

- 1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beliebig, aber nicht leer, sei $x_0 \in \Omega$, und für $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ sei

$$[f]_{\Omega} = \sup_{\substack{u \neq v \\ u, v \in \Omega}} \frac{|f(u) - f(v)|}{|u - v|}.$$

Dann gilt:

- $L := \{f \in C(\Omega, \mathbb{R}^n) : f(x_0) = 0, [f]_{\Omega} < \infty\}$ ist ein reeller Vektorraum.
- $[\cdot]_{\Omega}$ definiert auf L eine Norm.
- Mit dieser Norm ist L vollständig.

- 2 Gegeben sei $\varphi: B_r(0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ wie in Proposition B, also Lipschitzstetig mit

$$\varphi(0) = 0, \quad [\varphi - id]_{B_r(0)} \leq 1/4.$$

Beweisen sie für die Abbildung $\psi = \varphi^{-1}$ von Proposition C die Lipschitzabschätzung

$$[\psi - id]_{B_{r/2}(0)} \leq \frac{\lambda}{1 - \lambda}, \quad \lambda = [\varphi - id]_{B_r(0)}.$$

Schriftaufgabe

- 3 a. Zeigen sie, dass

$$\phi: (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (u, v) = \phi(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

einen Diffeomorphismus auf seine Bildmenge definiert.

- Bestimmen sie die Jacobische der Umkehrabbildung.
- Skizzieren sie einige Koordinatenlinien $\{x = a\}$ und $\{y = b\}$ von ϕ sowie $\{u = c\}$ und $\{v = d\}$ von ϕ^{-1} .



"Whoa, Frank . . . Guess what
youuuuuuuuu sat in!"