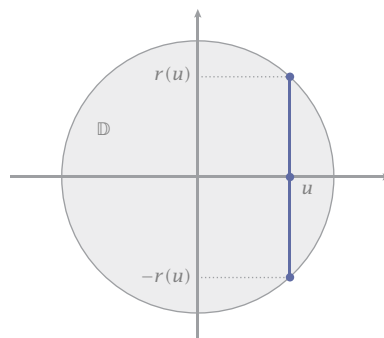
$$\int_{\mathbb{D}} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^2} f \chi_{\mathbb{D}} \, d\lambda.$$

Da  $\chi_{\mathbb{D}}(u, v) = 1$  für  $|v| \leq r(u) := \sqrt{1 - u^2}$  und 0 sonst, erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{D}} f \, d\lambda &= \int_{\mathbb{R}^2} f \chi_{\mathbb{D}} \, d\lambda = \int_{[-1,1]} \left( \int_{[-1,1]} (f \chi_{\mathbb{D}}) \, dv \right) du \\ &= \int_{-1}^1 \left( \int_{-r(u)}^{r(u)} f(u, v) \, dv \right) du. \end{aligned}$$

Abb 3

Integration über die  
Einheitskreisscheibe



B. Mit  $f(u, v) = \sqrt{1 - u^2 - v^2}$  erhalten wir insbesondere die Hälfte des Volumens  $V$  der Einheitskugel. Es ist also

$$\frac{V}{2} = \int_{-1}^1 \left( \int_{-r(u)}^{r(u)} \sqrt{1 - u^2 - v^2} \, dv \right) du.$$

Die Substitution  $v = r(u) \sin t$  mit  $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$  ergibt mit einer kurzen Rechnung

$$\begin{aligned} \frac{V}{2} &= \int_{-1}^1 \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2(u) \cos^2 t \, dt \right) du \\ &= \int_{-1}^1 r^2(u) \left( \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt \right) du \\ &= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 (1 - u^2) \, du = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Etwas einfacher wird diese Rechnung später mit Polarkoordinaten <sup>15</sup>. ◀

## 21.2

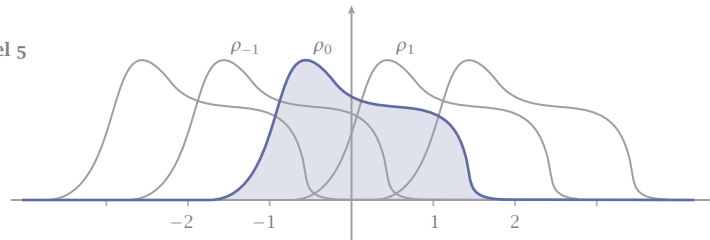
### Zerlegungen der Eins

Um die Transformationsformel für  $n$ -dimensionale Integrale wie auch später das Integral für Differentialformen auf Mannigfaltigkeiten zu definieren, benötigen wir als technisches Hilfsmittel *Zerlegungen der Eins*. Diese erlauben es in vielen Fällen, eine globale Identität auf lokale Identitäten zurückzuführen.



Abb 4

Zum Beispiel 5



**Definition** Eine *Zerlegung der Eins* auf einer nichtleeren Menge  $M$  im  $\mathbb{R}^n$  ist eine Familie  $\mathcal{T}$  von  $C^\infty$ -Funktionen  $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit kompaktem Träger mit folgenden Eigenschaften:

(z-1) Für alle  $\sigma \in \mathcal{T}$  gilt  $0 \leq \sigma \leq 1$ .

(z-2) Zu jedem Punkt in  $M$  existiert eine Umgebung  $U$ , so dass die  $U$ -Familie

$$\mathcal{T}_U := \{\sigma \in \mathcal{T} : \text{supp } \sigma \cap U \neq \emptyset\}$$

endlich ist.

(z-3) Für jeden Punkt  $x \in M$  gilt

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{T}} \sigma(x) = 1. \quad \times$$

Für (z-2) sagt man auch, eine Zerlegung der Eins ist *lokal endlich*. Daher ist auch die Summe in (z-3) lokal endlich, und das Problem der Konvergenz und Regularität der Reihe stellt sich nicht.

Eine Zerlegung der Eins auf  $\mathbb{R}^n$  ist auch eine solche auf jeder Teilmenge  $M$  von  $\mathbb{R}^n$ . Das folgende Beispiel zeigt daher die Existenz solcher Zerlegungen für beliebige Mengen.

- 5 **► Zerlegung der Eins auf  $\mathbb{R}^n$**  Wähle irgendeine nichtnegative  $C^\infty$ -Funktion  $\rho_0$  mit der Eigenschaft, dass

$$\rho_0|_{B_1} > 0, \quad \rho_0|_{B_2^c} = 0.$$

Für  $k \in \mathbb{Z}^n$  sei  $\rho_k = \rho_0(\cdot - k)$  die um  $k$  verschobene Funktion  $\rho_0$ . Dann nehmen auf jeder beschränkten Menge nur endlich viele  $\rho_k$  positive Werte an, und die Funktion

$$\rho: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad \rho(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \rho_k(x)$$

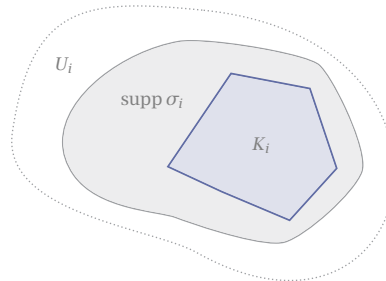
ist wohldefiniert, positiv und differenzierbar. Die normalisierten Funktionen

$$\sigma_k = \frac{\rho_k}{\rho}, \quad k \in \mathbb{Z}^n$$

bilden dann eine Zerlegung der Eins auf  $\mathbb{R}^n$ . ◀

Abb 5

Zum ersten Beweisschritt



Meistens benötigt man jedoch nicht irgendeine Zerlegung, sondern eine, die einer vorgegebenen offenen Überdeckung einer Menge *untergeordnet* ist.

- 6 **Satz** Sei  $M \subset \mathbb{R}^n$  nicht leer und  $\mathcal{O}$  eine offene Überdeckung von  $M$ . Dann existiert eine  $\mathcal{O}$  *untergeordnete Zerlegung der Eins*  $\mathcal{T}$  auf  $M$ . Das heißt, für jedes  $\sigma \in \mathcal{T}$  existiert ein  $U \in \mathcal{O}$ , so dass  $\text{supp } \sigma \subset U$ .  $\times$

⟨⟨⟨ Der Beweis erfolgt in vier Schritten.

1. Schritt:  $M$  ist kompakt Dann wird  $M$  bereits durch endlich viele offene Mengen  $U_1, \dots, U_n$  in  $\mathcal{O}$  überdeckt, also  $M \subset U := U_1 \cup \dots \cup U_n$ . Dazu – siehe folgendes Lemma – existieren kompakte Mengen  $K_i \subset U_i$  derart, dass deren Inneres  $K_i^\circ$  die Menge  $M$  ebenfalls überdeckt, also

$$M \subset K_1^\circ \cup \dots \cup K_n^\circ \subset U$$

gilt. Dazu existieren nichtnegative  $C^\infty$ -Funktionen  $\rho_i$  derart, dass

$$\rho_i|_{K_i} > 0, \quad \rho_i|_{U_i^c} \equiv 0.$$

Somit gilt  $\rho_1 + \dots + \rho_n > 0$  auf der kompakten Menge  $K_0 := K_1 \cup \dots \cup K_n$  und damit auch auf einer offenen Umgebung  $U_0 \supset K_0$ . Dazu existiert eine  $C^\infty$ -Funktion  $\rho_0$  mit

$$\rho_0|_{K_0} \equiv 0, \quad \rho_0|_{U_0^c} > 0.$$

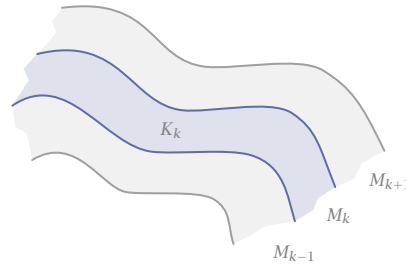
Dann gilt  $\rho := \rho_0 + \dots + \rho_n > 0$  auf ganz  $\mathbb{R}^n$ ,  $\rho|_{K_0} = \rho_1 + \dots + \rho_n$ , und die Funktionen

$$\sigma_i := \frac{\rho_i}{\rho}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

bilden eine  $U_1, \dots, U_n$  und damit  $\mathcal{O}$  untergeordnete Zerlegung der Eins auf  $K_0$  und damit auch auf  $M$ .

Abb 6

Die kompakte Menge  
 $K_k = M_k \setminus M_{k-1}^\circ$



2. Schritt:  $M$  ist Vereinigung kompakter Mengen  $M_k$  Es genügt, eine steigende Folge  $(M_k)_{k \geq 1}$  kompakter Mengen mit

$$M = \bigcup_{k \geq 1} M_k, \quad M_k \subset M_{k+1}^\circ,$$

zu betrachten. Definiere für  $k \geq 1$  die offenen ›Ringmengen‹  $\Omega_k := M_{k+1}^\circ \setminus M_{k-2}$  und die darin enthaltenen kompakten ›Ringmengen‹

$$K_k = M_k \setminus M_{k-1}^\circ \subset \Omega_k.$$

wobei  $M_{-1} := M_0 := \emptyset$ . Dann bildet die Familie

$$\mathcal{O}_k := \{U \cap \Omega_k : U \in \mathcal{O}\}$$

eine offene Überdeckung von  $K_k$ . Gemäß dem ersten Schritt existiert auf  $K_k$  eine  $\mathcal{O}_k$  untergeordnete Zerlegung der Eins  $\mathcal{S}_k$ , die aus endlich vielen Funktionen besteht, welche außerdem sämtlich auf  $M_{k-2}$  verschwinden. Innerhalb der Gesamtfamilie  $\mathcal{S} := \bigcup_{k \geq 1} \mathcal{S}_k$  verschwinden somit auf jeder Menge  $M_k$  nur endlich viele Funktionen nicht identisch. Die Summe

$$\rho_s = \sum_{\rho \in \mathcal{S}} \rho$$

ist also in jedem Punkt von  $M$  endlich. Setzen wir

$$\sigma := \frac{\rho}{\rho_s}, \quad \rho \in \mathcal{S},$$

so bilden diese Funktionen eine  $\mathcal{O}$  untergeordnete Zerlegung der Eins auf  $M$ .

3. Schritt:  $M$  ist offen Die Mengen

$$M_k := \{x \in M : |x| \leq k \wedge \text{dist}(x, M^c) \geq 1/k\}, \quad k \geq 1,$$

bilden eine Ausschöpfung von  $M$  durch kompakte Mengen mit  $M_k \subset M_{k+1}^\circ$ . Also können wir den zweiten Schritt anwenden.

**4. Schritt:  $M$  ist beliebig** Die Menge  $\Omega := \bigcup_{U \in \mathcal{O}} U$  ist offen und enthält  $M$ . Eine Zerlegung der Eins auf  $\Omega$  gemäß dem vorangehenden Schritt ist dann auch eine Zerlegung der Eins auf  $M$ .  $\gggg$

Für den Beweis des ersten Schritts benötigen wir noch folgendes

**7 Lemma** *Zu jeder endlichen offenen Überdeckung  $U_1, \dots, U_n$  einer kompakten Menge  $M$  existieren kompakte Mengen  $K_i \subset U_i$ , deren Inneres ebenfalls  $M$  überdecken.  $\times$*

$\llll$  Wir konstruieren diese Mengen induktiv wie folgt. Angenommen, wir haben bereits kompakte Mengen  $K_1, \dots, K_{i-1}$ , so dass

$$K_1^\circ \cup \dots \cup K_{i-1}^\circ \cup U_i \cup U_{i+1} \cup \dots \cup U_n \supset M.$$

Für  $i = 1$  entspricht dies der Ausgangssituation, wo wir noch keine kompakte Menge konstruiert haben. Betrachte dann

$$C_i := M \setminus (K_1^\circ \cup \dots \cup K_{i-1}^\circ \cup U_{i+1} \cup \dots \cup U_n).$$

Diese Menge ist abgeschlossen und in  $M$  enthalten, also kompakt. Es gilt auch  $C_i \subset U_i$ . Dann existiert auch eine kompakte Menge  $K_i$  derart, dass

$$C_i \subset K_i^\circ \subset K_i \subset U_i.$$

Damit erhalten wir

$$K_1^\circ \cup \dots \cup K_{i-1}^\circ \cup K_i^\circ \cup U_{i+1} \cup \dots \cup U_n \supset M,$$

und wir sind fertig.  $\gggg$

**Bemerkungen** *a.* Ist  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\mathcal{O} = \{\Omega\}$ , so kann eine diesbezügliche Zerlegung der Eins trotzdem nicht aus endlich vielen Funktionen bestehen A-8.

*b.* Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\mathcal{O}$  die Familie aller offenen Teilmengen von  $\Omega$ . Eine  $\mathcal{O}$  untergeordnete Zerlegung der Eins  $\mathcal{T}$  besteht dann aus abzählbar vielen nichttrivialen glatten Funktionen  $\sigma$  derart, dass

$$\sum_{\sigma \in \mathcal{T}} \sigma(x) = \chi_\Omega. \quad \rightarrow$$

## 21.3

## Die Transformationsformel

Ein wesentliches Hilfsmittel der eindimensionalen Integrationstheorie ist die Substitutionsregel. Ist  $\varphi$  stetig differenzierbar auf dem Intervall  $I = [a, b]$  und  $f$  stetig auf dem Bildintervall  $\varphi(I)$ , so gilt bekanntlich <sup>10,18</sup>

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = \int_a^b f(\varphi(s)) \varphi'(s) ds.$$

Dies ergibt sich unmittelbar aus dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung und der Kettenregel. Hierbei ist es nicht einmal erforderlich, dass  $\varphi$  die Orientierung des Intervalls  $I$  erhält oder  $I$  bijektiv auf  $\varphi(I)$  abbildet.

In dieser Allgemeinheit werden wir die Substitutionsregel *nicht* für das höherdimensionale Integral formulieren. Wir setzen zumindest voraus, dass  $\varphi$  *bijektiv* ist. Auf einem Intervall ist  $\varphi$  dann notwendigerweise monoton. Die beiden möglichen Fälle der Substitutionsregel – entweder positive oder negative Ableitung – lassen sich dann zusammenfassen zu

$$\int_{\varphi(I)} f(t) dt = \int_I f(\varphi(s)) |\varphi'(s)| ds.$$

Hierbei wird das linke Integral immer vom linken zum rechten Endpunkt des Intervalls  $\varphi(I)$  gebildet, unabhängig davon, wie  $I$  auf  $\varphi(I)$  abgebildet wird.

In dieser Form verallgemeinern wir die Substitutionsregel auf höhere Dimensionen. Man beachte, dass sie sich nur auf das Volumenmaß  $\lambda$  bezieht.

- 8 **Transformationsformel** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\varphi$  ein Diffeomorphismus von  $\Omega$  auf die offene Menge  $\varphi(\Omega)$ . Ist  $f$  auf  $\varphi(\Omega)$  integrierbar, so gilt

$$\int_{\varphi(\Omega)} f d\lambda = \int_{\Omega} (f \circ \varphi) |\det D\varphi| d\lambda.$$

*Insbesondere existiert das rechts stehende Integral.* ✕

Ist umgekehrt  $(f \circ \varphi) |\det D\varphi|$  auf  $\Omega$  integrierbar, so folgt durch Anwendung der Formel mit  $\varphi^{-1}$  umgekehrt auch die Integrierbarkeit von  $f$  auf  $\varphi(\Omega)$ . Beide Annahmen sind also äquivalent.

Wir beweisen die Transformationsformel für den Fall, dass die Determinante von  $\varphi$  überall positiv ist. Der andere Fall lässt sich mithilfe der Reflexion einer Koordinate auf diesen zurückführen <sup>A-11</sup>.

Der erste Schritt besteht in der Reduktion auf ein lokales Problem mithilfe einer Zerlegung der Eins und einer Adaption der Transformation  $\varphi$  gemäß dem folgenden Lemma, das wir im Anschluss beweisen werden.

- 9 **Lokalisierungslemma** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein lokaler Diffeomorphismus mit positiver Jacobideterminante. Dann existiert zu jedem Punkt in  $\Omega$  eine Umgebung  $U \subset \Omega$  und eine stetig differenzierbare Abbildung  $\psi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  derart, dass

$$\psi|_U = \varphi, \quad \psi(U) \cap \psi(U^c) = \emptyset,$$

sowie  $\psi|_{I^c} = \text{id}$  für ein hinreichend großes Intervall  $I$ .  $\times$

Das Bild jeder dieser offenen Mengen  $U$  unter dem Diffeomorphismus  $\varphi$  ist eine offene Menge in  $\varphi(\Omega)$ , und ihre Gesamtheit bildet eine offene Überdeckung von  $\varphi(\Omega)$ . Sei  $\mathcal{T}$  eine ihr untergeordnete Zerlegung der Eins  $\mathbb{6}$ . Dann gilt

$$f = \sum_{\sigma \in \mathcal{T}} \sigma f.$$

Gilt nun für jedes  $\sigma$  die lokalisierte Transformationsformel

$$\int_{\varphi(\Omega)} (\sigma f) \, d\lambda = \int_{\Omega} (\sigma f) \circ \varphi \det D\varphi \, d\lambda.$$

so folgt durch Summieren über  $\sigma \in \mathcal{T}$  daraus die allgemeine Formel  $\mathbb{8}$ .

Die lokalisierte Formel schreiben wir noch weiter um. Aufgrund der Wahl von  $\mathcal{T}$  ist der Träger eines jeden  $\sigma \in \mathcal{T}$  in einer offenen Menge  $\varphi(U)$  enthalten, auf die das Lokalisierungslemma zutrifft. Somit ist einerseits

$$\int_{\varphi(\Omega)} \sigma f \, d\lambda = \int_{\varphi(U)} \sigma f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma f \, d\lambda.$$

Andererseits gilt mit der Abbildung  $\psi$  des Lokalisierungslemmas

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\sigma f) \circ \varphi \det D\varphi \, d\lambda &= \int_U (\sigma f) \circ \varphi \det D\varphi \, d\lambda \\ &= \int_U (\sigma f) \circ \psi \det D\psi \, d\lambda, \end{aligned}$$

da  $\psi$  auf  $U$  mit  $\varphi$  übereinstimmt. Da  $\psi(U^c)$  und  $\psi(U)$  disjunkt sind und  $\sigma f$  auf  $\psi(U^c)$  verschwindet, gilt weiter

$$\int_U (\sigma f) \circ \psi \det D\psi \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} (\sigma f) \circ \psi \det D\psi \, d\lambda.$$

Die allgemeine Transformationsformel reduziert sich damit auf folgendem Satz, wobei wir wieder  $\varphi$  statt  $\psi$  schreiben.

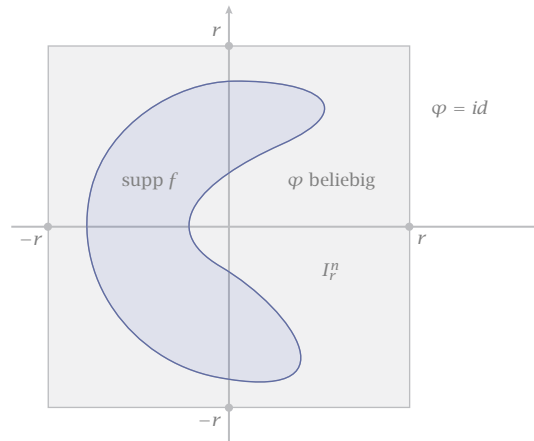
- 10 **Lokale Transformationsformel** Sei  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar mit  $\varphi = \text{id}$  außerhalb eines Intervalls  $I$ . Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \varphi) \det D\varphi \, d\lambda$$

für jede Funktion  $f \in \mathcal{L}^n(\lambda)$  mit kompaktem Träger.  $\times$

Abb 7

Zum Beweis der lokalen Transformationsformel



««« Wir können  $f \in C^1$  und  $\varphi \in C^2$  annehmen. Durch einen Approximationsprozess folgt dann die Behauptung für den allgemeinen Fall.

Definiere  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$g(x) = \int_{-\infty}^{x_1} f(t, x_2, \dots, x_n) dt.$$

Wegen der Kompaktheit des Trägers von  $f$  ist diese Funktion in jedem Punkt wohldefiniert, und es gilt  $\partial_1 g = f$ . Somit ist  $g$  ebenfalls stetig differenzierbar. Also ist

$$\nabla(g \circ \varphi) = \sum_{i=1}^n (\partial_i g \circ \varphi) \nabla \varphi_i,$$

wobei  $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)^\top$ . Aufgrund der Multilinearität und Antisymmetrie der Determinante ist weiter

$$\begin{aligned} \det(\nabla(g \circ \varphi), \nabla \varphi_2, \dots, \nabla \varphi_n) \\ &= \det((\partial_1 g \circ \varphi) \nabla \varphi_1, \nabla \varphi_2, \dots, \nabla \varphi_n) \\ &= (\partial_1 g \circ \varphi) \det D\varphi. \end{aligned}$$

Wählen wir nun das Intervall  $I^n = I_r^n$  mit  $I_r = [-r, r]$  so groß, dass  $f \equiv 0$  und  $\varphi = id$  auf dem Komplement von  $I^n$ , so gilt mit  $f = \partial_1 g$  also

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \varphi) \det D\varphi d\lambda &= \int_{I^n} (f \circ \varphi) \det D\varphi d\lambda \\ &= \int_{I^n} (\partial_1 g \circ \varphi) \det D\varphi d\lambda \\ &= \int_{I^n} \det(\nabla(g \circ \varphi), \nabla \varphi_2, \dots, \nabla \varphi_n) d\lambda. \end{aligned}$$

Wir entwickeln nun die letzte Determinante nach der ersten Spalte und bezeichnen die zugehörigen Unterdeterminanten einschließlich ihres Vorzeichenfaktors mit  $M_i$ . Mit Fubini und partieller Integration wird das letzte Integral zu

$$\begin{aligned} & \int_{I^n} \sum_{i=1}^n \partial_i(g \circ \varphi) M_i \, d\lambda \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{I_r^{n-1}} \int_{I_r} \partial_i(g \circ \varphi) M_i \, d\lambda_1 \, d\lambda_{n-1} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ \int_{I_r^{n-1}} (g \circ \varphi) M_i \Big|_{-r}^r \, d\lambda_{n-1} - \int_{I_r^{n-1}} \int_{I_r} (g \circ \varphi) \partial_i M_i \, d\lambda_1 \, d\lambda_{n-1} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{I_r^{n-1}} (g \circ \varphi) M_i \Big|_{-r}^r \, d\lambda_{n-1} - \int_{I^n} (g \circ \varphi) (\partial_1 M_1 + \dots + \partial_n M_n) \, d\lambda. \end{aligned}$$

Für eine  $C^2$ -Abbildung  $\varphi: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  gilt aber A-12

$$\partial_1 M_1 + \dots + \partial_n M_n \equiv 0,$$

das letzte Integral verschwindet also. Da  $\varphi = id$  außerhalb von  $I^n$ , verschwinden auch die Unterdeterminanten  $M_2, \dots, M_n$  auf dem Rand von  $I^n$ , während

$$(g \circ \varphi) M_1 \Big|_{-r}^r = g \Big|_{-r}^r = g(r, \cdot).$$

Zusammen genommen erhalten wir also mit Fubini und der Definition von  $g$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \varphi) \det D\varphi \, d\lambda &= \int_{I_r^{n-1}} g(r, \cdot) \, d\lambda_{n-1} \\ &= \int_{I_r^{n-1}} \int_{I_r} f \, d\lambda_1 \, d\lambda_{n-1} = \int_{I^n} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda. \end{aligned}$$

Genau das wollten wir beweisen.  $\gggg$

#### ■ Beweis des Lokalisierungslemmas

Es fehlt noch der Beweis des Lokalisierungslemmas. Dazu benötigen wir folgendes Ergebnis aus der linearen Algebra.

- 11 **Deformationslemma** *Jede reelle Matrix  $A$  mit positiver Determinante kann so in die Identitätsmatrix defomiert werden, dass alle Determinanten entlang dieser Deformation zwischen  $\det A$  und 1 liegen.*  $\times$

$\llll$  Betrachte die erste Spalte von  $A$ . Falls  $a_{11} \leq 0$ , so gibt es immer eine zweite Spalte in  $A$ , so dass die ersten Komponenten dieser beiden Spalten nicht gleichzeitig Null sind. Durch eine starre Drehung in der von beiden Spalten



aufgespannten Ebene können wir erreichen, dass  $a_{11} > 0$ , während sich die Determinante der Matrix nicht ändert.

Ist nun  $a_{11} > 0$ , so können wir durch eine kontinuierliche Version des Gaußschen Eliminationsprozesses erreichen, dass sämtliche übrigen Komponenten der ersten Spalte und Zeile verschwinden. Auch hierbei ändert sich die Determinante der Matrix nicht.

Verfahren wir nun induktiv, so deformieren wir  $A$  in eine Diagonalmatrix mit positiven Komponenten, ohne die Determinante zu beeinflussen. Deformation der Diagonalkomponenten zu 1 führt dann zum Ziel.

Jeder einzelne Deformationsschritt kann durch eine stetige Kurve von Matrizen beschrieben werden. Durch entsprechende Parametrisierung wird die gesamte Familie auch glatt. »»»

««« *Beweis des Lokalisierungslemmas* Es genügt, einen lokalen Diffeomorphismus  $\varphi$  um 0 mit  $\varphi(0) = 0$  zu betrachten. Mit  $\Lambda = D\varphi(0)$  ist dann

$$\varphi = \Lambda + \hat{\varphi}, \quad \hat{\varphi} = o(\|x\|).$$

Wegen der Umkehrbarkeit von  $\Lambda$  gilt außerdem

$$m \|x\| \leq \|\Lambda x\| \leq m^{-1} \|x\|, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

mit einer hinreichend kleinen Konstanten  $m > 0$ .

Im ersten Schritt eliminieren wir die Nichtlinearität  $\hat{\varphi}$  außerhalb einer kleinen Umgebung von 0. Wähle dazu eine beliebige *Abschneidefunktion*  $\sigma$ , also eine  $C^\infty$ -Funktion  $\sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  mit  $\sigma|_{B_1} \equiv 1$  und  $\sigma|_{B_2^c} \equiv 0$ , und setze

$$\chi = \Lambda + \sigma_\varepsilon \hat{\varphi}, \quad \sigma_\varepsilon = \sigma \circ \varepsilon^{-1}.$$

Für  $0 < \alpha < \varepsilon$  und  $\varepsilon$  hinreichend klein gilt dann

$$|\chi(x)| \leq m^{-1} \alpha + o(\alpha) \leq 2m^{-1} \alpha, \quad |x| \leq \alpha,$$

während

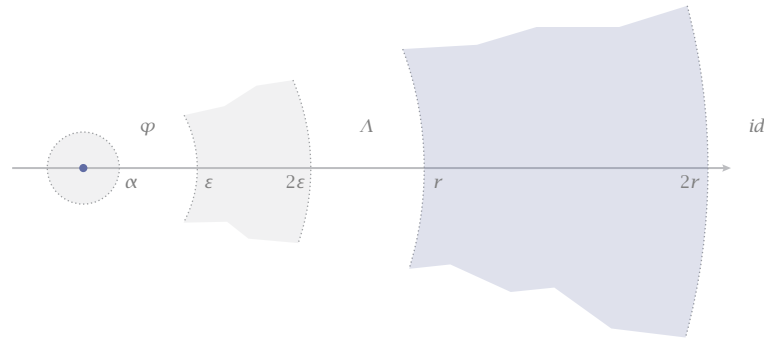
$$|\chi(x)| \geq m\varepsilon - o(\varepsilon) \geq m\varepsilon/2, \quad \varepsilon < |x| < 2\varepsilon.$$

Für  $\alpha < \varepsilon m^2/4$  ist  $2m^{-1} \alpha < m\varepsilon/2$ , und die Mengen  $\chi(B_\alpha)$  und  $\chi(B_\varepsilon^c)$  sind disjunkt. Da außerdem  $\chi|_{B_\varepsilon} = \varphi$  injektiv ist, gilt sogar

$$\chi(B_\alpha) \cap \chi(B_\varepsilon^c) = \emptyset.$$

Damit ist der erste Schritt abgeschlossen.

Abb 8 Zum Beweis des Lokalisierungslemmas



Im zweiten Schritt deformieren wir  $\Lambda$  außerhalb einer großen Kugel zur Identität. Sei dazu  $\Lambda(t)$  mit  $0 \leq t \leq 1$  eine Deformation<sub>11</sub> von  $\Lambda$  mit  $\Lambda(0) = \Lambda$  und  $\Lambda(1) = id$ . Für

$$L_r = \Lambda \circ \sigma_r, \quad L_r(x) = \Lambda(\sigma_r(x))x,$$

gilt dann

$$L_r|_{B_r} = \Lambda(0) = \Lambda, \quad L_r|_{B_{2r}^c} = \Lambda(1) = id.$$

Setzen wir also insgesamt

$$\psi = L_r + \sigma_\epsilon \hat{\varphi},$$

so ist

$$\psi|_{B_\epsilon} = \chi|_{B_\epsilon} = \varphi, \quad \psi|_{B_r} = \chi, \quad \psi|_{B_{2r}^c} = id.$$

Da außerdem  $\Lambda(t)$  für  $0 \leq t \leq 1$  regulär ist, ist  $\psi(B_r^c)$  für hinreichend große  $r$  disjunkt von  $B_\alpha$ . Somit gilt auch noch

$$\psi(B_\alpha) \cap \psi(B_\alpha^c) = \emptyset.$$

Somit erfüllt  $\psi$  alle Behauptungen des Lokalisierungslemmas mit  $U = B_\alpha$ .  $\gggg$

## 21.4

### Der Satz von Sard

In der Transformationsformel können wir tatsächlich auf die Bedingung verzichten, dass die Jacobideterminante nirgends verschwindet. Es genügt, dass die Abbildung stetig differenzierbar und bijektiv ist. Dies gründet sich auf dem nächsten Satz, der auch in anderen Zusammenhängen nützlich ist.

12 **Satz von Sard** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar und

$$S = \{\det D\varphi = 0\} \subset \Omega.$$

Dann ist  $\varphi(S)$  eine  $\lambda$ -Nullmenge. Mit anderen Worten, die Menge der kritischen Werte einer stetig differenzierbaren Abbildung ist eine Nullmenge.  $\times$

► A. Ist  $\varphi$  ein Diffeomorphismus, so ist  $S = \emptyset$  und damit auch  $\varphi(S) = \emptyset$  eine Nullmenge.

B. Ist  $\varphi$  eine singuläre lineare Abbildung, so ist  $S = \Omega$ . Aber  $\varphi(S)$  ist enthalten in einer Hyperebene und deshalb eine  $\lambda$ -Nullmenge.

C. Ist  $\varphi$  eine konstante Abbildung, so ist ebenfalls  $S = \Omega$ . Aber  $\varphi(S)$  ist eine 1-Punkt-Menge und damit eine  $\lambda$ -Nullmenge.  $\blacktriangleleft$

Während die kritischen Werte einer  $C^1$ -Abbildung eine Nullmenge bilden, kann ihr gesamter Definitionsbereich aus kritischen Punkten bestehen.

⟨⟨⟨⟨ *Beweis des Satzes von Sard* Es genügt, die Aussage für ein kompaktes  $n$ -Intervall  $I$  in  $\Omega$  zu beweisen. Die allgemeine Behauptung folgt dann durch Überdecken einer beliebigen offenen Menge durch abzählbar viele solche Intervalle und der Bemerkung, dass die abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist. Auf einem solchen kompakten Intervall  $I$  ist  $\|D\varphi\|$  beschränkt und gleichmäßig stetig <sub>7.32</sub>. Es gibt also ein  $M > 0$  derart, dass

$$|\varphi(u) - \varphi(v)| \leq M |u - v|, \quad u, v \in I,$$

und zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$  derart, dass

$$\|D\varphi(u) - D\varphi(v)\| < \varepsilon, \quad |u - v| < \delta, \quad u, v \in I.$$

Wir unterteilen nun jede Seite von  $I$  in  $m$  gleich lange Intervalle und wählen dabei  $m$  so groß, dass die Seitenlängen der  $m^n$  entstehenden Teilintervalle kleiner als  $\delta$  sind. Angenommen, in einem dieser kleinen Intervalle  $J$  liegt ein kritischer Punkt  $v$  von  $\varphi$ . Dann ist  $\det D\varphi(v) = 0$ , also  $D\varphi(v)$  eine lineare Abbildung in eine Hyperebene  $H$ . Mit dem Lemma von Hadamard <sub>14.15</sub> gilt dann

$$\varphi(u) = \varphi(v) + D\varphi(v)(u - v) + E(u, v)(u - v)$$

mit

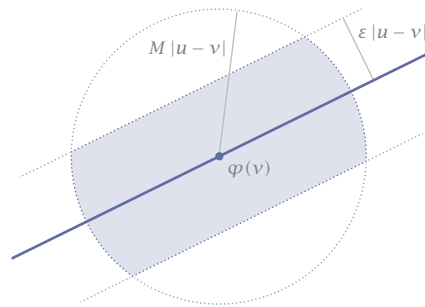
$$E(u, v) = \int_0^1 (D\varphi(v + t(u - v)) - D\varphi(v)) dt$$

und

$$\|E(u, v)\| < \|D\varphi(u) - D\varphi(v)\| < \varepsilon, \quad |u - v| < \delta.$$

Abb 9

Zum Satz von Sard



Das bedeutet, dass sich  $\varphi(u)$  für  $u \in J$  von der Hyperebene  $H$  um weniger als

$$|E(u, \nu)(u - \nu)| \leq \varepsilon |u - \nu|$$

entfernt. Gleichzeitig liegen alle Bilder in einer Kugel um  $u$  mit Radius kleiner als  $M |u - \nu|$ . Somit liegt das gesamte Bild  $\varphi(J)$  in einem Zylinder mit Höhe  $2\varepsilon |u - \nu|$  und Basisradius  $M |u - \nu|$ . Für das Volumen gilt also

$$\lambda(\varphi(J)) \leq c\varepsilon |u - \nu|^n \leq c\varepsilon \lambda(J).$$

Summieren wir über alle solchen kleinen Intervalle  $J$ , die einen kritischen Punkt enthalten, so folgt

$$\lambda(\varphi(S)) \leq c\varepsilon \lambda(I).$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, muss  $\varphi(S)$  eine Nullmenge sein.  $\gggg$

Daraus ergibt sich folgende

- 13 **Allgemeine Transformationsformel** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\varphi$  eine bijektive, stetig differenzierbare Abbildung von  $\Omega$  auf die offene Menge  $\varphi(\Omega)$ . Ist  $f$  auf  $\varphi(\Omega)$  integrierbar, so gilt

$$\int_{\varphi(\Omega)} f \, d\lambda = \int_{\Omega} (f \circ \varphi) |\det D\varphi| \, d\lambda. \quad \times$$

$\gggg$  Auf der abgeschlossenen Menge  $\Omega_0 = \{\det D\varphi = 0\} \subset \Omega$  verschwindet das rechts stehende Integral, da dort der Integrand verschwindet. Das links stehende Integral über  $\varphi(\Omega_0)$  verschwindet ebenfalls aufgrund des Satzes von Sard<sub>12</sub>. Auf dem offenen Komplement  $\Omega \setminus \Omega_0$  ist  $\varphi$  ein Diffeomorphismus, und Anwendung der Transformationsformel<sub>8</sub> ergibt die Behauptung.  $\gggg$

**Bemerkung** Tatsächlich längst sich auch die Bedingung der Bijektivität abschwächen. Es genügt, dass der *Abbildungsgrad* von  $\varphi: \Omega \rightarrow \varphi(\Omega)$  gerade 1 ist.  $\circ$

## 21.5

## Anwendungen der Transformationsformel

■ Der Zwischenwertsatz im  $\mathbb{R}^n$ 

An der lokalen Transformationsformel  $_{10}$  fällt auf, dass die Abbildung  $\varphi$  weder als injektiv noch als surjektiv vorausgesetzt wird. Die Surjektivität lässt sich jedoch leicht zeigen. Dazu betrachten wir der Einfachheit halber die abgeschlossene Einheitskugel  $\mathbb{B} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ .

**Lemma** Sei  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar mit  $\varphi|_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}} = id$ . Dann ist  $\varphi$  surjektiv. ✕

⟨⟨⟨ Angenommen, es gibt einen Punkt  $p$  ohne Urbild. Dann ist  $\|p\| < 1$ , da andernfalls  $p$  ein Urbild hat. Da  $\varphi(\mathbb{B})$  abgeschlossen ist und  $p$  nicht enthält, existiert auch eine offene Umgebung  $U$  um  $p$ , die nicht im Bild von  $\varphi$  liegt. Wähle eine stetige Funktion  $f$  mit Träger in  $U$  und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda \neq 0.$$

Aufgrund der lokalen Transformationsformel  $_{10}$  ist aber

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \varphi) \det D\varphi \, d\lambda = 0,$$

da nach Konstruktion  $f \circ \varphi \equiv 0$ . Somit erhalten wir einen Widerspruch. ⟩⟩⟩

- 14 **Zwischenwertsatz im  $\mathbb{R}^n$**  Sei  $\varphi: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig mit  $\varphi|_{\partial\mathbb{B}} = id$ . Dann nimmt  $\varphi$  jeden Wert in  $\mathbb{B}$  an. ✕

⟨⟨⟨ Setze  $\varphi$  außerhalb von  $\mathbb{B}$  stetig durch  $id$  fort und approximiere diese Abbildung durch stetig differenzierbare Abbildungen  $\psi$  mit  $\psi|_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}} = id$ . Aufgrund des letzten Lemmas sind diese Abbildungen surjektiv, überdecken also auch  $\mathbb{B}$ . Diese Eigenschaft bleibt im Grenzübergang  $\psi \rightarrow \varphi$  erhalten. ⟩⟩⟩

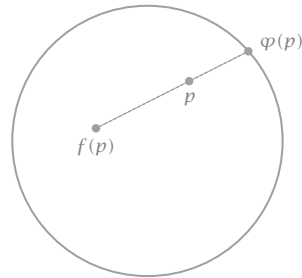
## ■ Der Brouwersche Fixpunktsatz

Neben dem Banachschen Fixpunktsatz ist dies einer der fundamentalen Fixpunktsätze der Analysis.

**Brouwerscher Fixpunktsatz** Jede stetige Selbstabbildung der abgeschlossenen Einheitskugel  $\mathbb{B}$  hat mindestens einen Fixpunkt. ✕

Über die Bildmenge  $\varphi(\mathbb{B})$  wird nichts angenommen, außer dass sie in  $\mathbb{B}$  liegt. Zum Beispiel kann  $\varphi$  eine konstante Abbildung sein mit Bildpunkt in  $\mathbb{B}$ . Diese hat offensichtlich einen Fixpunkt.

Abb 10  
Konstruktion der  
Abbildung  $\varphi$



»»» Angenommen, es gibt eine solche Abbildung ohne Fixpunkt. Dann können wir eine Abbildung

$$\varphi: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}, \quad p \mapsto \varphi(p)$$

definieren, die jedem Punkt  $p \in \mathbb{B}$  den Schnittpunkt des Halbstrahls von  $f(p)$  durch  $p$  mit der Einheitssphäre zuordnet – siehe Abbildung 10. Da  $f$  keinen Fixpunkt hat, ist dieser Strahl und damit der Bildpunkt für jedes  $p \in \mathbb{B}$  wohldefiniert und definiert eine stetige Abbildung. Offensichtlich gilt

$$\varphi(\mathbb{B}) \subset \partial\mathbb{B}, \quad \varphi|_{\partial\mathbb{B}} = id.$$

Das ist aber aufgrund des Zwischenwertsatzes <sub>14</sub> nicht möglich. »»»

#### ■ Polarkoordinaten

Diese sind definiert durch <sub>18.1</sub>

$$\chi: \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Sie bilden  $D = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$  diffeomorph auf die Ebene abzüglich der Halbgeraden  $[0, \infty)$  ab. Da diese bezüglich des Flächenmaßes eine Nullmenge bildet, fällt dies für das Integral über  $\mathbb{R}^2$  nicht ins Gewicht. Dasselbe gilt für den Rand von  $D$ . Wegen  $\det D\chi = r$  gilt für jede auf  $\mathbb{R}^2$  integrierbare Funktion  $f$  deshalb

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, dx \, dy &= \int_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, dr \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, dr \, d\varphi. \end{aligned}$$

Hierbei halten wir uns an die Vereinbarung, dass Mehrfachintegrale »von innen nach außen« zu lesen sind.

- 15 ▶ Polarkoordinaten bieten sich natürlich vor allem bei rotationssymmetrischen Funktionen an. Zum Beispiel wird

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r e^{-r^2} dr d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^\infty r e^{-r^2} dr \\ &= -\pi e^{-r^2} \Big|_0^\infty = \pi. \end{aligned}$$

Andererseits ist aufgrund des Satzes von Fubini

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= e^{-x^2} \int_{-\infty}^\infty \left( \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} dy \right) dx \\ &= \left( \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \right) \left( \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} dy \right) = \left( \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Dieses Ergebnis ist mit eindimensionaler Argumentation nur recht aufwändig zu erreichen. ◀

- ▶ *Volumen der Einheitskugel* <sub>4</sub> Mit Polarkoordinaten ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{V}{2} &= \int_{\mathbb{D}} \sqrt{1-u^2-v^2} d\lambda = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \sqrt{1-r^2} dr d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^1 r \sqrt{1-r^2} dr = \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Das Volumen einer Kugel vom Radius  $r$  ist dementsprechend  $4\pi r^3/3$ . ◀

#### ■ Zylinderkoordinaten

Diese sind definiert durch

$$\chi: \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \zeta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ \zeta \end{pmatrix}$$

und bilden  $D = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$  diffeomorph auf den  $\mathbb{R}^3$  abzüglich der Halbebene  $[0, \infty) \times \{0\} \times \mathbb{R}$  ab. Diese bildet bezüglich des Volumenmaßes eine Nullmenge und fällt für das Integral über  $\mathbb{R}^3$  nicht ins Gewicht. Dasselbe gilt für

den Rand von  $D$ . Wegen  $\det D\chi = r$  gilt für deshalb

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, \zeta) \, r \, dr \, d\varphi \, d\zeta. \end{aligned}$$

### ■ Kugelkoordinaten

Diese sind definiert durch <sup>18.1</sup>

$$\chi: \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

mit  $0 < r < \infty$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$  und  $0 < \theta < \pi$ . Mit der Jacobideterminante

$$\det D\chi = r^2 \sin \theta$$

gilt für jede auf  $\mathbb{R}^3$  integrierbare Funktion  $f$  deshalb

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(r \cos \varphi \sin \theta, \dots, r \cos \theta) \, r^2 \sin \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta. \end{aligned}$$

► **Volumen der Einheitskugel** Auf  $D = (0, 1) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$  parametrisieren Kugelkoordinaten die dreidimensionale Einheitskugel  $B$  bis auf eine Nullmenge. Für deren Volumen  $V$  erhalten wir demnach mit Fubini, wie zuvor,

$$\begin{aligned} V = \int_B d\lambda &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 r^2 \, dr \int_0^{\pi} \sin \theta \, d\theta = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

► **Gravitationspotential einer Kugel** Ein kompakter, dreidimensionaler Körper  $K$  mit stetiger Dichtefunktion  $m: K \rightarrow \mathbb{R}$  erzeugt, bis auf einen Normierungsfaktor, in einem Punkt  $p$  das Gravitationspotential

$$u(p) = \int_K \frac{m(q)}{\|q - p\|} \, dq.$$

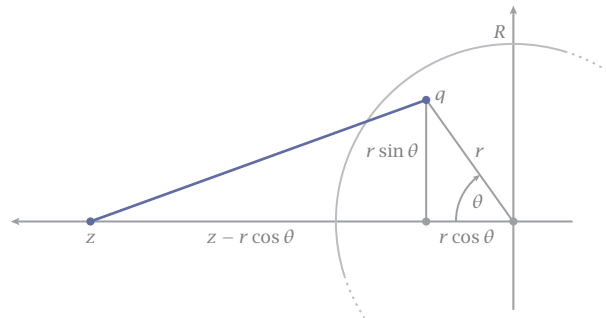
Wir betrachten den Fall einer Kugel  $K = \{\|q\| \leq R\}$  mit einer rotationssymmetrischen Dichtefunktion  $m = m(r)$ . Aus Symmetriegründen genügt es hier, einen Punkt  $p = (0, 0, z)$  zu betrachten. Bezüglich Kugelkoordinaten in  $K$  ist dann

$$\|q - p\|^2 = z^2 - 2zr \cos \theta + r^2,$$

wie man Abbildung 11 entnimmt. Somit gilt



Abb 11  
Zum Potential einer  
Kugel



$$\begin{aligned}
 u(p) &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{m(r)r^2 \sin \theta}{\sqrt{z^2 - 2zr \cos \theta + r^2}} dr d\varphi d\theta \\
 &= 2\pi \int_0^R \left\{ \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\sqrt{z^2 - 2zr \cos \theta + r^2}} d\theta \right\} m(r)r^2 dr.
 \end{aligned}$$

Mithilfe der Substitution  $-\cos \theta = t$  wird das innere Integral zu

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{z^2 + 2zrt + r^2}} = \frac{1}{zr} \sqrt{z^2 + 2zrt + r^2} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{z}.$$

Also gilt

$$u(p) = \frac{2\pi}{z} \int_0^R m(r)r^2 dr.$$

Eine Rechnung wie im vorangehenden Beispiel zeigt aber, dass

$$2\pi \int_0^R m(r)r^2 dr = M$$

gerade die Gesamtmasse der Kugel  $K$  darstellt. Also gilt

$$u(p) = \frac{M}{\|p\|}.$$

Das Potential der Kugel verhält sich also gerade so, als wäre die gesamte Masse im Mittelpunkt konzentriert. ◀