④ **Aufgabe 1**

Welche der folgenden Aussagen über eine stetige Kurve $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ sind wahr, welche falsch?

a. Ist γ glatt und rektifizierbar, so ist γ nach der Bogenlänge parametrisierbar. ○ wahr ○ falsch

b. Ist γ nicht rektifizierbar, so ist γ auch nicht lipschitz. ○ wahr ○ falsch

c. Ist γ differenzierbar, so besitzt γ in jedem Punkt eine Tangente. ○ wahr ○ falsch

d. Es gibt eine Kurve γ, deren Bild der Einheitskreis ist. ○ wahr ○ falsch

④ **Aufgabe 2**

Gegeben ist

$$f\colon [0,1] \to [0,1], \qquad f(t) = t^{3/2}.$$

a. Zeichnen Sie den Graph von f.

b. Geben Sie die allgemeine Formel für die Länge des Graphen einer stetig differenzierbaren Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ an.

c. Bestimmen Sie die Länge des Graphen von f.

③ **Aufgabe 3**

Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale.

a. $\displaystyle\int \frac{\log t}{t}\,\mathrm{d}t$ *b.* $\displaystyle\int \mathrm{e}^{\lambda t}\cos t\,\mathrm{d}t, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

③ **Aufgabe 4**

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine skalare Funktion, sowie $x \in \mathbb{R}^n$ und $h \in \mathbb{R}^n$.

a. Geben Sie die Definition der *Richtungsableitung* $D_h f(x)$ von f im Punkt x in Richtung h.

b. Stellen Sie $D_h f(x)$ durch die totale Ableitung $Df(x)$ sowie die partiellen Ableitungen $D_j f(x)$ dar für den Fall, dass f total differenzierbar ist.

c. Bestimmen Sie $D_h f(x)$ für den Fall $n = 2$,

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

wobei $a,b,c \in \mathbb{R}$ und $h \in \mathbb{R}^2$.

④ **Aufgabe 5**

a. Bestimmen Sie alle Lösungen der Differenzialgleichung

$$\dot{x} = x^2 \mathrm{e}^t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

b. Welche dieser Lösungen ist konstant?

c. Bestimmen Sie diejenige Lösung mit $\lim_{t\to-\infty} x(t) = 1$.

③ **Aufgabe 6**

a. Geben Sie die Definition einer kompakten Teilmenge eines normierten Raumes.

b. Geben Sie eine nichttriviale notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ kompakt ist.

c. Geben Sie an, welche der Intervalle $\{0\}$, $(-1, 1)$ und $[0, \infty)$ kompakt sind.

⑥ **Aufgabe 7**

Gegeben ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f(x, y) = \frac{1}{1 + x^2 + y^2}.$$

a. Bestimmen Sie die Ableitung und den Gradienten von f.

b. Bestimmen Sie sämtliche kritischen Punkte von f.

c. Bestimmen Sie die Hessematrix H_f von f.

d. Untersuchen Sie die kritischen Punkte auf das Vorliegen eines lokalen Maximums oder Minimums.

e. Geben Sie das quadratische Taylorpolynom T_2 von f im Punkt $(0, 0)$ an.

③ **Aufgabe 8**

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} |x|^2 \sin(|x|^{-1}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

wobei $|x|$ die euklidische Norm bezeichnet. Zeigen Sie:

a. f ist in jedem Punkt $x \neq 0$ differenzierbar.

b. f ist auch im Punkt $x = 0$ differenzierbar.

c. f ist im Punkt $x = 0$ nicht stetig differenzierbar.

③ **Aufgabe 9**

Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar.

a. Stellen Sie $f(v) - f(u)$ für beliebiges $u, v \in \mathbb{R}^n$ durch ein Integral über die Verbindungsstrecke $[u, v]$ dar.

b. Zeigen Sie, dass f auf jeder kompakten und konvexen Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ lipschitzstetig ist.

⑦ **Aufgabe 10**

Sei I ein offenes Intervall.

a. Definieren Sie, wann eine Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$ *strikt konvex* heißt.

b. Sei $f \in C^1(I)$. Geben Sie eine *notwendige und hinreichende* Bedingung an f' dafür an, dass f strikt konvex ist.

c. Sei

$$f(x) = \mathrm{e}^{1/x}, \qquad g(x) = \log(1 + \mathrm{e}^x).$$

Untersuchen Sie, ob f auf $(0, \infty)$ und g auf $\mathbb{R}$ strikt konvex sind.

d. Folgern Sie mithilfe der Funktion g, dass für $c_1, .., c_n \geqslant 0$ mit $n \geqslant 1$,

$$1 + \sqrt[n]{c_1 .. c_n} \leqslant \sqrt[n]{(1 + c_1) .. (1 + c_n)}$$