23

Der Satz von Stokes

Wir übertragen nun den Fundamentalsatz von Ketten im $\mathbb{R}^n$ auf n-dimensionale orientierte Mannigfaltigkeiten M mit Rand, die in einem beliebigen euklidischen Raum eingebettet sind. Der Fundamentalsatz erhält dann die Form

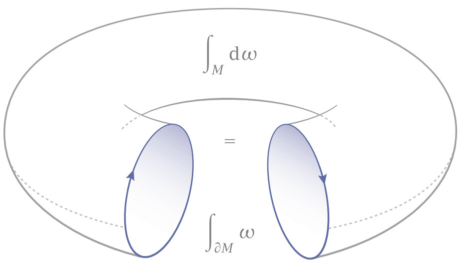
$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega$$

und wird als allgemeiner Satz von Stokes bezeichnet.

Für 3- und 2-dimensionale berandete Mannigfaltigkeiten enthält dieser den Satz von Gauss – auch Divergenzsatz genannt – und den klassischen Satz von Stokes als Spezialfälle, welche wir abschließend mithilfe der klassischen Linien-, Flächen- und Volumenelemente formulieren. In diesem Zusammenhang treten auch die Divergenz und Rotation eines Vektorfeldes auf. Diese Bezeichnungen erhalten hier ihre Berechtigung.

Abb 1

Satz von Stokes



23.1 Mannigfaltigkeiten

Bisher betrachteten wir *gleichungsdefinierte Mannigfaltigkeiten*. Demnach ist eine nichtleere Teilmenge M des $\mathbb{R}^{n+m}$ eine f-definierte Mannigfaltigkeit der Dimension n, wenn es eine stetig differenzierbare Abbildung $f: \mathbb{R}^{n+m} \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ mit regulärem Wert 0 gibt, so dass

$$M = f^{-1}(0).$$

Kurz, M ist die Niveaumenge eines regulären Wertes einer glatten Funktion.

Wir verallgemeinern dieses Konzept nun dahingehend, dass wir dies von einer Mannigfaltigkeit nur noch *lokal* um jedem Punkt fordern. Dabei stehe im Folgenden *differenzierbar* der Einfachheit halber für *unendlich oft differenzierbar*.

Definition *Eine nichtleere Teilmenge M des $\mathbb{R}^{n+m}$ heißt n-dimensionale Mannigfaltigkeit oder kurz n-Mannigfaltigkeit, wenn zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebung $W \subset \mathbb{R}^{n+m}$ und eine differenzierbare Abbildung $f: W \to \mathbb{R}^m$ mit regulärem Wert 0 existiert, so dass*

$$M \cap W = f^{-1}(0). \quad \rtimes$$

Dieser Begriff ist tatsächlich allgemeiner als der der global gleichungsdefinierten Mannigfaltigkeit. Dies ergibt sich daraus, dass – wie wir gleich sehen werden – letztere immer orientierbare sind, erstere jedoch nicht.

So sieht man sofort, dass die Oberfläche eines 2-Torus eine kompakte 2-Mannigfaltigkeit darstellt.

Aufgrund des Niveauflächensatzes 18.12 ist diese lokale Charakterisierung äquivalent zur Existenz einer differenzierbaren Abbildung $\phi: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$, so dass

$$M \cap W = \Gamma(\phi)$$

der Graph von ϕ ist. Für das praktische Arbeiten mit Mannigfaltigkeiten ist allerdings folgende Charakterisierung nützlicher.

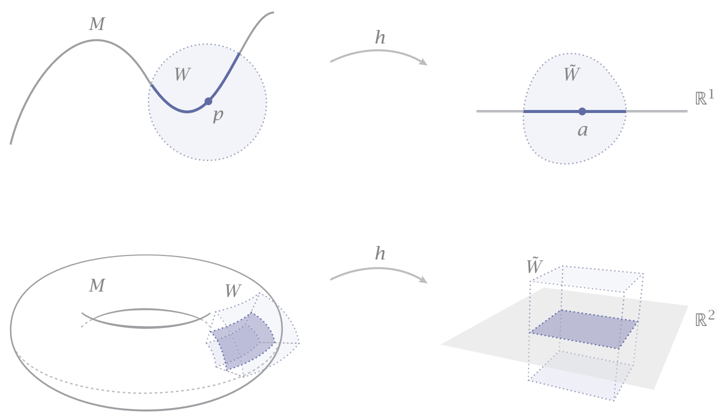
1 **Satz** *Eine nichtleere Teilmenge M des $\mathbb{R}^{n+m}$ ist eine n-Mannigfaltigkeit genau dann, wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebung $W \subset \mathbb{R}^{n+m}$ und einen Diffeomorphismus $h: W \to \mathbb{R}^{n+m}$ gibt, so dass*

$$h(M \cap W) \subset \mathbb{R}^n \times 0^m. \quad \rtimes$$

Man sagt, der Diffeomorphismus h *trivialisert* die Mannigfaltigkeit M um den Punkt p.

⟨⟨⟨⟨⟨ $\Rightarrow$ Nach Umordnung der Koordinaten können wir annehmen, dass sich lokal auf M die letzten m Koordinaten als Funktionen der ersten n Koordi-

Abb 2 Mannigfaltigkeiten mit trivialisierenden Abbildungen



naten schreiben lassen. Es gibt also eine differenzierbare Abbildung

$$\phi : U \to V, \qquad U \times V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

so dass $M \cap W = \Gamma(\phi)$ mit $W = U \times V$. Setzen wir

$$h: U \times V \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \quad (u, v) \mapsto (x, y) = (u, v - \phi(u)),$$

so ist h injektiv und die Jacobimatrix Dh in jedem Punkt regulär. Also ist h ein Diffeomorphismus von W auf eine offene Teilmenge in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ mit der Eigenschaft, dass

$$\begin{aligned} h(M \cap W) &= \{h(u, v) : (u, v) \in \Gamma(\varphi)\} \\ &= \{(x, y) : x \in U,\ y = 0\} \subset \mathbb{R}^n \times 0^m. \end{aligned}$$

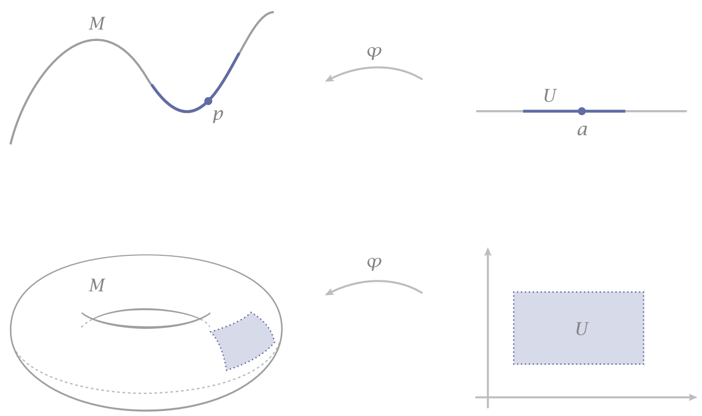
$\Leftarrow$ Sei W eine Umgebung von p und $h\colon W \to \Omega$ ein solcher Diffeomorphismus. Setzen wir

$$f = (h_{n+1}, .., h_{n+m}) : W \to \mathbb{R}^m,$$

so ist f differenzierbar und $f(M \cap W) = 0^m$. Außerdem ist 0^m ein regulärer Wert, da der Rang von Dh in allen Punkten maximal ist. ⟫⟫⟫

Kehren wir die Abbildung h des letzten Satzes um und ignorieren die Koordinaten außerhalb von M, so erhalten wir ein *lokales Koordinatensystem* auf M. Die Existenz solcher Koordinaten ist ebenfalls charakteristisch für eine Mannigfaltigkeit.

Abb 3 Ein- und zweidimensionales Koordinatensystem



2 **Satz** *Eine nichtleere Teilmenge M des $\mathbb{R}^{n+m}$ ist eine n-Mannigfaltigkeit genau dann, wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebung $W \subset \mathbb{R}^{n+m}$, ein Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ und eine differenzierbare Abbildung $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^{n+m}$ mit folgenden Eigenschaften gibt:*

(K-1) φ *ist injektiv mit* $\operatorname{rang} D\varphi \equiv n$,

(K-2) $\varphi(U) = M \cap W$,

(K-3) $\varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to U$ *ist stetig.*

Eine solche Abbildung φ heißt lokales Koordinatensystem oder Karte um den Punkt p. ⋊

⟪⟪⟪ $\Rightarrow$ Eine n-Mannigfaltigkeit M ist lokal um jeden Punkt $p \in M$ der Graph einer Abbildung $\phi\colon U \to V$ wie im vorangehenden Beweis. Dann ist die erweiterte Abbildung

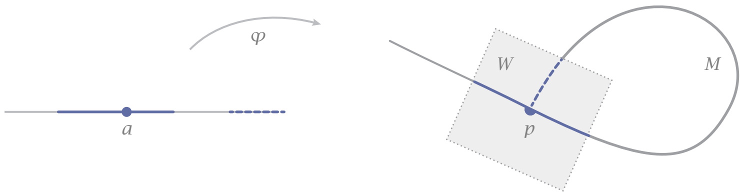
$$\varphi:\ U \to \mathbb{R}^{n+m}, \quad \varphi(u) = (u, \phi(u))$$

offensichtlich ein Koordinatensystem um p.

$\Leftarrow$ Sei nun umgekehrt W eine Umgebung von p und $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^{n+m}$ eine Abbildung mit den Eigenschaften (K-1)–(K-3). Wir können die Koordinaten in $\mathbb{R}^{n+m}$ so umordnen, dass die ersten n Spalten der Jacobimatrix von φ linear unabhängig sind. Damit wird die Abbildung

$$\chi = (\varphi_1, .., \varphi_n)$$

im Punkt $a = \varphi^{-1}(p)$ regulär. Auf einer nötigenfalls etwas kleineren Umgebung U erhalten wir so einen Diffeomorphismus $\chi\colon U \to \tilde{U}$ mit der Eigenschaft, Abb 4 Keine Mannigfaltigkeit



dass

$$\tilde{\varphi} = \varphi \circ \chi^{-1} : \tilde{U} \to W$$

in den ersten n Koordinaten zur Identität wird. Es gilt dann

$$\varphi(U) = \varphi \circ \chi^{-1}(\tilde{U}) = \tilde{\varphi}(\tilde{U}) = \Gamma(\phi),$$

wenn ϕ aus den letzten m Koordinaten von $\tilde{\varphi}$ besteht.

Außerdem existiert eine Umgebung W von p, so dass $\Gamma(\phi) = M \cap W$. Denn andernfalls gäbe es eine Folge (p_k) von Punkten auf M mit $p_k \to p$ und $\varphi^{-1}(p_k) \notin U$. Dann aber ist φ^{-1} im Punkt p nicht stetig, im Widerspruch zu Annahme (k-3). Also ist M eine n-Mannigfaltigkeit. ⟫⟫

Bemerkung Bedingung (k-3) ist erforderlich, um Gebilde wie in Abbildung 4 als Mannigfaltigkeit auszuschließen. Jede Umgebung W von p enthält auch Punkte auf den gestrichelten Ende von M, die gegen p konvergieren. Entlang dieser Folge konvergiert φ^{-1} jedoch nicht gegen $\varphi^{-1}(p)$, ist also unstetig. ⊸

Wir halten noch fest, dass der Wechsel zwischen zwei Koordinatensystemen einen Diffeomorphismus definiert, wenn sich ihre Kartengebiete überlappen.

3 **Lemma** *Sei M eine n-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{n+m}$. Sind*

$$\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^{n+m}, \qquad \alpha = 1, 2,$$

zwei überlappende Koordinatensysteme von M, also die Mengen

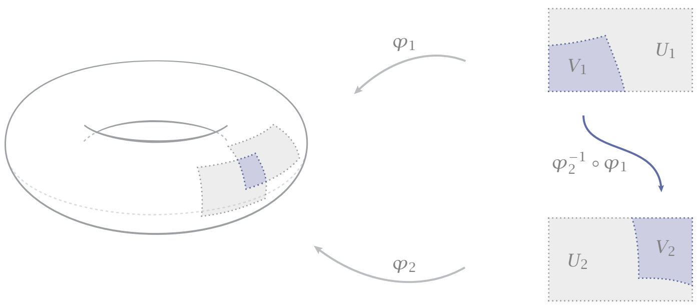
$$V_\alpha = \varphi_\alpha^{-1}(\varphi_1(U_1) \cap \varphi_2(U_2)), \qquad \alpha = 1, 2,$$

nicht leer, so sind die beiden Koordinatenwechsel

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : V_1 \to V_2, \qquad \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2 : V_2 \to V_1,$$

n-dimensionale Diffeomorphismen. ⋊

Abb 5 Koordinatenwechsel



⟨⟨⟨⟨⟨ Die Abbildungen sind auf jeden Fall bijektiv. Mit den Bezeichnungen des Beweises des ersten Satzes ist

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 = \pi_n \circ h_2 \circ \varphi_1 = \pi_n \circ h_2 \circ h_1|_{U_1 \times 0^m},$$

wobei π_n die Projektion auf die ersten n Koordinaten bezeichnet. Also ist

$$\det D(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1) \neq 0.$$

Somit ist $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ ein Diffeomorphismus. — Aus Symmetriegründen gilt Entsprechendes auch für $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Mannigfaltigkeiten mit Rand

Jeder Punkt einer n-Mannigfaltigkeit M ist umgeben von einem n-dimensionalen Kartengebiet. In diesem Sinne ist jeder Punkt von M ein *innerer Punkt* von M und kein *Randpunkt*. Für den Satz von Stokes benötigen wir aber auch *Mannigfaltigkeiten mit Rand.*

Das euklidische Modell hierfür ist der abgeschlossene Halbraum

$$\mathbb{H}^n \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n : x_n \geqslant 0\}.$$

Abb 6 Eindimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand

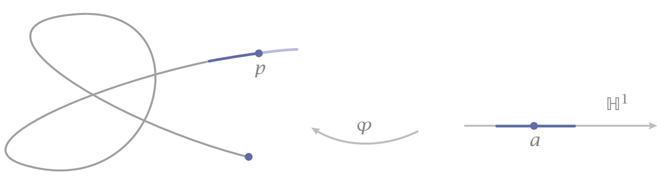
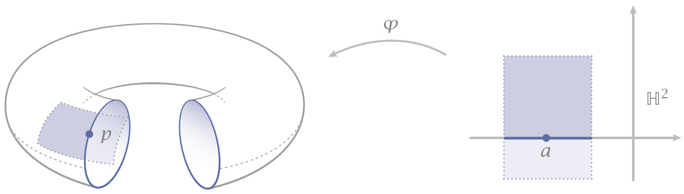


Abb 7 Zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand



Jeder Punkt x in $\mathbb{H}^n$ mit $x_n > 0$ ist ein innerer Punkt von $\mathbb{H}^n$, und der Rand dieses Halbraums ist die Hyperebene

$$\partial\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\} = \mathbb{R}^{n-1} \times 0^1.$$

So ist $\mathbb{H}^1$ das abgeschlossene Intervall $[0, \infty)$, und $\mathbb{H}^2$ die obere abgeschlossene Halbebene.

4 **Definition** *Eine nichtleere Teilmenge M des $\mathbb{R}^{n+m}$ heißt n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand oder kurz berandete n-Mannigfaltigkeit, wenn es zu jedem Punkt $p \in M$ eine Umgebung $W \subset \mathbb{R}^{n+m}$ und einen Diffeomorphismus $h\colon W \to \mathbb{R}^{n+m}$ gibt, so dass entweder*

$$h(M \cap W) \subset \mathbb{R}^n \times 0^m \tag{ι}$$

oder

$$h(M \cap W) \subset \mathbb{H}^n \times 0^m, \qquad h(p) \in \partial\mathbb{H}^n \times 0^m. \tag{δ}$$

Der Rand ∂M von M besteht aus allen Punkten in M mit Eigenschaft (δ). ⋊

Man beachte, dass beide Bedingungen nicht gleichzeitig erfüllt sein können. Denn gäbe es um ein und denselben Punkt p Diffeomorphismen h_ι und h_δ mit den jeweiligen Eigenschaften, so wäre $h_\delta \circ h_\iota^{-1}$ ein Diffeomorphismus, der eine offene Umgebung von $h_\iota(p)$ auf eine nicht-offene Umgebung von $h_\delta(p)$ abbildet, was nicht möglich ist.

▹ A. Jede Mannigfaltigkeit ist auch eine Mannigfaltigkeit mit Rand, ihr Rand ist in diesem Fall leer.

B. Jede abgeschlossene n-dimensionale Kugel im $\mathbb{R}^n$ ist eine kompakte berandete n-Mannigfaltigkeit, ihr Rand ist eine $n-1$-dimensionale Sphäre.

C. Ein Volltorus ist eine kompakte berandete 3-Mannigfaltigkeit, sein Rand ist ein ›hohler‹ 2-dimensionaler Torus. ◃

Achtung Der Mannigfaltigkeiten-Rand ist nicht zu verwechseln mit dem topologischen Rand $_{7.23}$. Ist zum Beispiel D eine abgeschlossene Kreisscheibe im $\mathbb{R}^3$, so ist ihr Mannigfaltigkeiten-Rand eine Kreiskurve, aber ihr topologischer Rand ist ganz D. ⊸

23.2 Vektorfelder, Formen und Orientierung

Ausgehend von der Beschreibung einer Mannigfaltigkeit durch lokale Koordinaten definieren wir nun Konstrukte wie Tangentialräume, Differenzialformen und Orientierungen auf Mannigfaltigkeiten.

▪ Tangentialbündel und Vektorfelder

Sei M eine n-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^{n+m}$ und

$$\varphi: \mathbb{R}^n \supset U \to W \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

ein lokales Koordinatensystem um einen Punkt $p \in M$. Der Tangentialraum im Punkt $a = \varphi^{-1}(p)$ ist der Raum $\mathbb{R}^n$ selbst, den wir uns mit seinem Nullpunkt an den Punkt a angeheftet vorstellen. Die Tangentialabbildung $\varphi_* \coloneqq D\varphi$ bildet diesen in einen Unterraum des $\mathbb{R}^{n+m}$ ab, den wir uns mit seinem Nullpunkt am Punkt p angeheftet vorstellen. Diese Abbildung

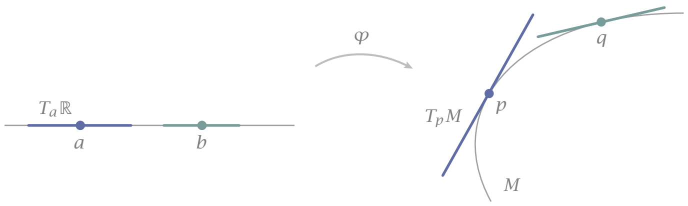
$$\varphi_*: T_a\mathbb{R}^n \to T_p\mathbb{R}^{n+m}, \qquad v \mapsto D\varphi(a)\,v$$

ist injektiv, da $D\varphi$ maximalen Rang hat.

Das Bild $\varphi_*(T_a\mathbb{R}^n)$ ist also ein n-dimensionaler Unterraum von $T_p\mathbb{R}^{n+m}$. Dieser Raum hängt *nicht* von der Wahl der Koordinaten ab. Ist $\tilde\varphi: \tilde U \to W$ ein weiteres Koordinatensystem um p, so ist

$$\chi = \tilde\varphi^{-1} \circ \varphi: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$$

Abb 8 Tangentialräume



23.8

ein lokaler Diffeomorphismus um a 3. Damit ist

$$\varphi = \tilde{\varphi} \circ \chi, \qquad \varphi_* = \tilde{\varphi}_* \circ \chi_*.$$

Da χ_* den Raum $T_a\mathbb{R}^n$ isomorph auf den Raum $T_{\tilde{a}}\mathbb{R}^n$ mit $\tilde{a} = \chi(a)$ abbildet, folgt

$$\varphi_*(T_a\mathbb{R}^n) = \tilde{\varphi}_*(T_{\tilde{a}}\mathbb{R}^n).$$

Somit hängt dieser Raum nicht vom Koordinatensystem ab, und folgende Definition ist gerechtfertigt.

Definition *Sei M eine n-Mannigfaltigkeit. Ist $\varphi: U \to W$ ein Koordinatensystem um $p = \varphi(a) \in M$, so heißt*

$$T_pM \coloneqq \varphi_*(T_a\mathbb{R}^n)$$

der Tangentialraum von M an der Stelle p. Die Vereinigung

$$TM \coloneqq \bigcup_{p \in M} T_pM$$

aller dieser Tangentialräume heißt das Tangentialbündel von M. ⋊

Für gleichungsdefinierte Mannigfaltigkeiten stimmt diese Definition mit der früheren 18.17 überein.

Definition *Ein Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit M ist eine Abbildung*

$$F: \ M \to TM$$

mit der Eigenschaft, dass $F(p) \in T_pM$ für alle $p \in M$. ⋊

Ein Vektorfeld $F: M \to TM$ ordnet also jedem Punkt $p \in M$ einen Vektor im *darüberliegenden* Tangentialraum T_pM zu. Ist

$$\pi: \ TM \to M, \quad T_pM \mapsto p$$

die kanonische Projektion des Tangentialbündels auf den Fußpunkt eines jeden Tangentialraumes, so gilt also

$$\pi \circ F = id_M.$$

Abbildungen dieser Art werden als *Schnitte* in einem Bündel über M bezeichnet.

Ein Vektorfeld F auf M ist nicht notwendigerweise auf einer Umgebung von M erklärt. Somit ist *a priori* nicht klar, wann F differenzierbar heißen soll. Dazu greifen wir auf lokale Koordinatensysteme zurück. — In jedem lokalen Koordinatensystem $\varphi: U \to W$ existiert ein eindeutiges Vektorfeld G auf U mit

$$F \circ \varphi = D\varphi \cdot G.$$

Für dieses Vektorfeld schreibt man auch

$$\varphi^* F \coloneqq D\varphi^{-1} F \circ \varphi : \ U \to TU$$

und nennt es das auf U *zurückgeholte Vektorfeld*. Wir *definieren* dann ein Vektorfeld auf M als *differenzierbar*, wenn es zu jedem Punkt ein Koordinatensystem gibt, in dem das zurückgeholte Vektorfeld im üblichen Sinne differenzierbar ist. Da der Wechsel zwischen verschiedenen Koordinatensystemen differenzierbar ist, hängt diese Definition nicht von deren Wahl ab.

▪ Differenzialformen

Fassen wir den Tangentialraum $T_p M$ als Unterraum von $T_p \mathbb{R}^{n+m}$ auf, so ist der Raum $\Lambda_p^k M$ der alternierenden k-Formen im Punkt p nichts anderes als die Einschränkung dieser k-Formen auf $T_p M$. Das Bündel aller dieser Räume ist

$$\Lambda^k M \coloneqq \bigcup_{p \in M} \Lambda_p^k M.$$

Eine *Differenzialform vom Grad k* oder kurz *k-Form* auf einer Mannigfaltigkeit M ist dann eine Abbildung

$$\omega : \ M \to \Lambda^k M$$

mit der Eigenschaft, dass $\pi \circ \omega = id_M$. Diese können wir darstellen als

$$\omega = \sum_{1 \leqslant \mu_1 < .. < \mu_k \leqslant n+m} \omega_{\mu_1,..,\mu_k} \mathrm{d}x_{\mu_1} \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_{\mu_k},$$

wobei die Komponentenfunktionen $\omega_{\mu_1}, .., \omega_{\mu_k}$ im Allgemeinen nur auf M erklärt sind. Differenzierbarkeit und äußere Ableitung müssen wir daher wieder durch Rückgriff auf lokale Koordinaten erklären.

So heißt ω differenzierbar, wenn es zu jedem Punkt ein Koordinatensystem gibt, in dem die zurückgeholte Form im üblichen Sinne differenzierbar ist. Da der Wechsel zwischen verschiedenen Koordinatensystemen differenzierbar ist, hängt diese Definition nicht von deren Wahl ab. Etwas mehr Sorgfalt erfordert die Definition der äußeren Ableitung.

Satz und Definition *Zu jeder differenzierbaren k-Form ω auf einer Mannigfaltigkeit M existiert genau eine $k+1$-Form $\mathrm{d}\omega$ auf M, so dass*

$$\varphi^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(\varphi^*\omega)$$

in jedem Koordinatensystem φ auf M. Diese Form heißt die äußere Ableitung von ω. ⋊

23.10

⟨⟨⟨⟨⟨ Wir definieren $\mathrm{d}\omega$ durch seine Wirkung auf $k+1$ Tangentialvektoren

$$w_1, .., w_{k+1} \in T_pM.$$

In einem Koordinatensystem φ um $p = \varphi(a)$ gehen diese über in die Vektoren

$$v_\mu = \varphi^* w_\mu \in T_a\mathbb{R}^n, \qquad 1 \leqslant \mu \leqslant k+1.$$

Existierte das äußere Differenzial $\mathrm{d}\omega$ in der üblichen Weise, so wäre nun 22.8

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega(w_1, .., w_{k+1}) &= \mathrm{d}\omega(\varphi_* v_1, .., \varphi_* v_{k+1}) \\ &= (\varphi^* \mathrm{d}\omega)(v_1, .., v_{k+1}) = \mathrm{d}(\varphi^* \omega)(v_1, .., v_{k+1}).\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck existiert aber in jedem Fall, wenn wir ω als differenzierbar voraussetzen. Wir *definieren* also die $k+1$-form $\mathrm{d}\omega$ durch

$$\mathrm{d}\omega(w_1, .., w_{k+1}) \coloneqq \mathrm{d}(\varphi^* \omega)(\varphi^* w_1, .., \varphi^* w_{k+1}).$$

In der üblichen Weise zeigt man, dass dies nicht von der Wahl des Koordinatensystems abhängt. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Orientierung

Für die Integrationstheorie und den Satz von Stokes müssen wir Mannigfaltigkeiten noch mit einer Orientierung versehen. Dazu treffen wir folgende

Vereinbarung *Der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ sei mit der Orientierung der Standardbasis $[e_1, .., e_n]$ sowie dem Standardskalarprodukt $\langle v, w \rangle$ versehen.* ⋊

Einem einzelnen Punkt p einer Mannigfaltigkeit M ordnen wir eine Orientierung zu, indem wir den Tangentialraum T_pM mit einer Orientierung

$$\varrho(p) \coloneqq [v_1, .., v_n]\,(p)$$

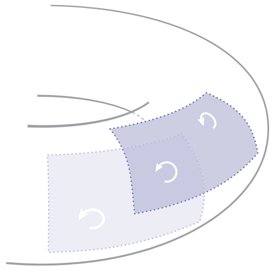
versehen, also eine angeordnete Basis $(v_1, .., v_n)$ von T_pM auswählen. Natürlich ist es nicht sinnvoll, dabei völlig willkürlich vorzugehen. Vielmehr sollte die Wahl dieser Orientierungen in einer konsistenten Weise erfolgen.

Innerhalb *eines* Koordinatensystems φ ist dies kein Problem. Hier nennen wir eine Wahl von Orientierungen konsistent, wenn auf dem gesamten Kartengebiet entweder $\varrho = [\varphi_* e_1, .., \varphi_* e_n]$ oder $\varrho = -[\varphi_* e_1, .., \varphi_* e_n]$ gilt – also *alle* Orientierungen entweder mit der Standardorientierung des $\mathbb{R}^n$ übereinstimmen oder entgegengesetzt sind.

Eine solche konsistente Wahl können wir immer erreichen, indem wir ϱ auf dem Kartengebiet auf eine dieser beiden Weisen einfach *festlegen*. Haben wir aber eine solche Wahl getroffen, so pflanzt sie sich über überlappende Koordinatensysteme hinweg auf ganz M fort. Und dies kann zu Konflikten führen.

Abb 9

Zwei Kartengebiete mit Orientierung



▷ Das *Möbiusband* entsteht, indem man die Enden eines Papierstreifen nach einer halben Drehung zusammenklebt. Beide Seiten des Papierbandes bilden dann eine einzige Fläche. Diese ist *nicht orientierbar*. Denn wählen wir in einem beliebigen Punkt p eine Orientierung, so führt deren stetige Fortsetzung nach einem Umlauf um das Band zur entgegengesetzten Orientierung in p. Eine überall konsistente Wahl von Orientierungen ist daher nicht möglich. ◁

Definition *Eine Mannigfaltigkeit M heißt orientierbar, wenn jedem Punkt eine Orientierung so zugeordnet werden kann, dass sie in jedem lokalen Koordinatensystem konsistent ist. Eine Mannigfaltigkeit mit einer solchen Wahl heißt orientierte Mannigfaltigkeit.* ⋊

▷ Eine gleichungsdefinierte Mannigfaltigkeit $M = f^{-1}(0)$ ist orientierbar. Denn die Gradienten der Komponentenfunktionen,

$$n_k = \nabla f_k, \qquad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

bilden eine stetige Familie von Normalenvektoren an M und fixieren damit eine konsistente Orientierung $[n_1, .., n_m]$ des Normalenbündels $T^{\perp}M$. Dies induziert eine konsistente Orientierung $[v_1, .., v_n]$ des Tangentialbündels, indem wir fordern, dass

$$[v_1, .., v_n, n_1, .., n_m] = [e_1, .., e_{n+m}]. \quad ◁$$

Abb 10

Das Möbiusband

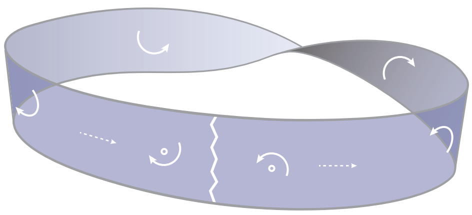
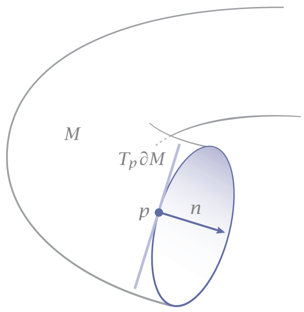


Abb 11

Tangentialraum und äußere Normale an einem Randpunkt



▪ Mannigfaltigkeiten mit Rand

Unsere Definitionen von Tangentialraum, Vektorfeldern und Differenzialformen übertragen sich ohne große Mühe auf Mannigfaltigkeiten mit Rand. Bei der Orientierung ergibt sich dabei ein zusätzlicher Aspekt.

Sei M eine n-Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist ∂M eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n-1$, denn in jedem Koordinatensystem um einen Randpunkt p von M ist er das Bild eines Teils von $\partial \mathbb{H}^n$. Für die Tangentialräume gilt daher

$$T_p(\partial M) \subset T_p M.$$

Genauer ist $T_p(\partial M)$ ein linearer Unterraum von T_pM der Kodimension 1. Somit ist $T_p^{\perp}(\partial M) \cap T_pM$ ein eindimensionaler Unterraum, und es existieren genau zwei normierte Tangentialvektoren, die senkrecht auf der Randmannigfaltigkeit stehen. Von diesen zeigt genau einer nach *außen*. In einem Koordinatensystem φ um den Randpunkt p ist dies gleichbedeutend damit, dass die letzte Komponente des zurückgeholten Normalenvektors $\varphi^* n(p)$ negativ ist. Diese Charakterisierung ist koordinatenunabhängig, denn jedes Koordinatensystem um einen Randpunkt bildet sowohl $\partial \mathbb{H}^n$ als auch $\mathbb{H}^n$ in sich ab.

Abb 12

Induzierte Orientierung des Randes

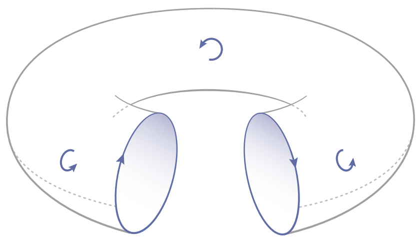
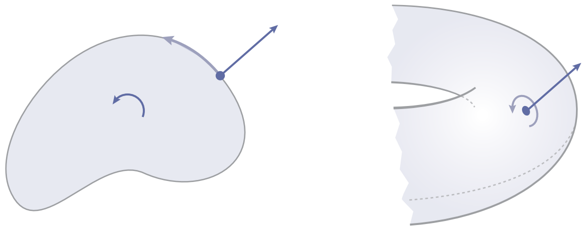


Abb 13

Induzierte Orientierung des Randes einer Fläche und des Volltorus



Satz und Definition *Ist M eine Mannigfaltigkeit mit Rand, so existiert in jedem Randpunkt p von M ein eindeutiger auswärts gerichteter Normaleneinheitsvektor $n(p)$, kurz äußere Normale genannt.* ⋊

Mithilfe der äußeren Normalen können wir auf einer *orientierten* Mannigfaltigkeit mit Rand eine eindeutige *induzierte Orientierung* des Randes erklären.

Satz und Definition *Sei M eine orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand. Dann ist auch der Rand ∂M eine orientierte Mannigfaltigkeit, und die induzierte Orientierung $\partial\varrho$ im Punkt $p \in \partial M$ ist gegeben durch*

$$(\partial\varrho)(p) = [v_1, .., v_{n-1}]$$

mit denjenigen Basen $(v_1, .., v_{n-1})$ von $T_p\partial M$, für die

$$[n, v_1, .., v_{n-1}](p) = \varrho(p). \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Damit diese Festlegung sinnvoll ist, müssen wir zeigen, dass verschiedene Basen von $T_p\partial M$ mit dieser Eigenschaft gleichorientiert sind. Seien also $(v_1, .., v_{n-1})$ und $(w_1, .., w_{n-1})$ zwei Basen von $T_p\partial M$ mit

$$[n, v_1, .., v_{n-1}] = [n, w_1, .., w_{n-1}].$$

Ein Basiswechsel zwischen diesen beiden Basen ist eine lineare Transformation T mit $\det T > 0$ und $Tn = n$. Also hat T die Blockmatrixdarstellung

$$T = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & A \end{pmatrix}$$

mit einer $(n-1) \times (n-1)$-Matrix A. Also ist auch $\det A > 0$ und somit

$$[v_1, .., v_{n-1}] = [w_1, .., w_{n-1}]. \quad ⟩⟩⟩⟩⟩$$

Bemerkung Die Bedingung an den Vektor n ist so gewählt, dass der Rand einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit in der Ebene *positiv*, und die Oberfläche einer Kugel, von außen gesehen, wie die euklidische Ebene orientiert ist Abb 13. ⊸

23.14

23.3 Der Satz von Stokes

Nun geht es um das Integral einer n-Form ω über eine n-Mannigfaltigkeit M. Dabei betrachten wir zuerst den Fall, dass der Träger von ω ganz in einem n-Würfel c enthalten ist, der sich durch Einschränkung eines Koordinatensystem φ auf den Standardwürfel ergibt, also durch

$$c = \varphi|_{\mathbb{I}^n}$$

gegeben ist. Dies ist keine wesentliche Einschränkung, da sich jedes Koordinatensystem durch Verschieben und Strecken der Koordinaten in ein Koordinatensystem $\varphi\colon U \to W$ mit $U \supset \mathbb{I}^n$ überführen lässt. Ist M orientierbar, so heißt c *orientierungserhaltend*, wenn es φ ist. Nur solche Würfel wollen wir im Folgenden betrachten und definieren hierfür

$$\int_M \omega := \int_c \omega = \int_{\mathbb{I}^n} c^*\omega = \int_{\mathbb{I}^n} \varphi^*\omega.$$

Diese Definition ist gerechtfertigt, denn das Integral hängt nicht vom Koordinatensystem ab.

Lemma *Sei ω eine n-Form auf der orientierten n-Mannigfaltigkeit M. Sind c_1 und c_2 zwei orientierungserhaltende n-Würfel in M und*

$$\operatorname{supp}\omega \subset c_1(\mathbb{I}^n) \cap c_2(\mathbb{I}^n),$$

so gilt

$$\int_{c_1} \omega = \int_{c_2} \omega. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $V_\alpha = c_\alpha^{-1}(\operatorname{supp}\omega)$ für $\alpha = 1, 2$. Dann ist

$$\chi := c_2^{-1} \circ c_1 : V_1 \to V_2$$

ein Diffeomorphismus 3 mit $c_1 = c_2 \circ \chi$, und es gilt

$$\int_{c_1} \omega = \int_{\mathbb{I}^n} c_1^*\omega = \int_{V_1} c_1^*\omega = \int_{V_1} \chi^* c_2^*\omega.$$

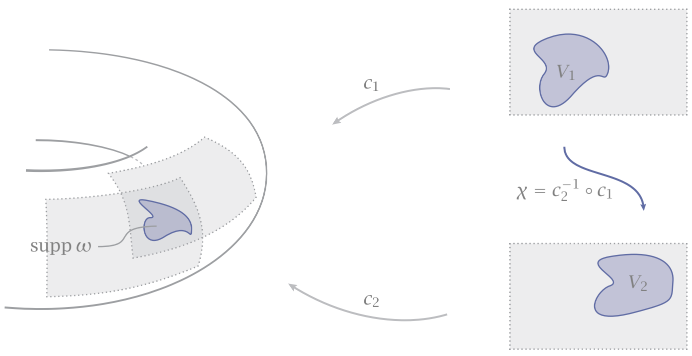
Hierbei ist $c_2^*\omega = f\,\mathrm{d}x_1 \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_n$ mit einer Funktion f auf V_2 und 22.6

$$\chi^*(f\,\mathrm{d}x_1 \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_n) = (f \circ \chi)(\det D\chi)\mathrm{d}x_1 \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_n.$$

Da der Koordinatenwechsel χ die Orientierung erhält, gilt

$$\det D\chi = |\det D\chi| > 0.$$

Abb 14 Träger von ω in zwei Kartengebieten



Mit $\chi(V_1) = V_2$ und der Transformationsformel $_{21.13}$ folgt daher weiter

$$\begin{aligned}\int_{V_1} \chi^* c_2^* \omega &= \int_{V_1} \chi^*(f \, \mathrm{d}x_1 \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_n) \\ &= \int_{V_1} (f \circ \chi) \, |\det D\chi| \, \mathrm{d}\lambda_n \\ &= \int_{V_2} f \, \mathrm{d}\lambda_n = \int_{\mathbb{I}^n} c_2^* \omega = \int_{c_2} \omega. \qquad \rangle\rangle\rangle\rangle\rangle \end{aligned}$$

Der allgemeine Fall

Im Allgemeinen wird der Träger einer Form nicht in einem einzigen Koordinatensystem enthalten sein – sonst wäre der ganze Aufwand mit den Mannigfaltigkeiten nicht nötig. Diesen Fall behandeln wir mithilfe einer Zerlegung der Eins. Dabei betrachten wir nur solche Zerlegungen $\mathcal{T}$, wo der Träger jeder Zerlegungsfunktion $\tau \in \mathcal{T}$ ganz im Bild eines n-Würfels enthalten ist. Dies lässt sich immer erreichen, indem man die Zerlegung der Eins einer Überdeckung von M durch Kartengebiete unterordnet.

Definition und Satz *Sei $\mathcal{T}$ eine Zerlegung der Eins auf M so, dass für jedes $\tau \in \mathcal{T}$ ein n-Würfel $c \colon \mathbb{I}^n \to M$ existiert mit*

$$\operatorname{supp} \tau \subset c(\mathbb{I}^n).$$

Für eine n-Form ω auf M sei dann

$$\int_M \omega := \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \int_M \tau\omega,$$

falls diese Reihe konvergiert. Dieses Integral ist unabhängig von $\mathcal{T}$. ⋊

23.16

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $\mathcal{S}$ eine zweite Zerlegung der Eins auf M mit der geforderten Träger-Eigenschaft. Da der Träger jeder Zerlegungsfunktion kompakt und jede Zerlegung lokal endlich ist, sind für jedes $\tau \in \mathcal{T}$ und jedes $\sigma \in \mathcal{S}$ auch die Mengen

$$\mathcal{S}_\tau = \{\sigma \in \mathcal{S} : \sigma\tau \not\equiv 0\}, \qquad \mathcal{T}_\sigma = \{\tau \in \mathcal{T} : \tau\sigma \not\equiv 0\}$$

endlich $_{21.7}$. Daher gilt

$$\tau = \tau \sum_{\sigma\in\mathcal{S}} \sigma = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_\tau} \tau\sigma, \qquad \sigma = \sigma \sum_{\tau\in\mathcal{T}} \tau = \sum_{\tau\in\mathcal{T}_\sigma} \sigma\tau,$$

wobei jede Summe endlich ist. Folglich gilt auch

$$\begin{aligned}\sum_{\tau\in\mathcal{T}} \int_M \tau\omega &= \sum_{\tau\in\mathcal{T}} \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_\tau} \int_M \tau\sigma\omega \\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}} \sum_{\tau\in\mathcal{T}_\sigma} \int_M \sigma\tau\omega = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}} \int_M \sigma\omega.\end{aligned}$$ ⟩⟩⟩⟩⟩

Genau dieselben Definitionen gelten auch für Mannigfaltigkeiten mit Rand. Dabei ergeben sich keine neuen Schwierigkeiten. Wir sind daher jetzt in der Lage, den Satz von Stokes auf Mannigfaltigkeiten zu formulieren und zu beweisen.

5 **Allgemeiner Satz von Stokes** *Sei M eine kompakte, orientierte, n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand. Für eine $n-1$-Form ω auf M gilt dann*

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega,$$

wobei ∂M mit der von M induzierten Orientierung versehen ist. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Der Beweis erfolgt in drei Schritten – zwei Spezialfälle innerhalb eines Koordinatensystems und der allgemeine Fall mit einer Zerlegung der Eins.

1. Fall Es gilt $\operatorname{supp}\omega \subset c(\mathbb{I}^n)$ mit einem orientierungserhaltenden n-Würfel c in $M \setminus \partial M$. Aufgrund der Rechenregeln für die äußere Ableitung $_{22.8}$ und des Fundamentalsatzes im $\mathbb{R}^n$ $_{22.10}$ gilt dann

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_c \mathrm{d}\omega = \int_{\mathbb{I}^n} c^*(\mathrm{d}\omega) = \int_{\mathbb{I}^n} \mathrm{d}(c^*\omega) = \int_{\partial\mathbb{I}^n} c^*\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Da ω auf dem Rand von c verschwindet, ist also

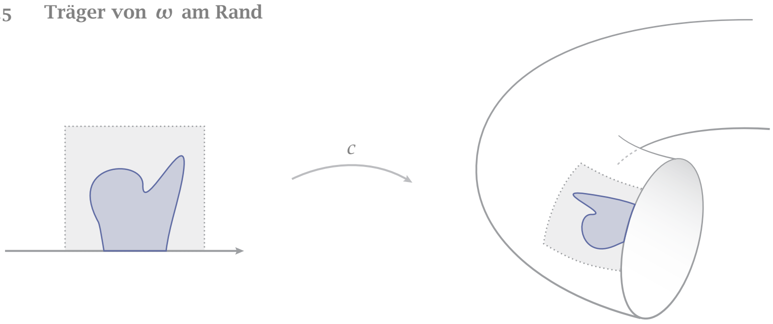
$$\int_M \mathrm{d}\omega = 0.$$

Wegen $\operatorname{supp}\omega \subset M \setminus \partial M$ gilt andererseits ebenfalls

$$\int_{\partial M} \omega = 0.$$

Also sind beide Integrale gleich, nämlich Null, und die Behauptung ist in diesem Fall bewiesen.

Abb 15 Träger von ω am Rand



2. Fall Es gilt $\operatorname{supp}\omega \subset c(\mathbb{I}^n)$ mit einem orientierungserhaltenden n-Würfel c in M, wobei c genau eine Seite mit ∂M gemeinsam hat. In einem in einer Umgebung von $\mathbb{I}^n$ definierten Koordinatensystem von ∂M sei dies die $(n,0)$-Seite. Wir nehmen also an, dass $c_{n,0} \subset \partial M$, während alle übrigen Seiten keine inneren Punkt mit ∂M gemeinsam haben.

Da c die Orientierung von M erhält, ist

$$\varrho_M = [\partial_1 c, .., \partial_n c].$$

Die $(n,0)$-Seite von c ist

$$\check{c} \coloneqq c \circ I^n_{n,0} = c\,\Big|_{x_n=0}.$$

Somit ist $\partial_k \check{c} = \partial_k c$ für $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Außerdem weist die äußere Normale von M im Bereich dieses Würfels in die Richtung von $-\partial_n c$, da die Punkte mit $0 \leqslant x_n \leqslant 1$ *innerhalb* von M liegen. Also gilt für die Orientierung des Randes

$$\begin{aligned}\varrho_{\partial M} &= [n, \partial_1 \check{c}, .., \partial_{n-1} \check{c}] \\ &= -[\partial_n c, \partial_1 c, .., \partial_{n-1} c] \\ &= -(-1)^{n-1}[\partial_1 c, .., \partial_n c] \\ &= (-1)^n \varrho_M.\end{aligned}$$

Also ist aufgrund des Fundamentalsatzes im $\mathbb{R}^n$ 22.10

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_c \mathrm{d}\omega = (-1)^n \int_{\partial c} \omega.$$

Nun ist aber $\check{c}$ die einzige Seite von c, auf der ω nicht verschwindet. Ferner ist $\check{c}$ ein $n-1$-Würfel in ∂M, der den Träger von ω innerhalb von ∂M enthält. Also gilt weiter

$$\int_{\partial c} \omega = (-1)^n \int_{c_{n,0}} \omega = (-1)^n \int_{\partial M} \omega.$$

Die letzten beiden Identitäten ergaben damit die Behauptung auch in diesem Fall.

23.18

3. Fall Betrachte nun den allgemeinen Fall. Wähle dazu eine Zerlegung der Eins $\mathcal{T}$ auf M so, dass für jedes $\tau \in \mathcal{T}$ auf $\tau\omega$ der erste oder zweite Fall zutrifft. Da M kompakt ist, kann diese Zerlegung sogar endlich gewählt werden $_{21.7}$. Für die konstante Funktion 1 gilt dann

$$0 = \mathrm{d}(1) = \mathrm{d} \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \tau = \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \mathrm{d}\tau,$$

wobei die Summe endlich ist. Also gilt auch

$$\sum_{\tau \in \mathcal{T}} \mathrm{d}\tau \wedge \omega = 0.$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_M \mathrm{d}\omega &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \int_M \tau \, \mathrm{d}\omega \\ &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \int_M (\mathrm{d}\tau \wedge \omega + \tau \, \mathrm{d}\omega) \\ &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \int_M \mathrm{d}(\tau\omega) \\ &= \sum_{\tau \in \mathcal{T}} \int_{\partial M} \tau\omega \\ &= \int_{\partial M} \omega. \end{aligned}$$

That's it. ⟩⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Der Satz von Stokes ist falsch für *nicht kompakte* Mannigfaltigkeit mit Rand. Denn in diesem Fall ist auch $M \setminus \partial M$ eine Mannigfaltigkeit mit Rand, nur ist der Rand hier die leere Menge. Es ist also in jedem Fall

$$\int_{\partial M} \omega = 0.$$

Es gibt aber $n-1$-Formen ω auf M mit

$$\int_M \mathrm{d}\omega \neq 0.$$

Auf nicht kompakten Mannigfaltigkeit gilt der Satz vielmehr mit der zusätzlichen Annahme, dass $\operatorname{supp} \omega$ kompakt ist. Der Beweis bleibt derselbe. ⊸

Die Sätze von Gauss und Stokes

Für zwei- und dreidimensionale Mannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^3$ ergibt der Satz von Stokes die klassischen Integralsätze der Vektoranalysis. Dafür definieren wir das *vektorielle Linienelement*

$$\mathrm{d}\vec{s} \coloneqq (\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \mathrm{d}x_3)^\top$$

und das *vektorielle Flächenelement*

$$\mathrm{d}\vec{A} \coloneqq (\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3, \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2)^\top.$$

Das *Volumenelement* ist nach wie vor $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$.

Außerdem erinnern wir an die Definition des Nablaoperators. Sind die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}$ und das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ differenzierbar, so heißen

$$\begin{aligned} \nabla f &\coloneqq \operatorname{grad} f &&\coloneqq (\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f)^\top, \\ \nabla \bullet F &\coloneqq \operatorname{div} F &&\coloneqq \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \partial_3 F_3, \\ \nabla \times F &\coloneqq \operatorname{rot} F &&\coloneqq (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)^\top \end{aligned}$$

der *Gradient* von f sowie die *Divergenz* und *Rotation* von F.

Lemma *Für differenzierbares $f : \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}$ und $F : \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ gilt*

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f &= \operatorname{grad} f \bullet \mathrm{d}\vec{s}, \\ \mathrm{d}(F \bullet \mathrm{d}\vec{s}) &= \operatorname{rot} F \bullet \mathrm{d}\vec{A}, \\ \mathrm{d}(F \bullet \mathrm{d}\vec{A}) &= \operatorname{div} F \,\mathrm{d}V. \end{aligned}$$

Außerdem gilt immer

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla f &= \operatorname{rot} \operatorname{grad} f &&= 0, \\ \nabla \bullet (\nabla \times F) &= \operatorname{div} \operatorname{rot} F &&= 0. \end{aligned} \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨ Die erste Identität ist offensichtlich. Die zweite ergibt sich mit

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}(F_1\,\mathrm{d}x_1 + F_2\,\mathrm{d}x_2 + F_3\,\mathrm{d}x_3) \\ &\quad = \partial_2 F_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_1 + \partial_3 F_1\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \\ &\qquad + \partial_1 F_2\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 + \partial_3 F_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_2 \\ &\qquad + \partial_1 F_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + \partial_2 F_3\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \\ &\quad = (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2)\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + (\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3)\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 \\ &\qquad + (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2. \end{aligned}$$

Und die dritte folgt mit

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(F_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + F_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + F_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2)\\
&\quad = \partial_1 F_1\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + \textit{zyklische Vertauschungen}\\
&\quad = (\partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \partial_3 F_3)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3.
\end{aligned}$$

Mit diesen Identitäten und $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$ folgt schließlich

$$\begin{aligned}
0 &= \mathrm{d}^2 f &&= \mathrm{d}(\operatorname{grad} f \bullet \mathrm{d}\vec{s}) &&= \operatorname{rot}\operatorname{grad} f \bullet \mathrm{d}\vec{A},\\
0 &= \mathrm{d}^2(F \bullet \mathrm{d}\vec{s}) &&= \mathrm{d}(\operatorname{rot} F \bullet \mathrm{d}\vec{A}) &&= \operatorname{div}\operatorname{rot} F \bullet \mathrm{d}V.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir die folgenden Sätze der Vektoranalysis. Der Satz von Gauss wird auch *Divergenzsatz* genannt.

6 **Satz von Gauss** *Sei M^3 eine kompakte orientierte 3-Mannigfaltigkeit mit Rand. Ist das Vektorfeld F in einer Umgebung von M^3 differenzierbar, so gilt*

$$\int_{\partial M^3} F \bullet \mathrm{d}\vec{A} = \int_{M^3} \mathrm{d}(F \bullet \mathrm{d}\vec{A}) = \int_{M^3} \operatorname{div} F\,\mathrm{d}V. \quad \rtimes$$

7 **Satz von Stokes** *Sei M^2 eine kompakte orientierte 2-Mannigfaltigkeit mit Rand. Ist das Vektorfeld F in einer Umgebung von M^2 differenzierbar, so gilt*

$$\int_{\partial M^2} F \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \int_{M^2} \mathrm{d}(F \bullet \mathrm{d}\vec{s}) = \int_{M^2} \operatorname{rot} F \bullet \mathrm{d}\vec{A}. \quad \rtimes$$

Der Fundamentalsatz für Wegintegrale gehört ebenfalls dazu.

Satz von Fund *Sei M^1 eine kompakte orientierte 1-Mannigfaltigkeit mit Rand. Ist die Funktion f in einer Umgebung von M^1 differenzierbar, so gilt*

$$\int_{\partial M^1} f = \int_{M^1} \mathrm{d}f = \int_{M^1} \operatorname{grad} f \bullet \mathrm{d}\vec{s}. \quad \rtimes$$

23.4 Das Volumenelement

Um die Integralsätze in klassischer Form zu notieren, benötigen wir noch das skalare Linien-, Flächen- und Volumenelement. Zunächst der Standardraum.

Lemma *Im euklidischen n-Raum gibt es genau eine alternierende n-Form ω, das Volumenelement, so dass*

$$\omega(v_1, .., v_n) = 1$$

für jede positiv orientierte Orthonormalbasis $v_1, .., v_n$. $\rtimes$

23.21

⟨⟨⟨⟨⟨ Ist $v_1, .., v_n$ irgendeine positiv orientierte Orthonormalbasis, so gibt es genau eine n-Form ω mit $\omega(v_1, .., v_n) = 1$, denn $\Lambda^n \mathbb{R}^n$ ist eindimensional. Ist $w_1, .., w_n$ eine weitere positiv orientierte Orthonormalbasis, so ist der Basiswechsel T mit $Tv_\mu = w_\mu$ für $1 \leqslant \mu \leqslant n$ eine orientierungserhaltende, *orthogonale* Transformation. Also ist $\det T = 1$, und deshalb 22.4

$$\begin{aligned}\omega(w_1, .., w_n) &= \omega(T_* v_1, .., T_* v_n) \\ &= T^* \omega(v_1, .., v_n) \\ &= (\det T)\, \omega(v_1, .., v_n) = 1.\end{aligned}$$

Also gibt es nur eine solche Form ω. ⟩⟩⟩⟩⟩

Ist M eine orientierte n-Mannigfaltigkeit, so ist jeder Tangentialraum ein orientierter n-dimensionaler Untervektorraum des Umgebungsraumes. Somit existiert in jedem Punkt p ein eindeutiges Volumenelement $\omega(p)$. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass dies eine *differenzierbare* n-Form auf M definiert.

Definition *Die auf diese Weise auf einer orientierten Mannigfaltigkeit M definierte n-Form heißt das Volumenelement auf M und wird mit $\mathrm{d}V$ bezeichnet. Die reelle Zahl*

$$|M| \coloneqq \int_M \mathrm{d}V$$

heißt das Volumen von M. ⋊

Bemerkung Die Bezeichnung $\mathrm{d}V$ bedeutet *nicht*, dass es sich um das Differenzial einer Funktion handelt. Es ist nur eine historisch bedingte Schreibweise. ⊸

▷ Auf einer n-Mannigfaltigkeit M im $\mathbb{R}^n$, also einem Gebiet im $\mathbb{R}^n$, ist

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x_1 \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_n$$

und

$$|M| = \int_M \mathrm{d}V = \int_M 1$$

das klassische Volumen von M, wenn dieses Integral endlich ist. ◁

Im eindimensionalen Fall bezeichnet man dieses Volumenelement auch als *Linienelement* $\mathrm{d}s$, im zweidimensionalen Fall als *Flächenelement* $\mathrm{d}A$, und reserviert $\mathrm{d}V$ für das dreidimensionale Volumenelement. Diese haben eine einfache geometrische Interpretation,.

8 **Lemma** *Sind u, v, w positiv orientierte Tangentialvektoren an eine orientierte 1-, 2- respektive 3-Mannigfaltigkeit, so ist*

(i) $\mathrm{d}s(u)$ *die Länge des Vektors* u*,*
(ii) $\mathrm{d}A(u,v)$ *der Flächeninhalt des Parallelogramms mit Seiten* u,v*,*
(iii) $\mathrm{d}V(u,v,w)$ *das Volumen des Spates mit Seiten* u,v,w*.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Wir zeigen (ii). Wir können in T_pM eine Orthonormalbasis e_1, e_2 so wählen, dass $u = \lambda e_1$ mit $\lambda > 0$ und $v = \mu e_2 + \nu e_1$. Dann ist $\mu > 0$, da u und v positiv orientiert sind, und

$$\mathrm{d}A(u,v) = \mathrm{d}A(\lambda e_1, \mu e_2) = \lambda\mu\,\mathrm{d}A(e_1,e_2) = \lambda\mu.$$

Dies ist gerade der Flächeninhalt des Parallelogramms mit den Seiten u und v. ⟩⟩⟩⟩⟩

■ Das Linien- und das Flächenelement

Wir beschreiben das Linien- und das Flächenelement noch etwas genauer.

9 **Satz** *Sei* M *eine orientierte 1-Mannigfaltigkeit im* $\mathbb{R}^n$*. Mit dem Tangenteneinheitsvektor* T *an* M *gilt dann*

$$\mathrm{d}s = T_1\,\mathrm{d}x_1 + \,..\, + T_n\,\mathrm{d}x_n,$$

sowie auf TM

$$T_\nu\,\mathrm{d}s = \mathrm{d}x_\nu, \qquad 1 \leqslant \nu \leqslant n. \qquad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Ist $v \in T_pM$ positiv orientiert, so ist $T = v/\|v\|$ und 8

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s(v) = \|v\| = \langle T, v\rangle &= T_1v_1 + \,..\, + T_nv_n \\ &= (T_1\,\mathrm{d}x_1 + \,..\, + T_n\,\mathrm{d}x_n)(v).\end{aligned}$$

Dies ergibt die erste Identität. Die zweite Identität muss nur für den Vektor T verifiziert werden, da er in jedem Punkt den Tangentialraum aufspannt. Mit $\mathrm{d}s(T) = 1$ ergibt sich dies aus

$$T_\nu\,\mathrm{d}s(T) = T_\nu = \mathrm{d}x_\nu(T). \qquad ⟩⟩⟩⟩⟩$$

Nun zum Flächenelement. Sei M eine orientierte 2-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$. Auch wenn diese nicht als Rand einer 3-Mannigfaltigkeit auftritt, können wir ihr eine eindeutige ›äußere‹ Normale wie folgt zuordnen.

Seien $v,w \in T_pM$ positiv orientiert. Dann steht der Vektor $v \times w$ senkrecht auf T_pM, und n sei derjenige Einheitsvektor in dieser Richtung mit

$$[n,v,w] = [e_1,e_2,e_3].$$

In diesem Fall bilden n,v,w ein *rechtshändiges Dreibein:* die Vektoren n,v,w weisen, in dieser Reihenfolge, in dieselben Richtungen wie die ausgestreckten

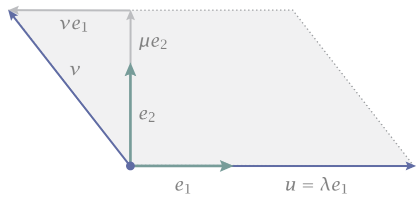


Abb 16
Zum Flächenelement

Daumen, Zeige- und Mittelfinger der rechten Hand. Es ist nicht schwer zu verifizieren, dass diese ›äußere‹ Normale wohldefiniert ist und differenzierbar vom Punkt p abhängt A-2.

Bemerkung Es gilt auch die Umkehrung. Können wir auf einer Hyperfläche M im $\mathbb{R}^3$ eine differenzierbare Normalenfunktion $n\colon M \to \mathbb{S}^2$ erklären, so ist M orientierbar A-3. Die Nichtorientierbarkeit des Möbiusbandes ist daher gleichbedeutend mit der Unmöglichkeit, dort eine stetige Normalenfunktion zu definieren — denn beide Seiten des Bandes gehören zur selben Fläche. ⊸

10 **Satz** *Sei M eine orientierte 2-Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$. Mit der nach außen gerichteten Einheitsnormalen n an M gilt*

$$\mathrm{d}A = n_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + n_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + n_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2.$$

Ferner gelten auf TM die Identitäten

$$n_1\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3, \quad n_2\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1, \quad n_3\,\mathrm{d}A = \mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2. \qquad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Sind $v, w \in T_pM$ positiv orientiert, so ist 8

$$\mathrm{d}A(v,w) = \|v \times w\|,$$

denn die Länge des Kreuzproduktvektors entspricht dem Inhalt des von v, w aufgespannten Parallelogramms. Aufgrund der Definition von n gilt außerdem

$$v \times w = n\,\|v \times w\|.$$

Also ist

$$\mathrm{d}A(v,w) = \langle n, v \times w\rangle = \begin{vmatrix} n_1 & v_1 & w_1 \\ n_2 & v_2 & w_2 \\ n_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

$$= (n_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + n_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + n_3\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2)(v,w).$$

Dies ist die erste Identität. Außerdem folgt für einen Vektor $u \in \mathbb{R}^3$

$$\langle u, v \times w\rangle = \langle u, n\rangle\,\|v \times w\| = \langle u, n\rangle\,\mathrm{d}A(v,w).$$

Wählen wir für u die Basisvektoren e_1, e_2, e_3, so erhalten wir

$$(\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3)(v, w) = n_1 \,\mathrm{d}A(v, w)$$

sowie die entsprechenden zyklischen Vertauschungen hiervon, also die zweiten Gleichungen. ⟫⟫⟫

Bemerkung Die zweiten Gleichungen in diesem Satz gelten nur auf TM, also bei Anwendung auf Tangentialvektoren an M. Im Gesamtraum $\mathbb{R}^3$ gelten sie im Allgemeinen *nicht*. Entsprechendes gilt auch für das Linienelement. ⊸

23.5 Die klassischen Sätze

Wir stellen die Sätze von Gauss und Stokes jetzt mit den skalaren Linien- und Flächenelementen dar. Die Verbindung zu den vektoriellen Elementen stellt das folgende Lemma her.

Lemma *Sei $F : \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$F \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \langle F, T \rangle \,\mathrm{d}s$$

auf einer Kurve mit positiv orientiertem Tangenteneinheitsvektor T, und

$$F \bullet \mathrm{d}\vec{A} = \langle F, n \rangle \,\mathrm{d}A$$

auf einer Fläche mit positiv orientierter Normalen n. ⋊

⟪⟪⟪ Auf dem Tangentialraum einer Kurve ist 9 $T_v \,\mathrm{d}s = \mathrm{d}x_v$ und deshalb

$$F \bullet \mathrm{d}\vec{s} = F_1 T_1 \,\mathrm{d}s + F_2 T_2 \,\mathrm{d}s + F_3 T_3 \,\mathrm{d}s = \langle F, T \rangle \,\mathrm{d}s.$$

Auf dem Tangentialraum einer Fläche ist 10 $\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 = n_1 \,\mathrm{d}A$ etc und damit

$$F \bullet \mathrm{d}\vec{A} = F_1 n_1 \,\mathrm{d}A + F_2 n_2 \,\mathrm{d}A + F_3 n_3 \,\mathrm{d}A = \langle F, n \rangle \,\mathrm{d}A.$$ ⟫⟫⟫

Damit erhalten die Integralsätze die folgende Formulierung.

11 **Satz von Gauss** *Sei M^3 eine kompakte orientierte 3-Mannigfaltigkeit mit Rand. Ist das Vektorfeld F in einer Umgebung von M^3 differenzierbar, so gilt*

$$\int_{\partial M^3} \langle F, n \rangle \,\mathrm{d}A = \int_{M^3} \nabla \bullet F \,\mathrm{d}V,$$

wobei n die äußere Normale an M^3 bezeichnet. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Denn $\langle F, n\rangle \,\mathrm{d}A = F \bullet \mathrm{d}\vec{A}$ und

$$\mathrm{d}(F \bullet \mathrm{d}\vec{A}) = \operatorname{div} F \,\mathrm{d}V = \nabla \bullet F \,\mathrm{d}V. \qquad ⟩⟩⟩⟩⟩$$

12 **Satz von Stokes** *Sei M^2 eine kompakte orientierte 2-Mannigfaltigkeit mit Rand. Ist das Vektorfeld F in einer Umgebung von M^2 differenzierbar, so gilt*

$$\int_{\partial M^2} \langle F, T\rangle \,\mathrm{d}s = \int_{M^2} \langle \nabla \times F, n\rangle \,\mathrm{d}A,$$

wobei n die äußere Normale an M^2 und T den Tangenteneinheitsvektor an ∂M^2 bezeichnet, die durch die Orientierung von M^2 bestimmt sind. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Denn $\langle F, T\rangle \,\mathrm{d}s = F \bullet \mathrm{d}\vec{s}$ und

$$\mathrm{d}(F \bullet \mathrm{d}\vec{s}) = \nabla \times F \,\mathrm{d}\vec{A} = \langle \nabla \times F, n\rangle \,\mathrm{d}A. \qquad ⟩⟩⟩⟩⟩$$

▪ Die Formeln von Green

Ist das Vektorfeld F der Gradient einer Funktion f, so ist im Satz von Gauß das Volumenintegral über $\operatorname{div}\operatorname{grad} f$ zu bilden, was wegen

$$\nabla \bullet \nabla = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 =: \Delta$$

nichts anderes ist als die Anwendung des *Laplaceoperators* Δ auf f, also

$$\Delta f = \partial_1^2 f + \partial_2^2 f + \partial_3^2 f.$$

Korollar *Ist die Funktion f in einer Umgebung von M^3 differenzierbar, so gilt*

$$\int_{M^3} \Delta f \,\mathrm{d}V = \int_{\partial M^3} \langle \nabla f, n\rangle \,\mathrm{d}A. \qquad ⋊$$

Das Skalarprodukt im Oberflächenintegral ist die Richtungsableitung von f in Richtung der äußeren Normalen an M^3. Diese heißt die *Normalenableitung* von f und wird auch notiert als

$$\frac{\partial f}{\partial n} := \langle \nabla f, n\rangle .$$

Daher schreibt man die letzte Formel auch

$$\int_{M^3} \Delta f \,\mathrm{d}V = \int_{\partial M^3} \frac{\partial f}{\partial n} \,\mathrm{d}A.$$

Wenden wir den Satz von Gauss auf ein Vektorfeld $F = g\nabla f$ an, so wird mit der gewöhnlichen Produktregel

$$\operatorname{div} F = \nabla \bullet (g\nabla f) = \nabla g \bullet \nabla f + g\Delta f.$$

Das Ergebnis ist dann die *Greensche Formel*

$$\int_{M^3} (\nabla g \bullet \nabla f + g \Delta f)\,\mathrm{d}V = \int_{\partial M^3} g\,\langle \nabla f, n\rangle\,\mathrm{d}A.$$

Vertauschen wir g und f und bilden die Differenz, so fällt der Term $\nabla g \bullet \nabla f$ heraus, und wir erhalten folgendes Ergebnis.

13 **Greensche Formel** *Sei M^3 eine kompakte orientierte 3-Mannigfaltigkeit mit Rand. Sind f und g in einer Umgebung von M^3 differenzierbar, so gilt*

$$\int_{M^3} (f \Delta g - g \Delta f)\,\mathrm{d}V = \int_{\partial M^3} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) \mathrm{d}A. \qquad \rtimes$$

▪ Koordinatendarstellung

Wir stellen das Flächenelement noch in lokalen Koordinaten dar. Wir erhalten damit die Flächenintegrale in klassischer Form.

Satz *In einem orientierungstreuen Koordinatensystem $\varphi\colon (u,v) \mapsto \varphi(u,v)$ einer orientierten 2-Mannigfaltigkeit M^2 im $\mathbb{R}^3$ ist*

$$n = \frac{\varphi_u \times \varphi_v}{\|\varphi_u \times \varphi_v\|}$$

und

$$\varphi^* \mathrm{d}A = \|\varphi_u \times \varphi_v\|\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$$

mit $E = \langle \varphi_u, \varphi_u \rangle$, $G = \langle \varphi_v, \varphi_v \rangle$, $F = \langle \varphi_u, \varphi_v \rangle$. $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ Es ist $\varphi^* \mathrm{d}A = f(u,v)\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$ mit 8

$$f(u,v) = \varphi^* \mathrm{d}A(e_1, e_2) = \mathrm{d}A(\varphi_u, \varphi_v) = \|\varphi_u \times \varphi_v\|.$$

Die letzte Darstellung folgt hieraus mit $\|v \times w\|^2 = \|v\|^2 \|w\|^2 - \langle v, w\rangle^2$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Korollar *Der Flächeninhalt einer Fläche M mit Koordinaten $\varphi\colon D \to M$ ist*

$$|M| = \int_D \|\varphi_u \times \varphi_v\|\,\mathrm{d}\lambda.$$

Das Integral einer skalaren Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}$ über M gegeben durch

$$\int_M f\,\mathrm{d}A = \int_D f \circ \varphi\,\|\varphi_u \times \varphi_v\|\,\mathrm{d}\lambda. \qquad \rtimes$$

▷ *Funktionsgraph* Der Graph einer differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}$ ist eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ und wird beschrieben durch ein einziges Koordinatensystem

$$\varphi\colon\ \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}, \quad (u,v) \mapsto (u, v, f(u,v))^\top.$$

Also ist

$$\varphi_u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_u \end{pmatrix}, \qquad \varphi_v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_v \end{pmatrix}, \qquad \varphi_u \times \varphi_v = \begin{pmatrix} -f_u \\ -f_v \\ 1 \end{pmatrix},$$

und damit

$$\|\varphi_u \times \varphi_v\|^2 = 1 + f_u^2 + f_v^2.$$

Der Flächeninhalt des Graphen Γ von f über einem Gebiet D ist demnach

$$|\Gamma| = \int_\Gamma \mathrm{d}A = \int_D \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Entsprechendes gilt für das Integral einer skalaren Funktion über Γ. ◁

▷ *Rotationsfläche* Sei $f\colon [a,b] \to [0,\infty)$ differenzierbar. Durch Rotation des Graphen von f um die x-Achse entsteht eine Rotationsfläche R, die durch

$$\varphi\colon\ [a,b] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad (t,\theta) \mapsto (t, f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta)^\top$$

parametrisiert wird. Es ist

$$\varphi_t = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t)\cos\theta \\ f'(t)\sin\theta \end{pmatrix}, \qquad \varphi_\theta = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(t)\sin\theta \\ f(t)\cos\theta \end{pmatrix},$$

und damit

$$E = \|\varphi_t\|^2 = 1 + (f')^2, \quad G = \|\varphi_\theta\|^2 = f^2, \quad F = \langle \varphi_t, \varphi_\theta \rangle = 0.$$

Wegen $f \geqslant 0$ ist also

$$\varphi^*\mathrm{d}A = f\sqrt{1 + (f')^2}\,\mathrm{d}t \wedge \mathrm{d}\theta.$$

Der Flächeninhalt der Rotationsfläche ist demnach

$$|R| = \int_R \mathrm{d}A = 2\pi \int_a^b f(t)\sqrt{1 + (f'(t))^2}\,\mathrm{d}t.$$

Typischerweise sind solche Integrale nicht mehr elementar auswertbar. ◁

Zum Vergleich notieren wir noch das entsprechende Ergebnis für Kurven.

Satz *In einem Koordinatensystem φ einer orientierten 1-Mannigfaltigkeit M ist*

$$T = \frac{\dot\varphi}{\|\dot\varphi\|}, \qquad \varphi^*\mathrm{d}s = \|\dot\varphi(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Die Länge der Mannigfaltigkeit M mit Koordinaten $\varphi\colon I \to M$ ist demnach

$$|M| = \int_M \mathrm{d}s = \int_I \|\dot\varphi(t)\|\,\mathrm{d}t,$$

23.28

und das Integral einer skalaren Funktion f entlang M ist

$$\int_M \psi \,\mathrm{d}s = \int_I f \circ \varphi \, \|\dot{\varphi}\| \,\mathrm{d}t. \qquad \rtimes$$

Bemerkungen *a.* Die Länge einer stetigen *Kurve* $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^{n+m}$ hatten wir als das Supremum der Längen aller einbeschriebenen Polygonzüge definiert, falls dieses Supremum endlich ist. Ist die Kurve stetig differenzierbar, so ist diese Länge durch das Integral über $\mathrm{d}s$ gegeben.

b. Für *Flächen* gilt dies nicht mehr! Man kann den Inhalt einer Fläche nicht mehr dadurch definieren, das man diese durch hinreichend kleine Polygone approximiert und das Supremum über deren Flächensumme bildet. Dieses Supremum kann unendlich sein, auch wenn das Integral über das Flächenelement endlich ist $_{\text{A-13}}$. $\multimap$

▪ Physikalischer Hintergrund

Die Begriffe Divergenz und Rotation sowie die klassischen Sätze der Vektoranalysis haben ihren Ursprung in der Strömungslehre.

Das Vektorfeld $F\colon \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ beschreibe die *stationäre* Strömung einer Flüssigkeit. Das heißt, die Strömungslinien ändern sich *nicht* im Laufe der Zeit. Die Aufgabe ist, die Strömungsbilanz bezüglich eines fiktiven Volumens K innerhalb der Strömung zu bestimmen.

In einem beliebigen Koordinatensystem der Oberfläche von K ist das infinitesimale Strömungsvolumen gegeben durch das Volumen desjenigen Spates, das durch den Strömungsvektor F und den zwei Tangentialvektoren v und w des Koordinatensystems aufgespannt wird. Dieses Volumen ist gegeben durch

$$F \bullet (v \times w) = F \bullet \mathrm{d}\vec{A}(v, w).$$

Der Beitrag einer nach außen gerichteten Strömung wird hierbei positiv gewertet, einer nach innen gerichteten Strömung negativ. Die gesamte Bilanz ist das Integral dieser Größe über den Rand ∂K des Volumens. Gemäß dem Satz von Gauss gilt hierfür

$$\int_{\partial K} F \bullet \mathrm{d}\vec{A} = \int_K \operatorname{div} F \,\mathrm{d}V.$$

Dies gilt für jedes fiktive Volumen K innerhalb der Strömung.

Betrachten wir nun Kugeln $B_r(x)$ um einen festen Punkt x mit immer kleineren Radien, so erhalten wir

$$\begin{aligned}(\operatorname{div} F)(x) &= \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} \operatorname{div} F \,\mathrm{d}V \\ &= \lim_{r\to 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{\partial B_r(x)} F \bullet \mathrm{d}\vec{A}.\end{aligned}$$

Somit beschreibt $\operatorname{div} F$ in jedem Punkt die *infinitesimale Strömungsbilanz* oder *Quelldichte* des Vektorfeldes F. Verschwindet die Divergenz überall, so heißt die Strömung *inkompressibel*.

14 **Notiz** *Ein auf einem sternförmigen Gebiet inkompressibles Vektorfeld F besitzt ein Vektorpotential V. Das heißt, es gilt*

$$F = \operatorname{rot} V. \quad \rtimes$$

⟪⟪ Mit $\operatorname{div} F = 0$ ist $\mathrm{d}(F \bullet \mathrm{d}\vec{A}) = 0$. Aufgrund des Lemmas von Poincaré 22.9 ist also $F \bullet \mathrm{d}\vec{A}$ exakt, also

$$F \bullet \mathrm{d}\vec{A} = \mathrm{d}(V \bullet \mathrm{d}\vec{s}) = \operatorname{rot} V \bullet \mathrm{d}\vec{A}$$

mit einem gewissen Vektorfeld V. Also ist $F = \operatorname{rot} V$. ⟫⟫

Betrachte nun eine fiktive Membran M mit Rand ∂M innerhalb der Strömung. Das Integral

$$\int_{\partial M} F \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \int_{\partial M} \langle F, T \rangle \, \mathrm{d}s$$

können wir als Bilanz des Winkels des Strömungsvektors F mit der Tangentenrichtung T über den gesamten Rand ∂M interpretieren. Es stellt somit ein Maß der Zirkulation des Vektorfeldes entlang ∂M dar. Mit dem Satz von Stokes gilt nun

$$\int_{\partial M} F \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \int_M \operatorname{rot} F \bullet \mathrm{d}\vec{A}.$$

Somit können wir $\operatorname{rot} F$ interpretieren als das Maß für die infinitesimale Verwirbelung eines Vektorfeldes. Verschwindet die Rotation überall, so heißt die Strömung *wirbelfrei*.

Notiz *Ein auf einem sternförmigen Gebiet wirbelfreies Vektorfeld F ist ein Gradientenfeld. Das heißt, es existiert eine Funktion f, so dass*

$$F = \nabla f. \quad \rtimes$$

⟪⟪ Mit $\operatorname{rot} F = 0$ ist auch $\operatorname{rot} F \bullet \mathrm{d}\vec{A} = 0$ und damit $\mathrm{d}(F \bullet \mathrm{d}\vec{s}) = 0$. Also ist mit dem einfachen Lemma von Poincaré 19.12

$$F \bullet \mathrm{d}\vec{s} = \mathrm{d}f = \nabla f \bullet \mathrm{d}\vec{s}$$

mit einer skalaren Funktion f. Also ist $F = \nabla f$. ⟫⟫

23.6 Zwei Anwendungen

Als erste Anwendung zeigen wir die Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen im $\mathbb{R}^3$.

Satz *Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und harmonisch, also $\Delta f = 0$. Dann gilt*

$$f(p) = \frac{1}{|\partial B_r(p)|} \int_{\partial B_r(p)} f \,\mathrm{d}A$$

für jede Kugel $B_r(p)$, die im Definitionsbereich von f enthalten ist. ⋊

⟪⟪ Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $p = 0$. Definiere φ_t durch

$$\varphi_t(x) \coloneqq f(tx)$$

für alle $t \geqslant 0$ und $x \in \mathbb{R}^3$, für die tx im Definitionsbereich von f liegt. Betrachte

$$J(t) = \frac{1}{|B_r(0)|} \int_{\partial B_r(0)} \varphi_t \,\mathrm{d}A.$$

Dann ist $J(0) = \varphi_0 = f(0)$. Es genügt daher zu zeigen, dass J konstant ist. Nun ist

$$\begin{aligned} \dot J(t) &= \int_{\partial B_r(0)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \varphi_t \,\mathrm{d}A \\ &= \int_{\partial B_r(0)} \nabla f(tx) \bullet x \,\mathrm{d}A = r \int_{\partial B_r(0)} \nabla f(tx) \bullet n \,\mathrm{d}A, \end{aligned}$$

denn im Punkt $x \in \partial B_r(0)$ ist die äußere Normale $n = x/r$. Mit dem Satz von Gauss folgt

$$\dot J(t) = rt \int_{B_r(0)} \Delta f(tx) \,\mathrm{d}V = 0,$$

da ja $\Delta f = 0$ nach Voraussetzung. ⟫⟫

Zum Abschluss beweisen wir noch den folgenden

Satz des Archimedes *Die Auftriebskraft eines in einer homogenen Flüssigkeit befindlichen Körpers ist gleich dem Gewicht des von diesem Körper verdrängten Volumens.* ⋊

⟪⟪ Die Flüssigkeit fülle das Gebiet $\mathbb{M} = \{z \leqslant 0\}$ aus und habe die homogene Dichte 1. Der an einem Punkt in der Tiefe z ausgeübte Druck entspricht der Höhe der Flüssigkeitssäule über dem Punkt und ist nach unten gerichtet. Wegen $z < 0$ ist er also

$$P = z e_z.$$

Sei nun M eine berandete 3-Mannigfaltigkeit in $\mathbb{M}$. Der auf einen Randpunkt p von M wirkende Druck ist die in Normalenrichtung wirkende Komponente des Druckvektors

$$P_n = \langle P, n \rangle\, n.$$

Diese ist mit dem Flächenelement $\mathrm{d}A$ zu multiplizieren und über den gesamten Rand von M zu integrieren. Die Auftriebskraft ist demnach

$$F = \int_{\partial M} \langle P, n \rangle \,\mathrm{d}A.$$

Darauf können wir den Divergenzsatz anwenden. Wegen $\operatorname{div} P = 1$ erhalten wir

$$F = \int_{\partial M} \langle P, n \rangle \,\mathrm{d}A = \int_M \operatorname{div} P \,\mathrm{d}V = \int_M \mathrm{d}V = |M| \,.$$

Da wir die Dichte der Flüssigkeit auf 1 normalisiert hatten, entspricht der letzte Wert dem Gewicht der von M verdrängten Flüssigkeit. ⟩⟩⟩⟩⟩

Abb 17 Zum Satz des Archimedes