1 *a.* Sei M^2 eine kompakte zweidimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand im $\mathbb{R}^2$. Sind die Funktionen u und v in einer Umgebung von M^2 differenzierbar, so gilt

$$\int_{M^2} (v_x - u_y)\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\partial M^2} (u\,\mathrm{d}x + v\,\mathrm{d}y).$$

b. Ist A ein regulär berandetes Gebiet, so ist dessen Flächeninhalt

$$|A| = \frac{1}{2}\int_{\partial A} (x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x).$$

2 Seien M_1 und M_2 berandete n-Mannigfaltigkeiten im $\mathbb{R}^n$ mit der üblichen Orientierung, wobei

$$M_2 \subset M_1 \setminus \partial M_1$$

und $M_1 \setminus M_2$ beschränkt ist. Dann gilt

$$\int_{\partial M_1} \omega = \int_{\partial M_2} \omega$$

für jede geschlossene $n-1$-Form ω auf M_1.

3 Man verifiziere den Divergenzsatz von Gauss ?? für ein 3-dimensionales kompaktes Intervall I:

$$\int_I \operatorname{div} F\,\mathrm{d}V = \int_{\partial I} \langle F, n\rangle\,\mathrm{d}A.$$

Hinweis: Man kann jeden Term $\partial_i F_i\,\mathrm{d}V$ für sich betrachten.

4 *a.* Für eine $n-1$-Form ω auf einer kompakten n-Mannigfaltigkeit M gilt immer

$$\int_M \mathrm{d}\omega = 0.$$

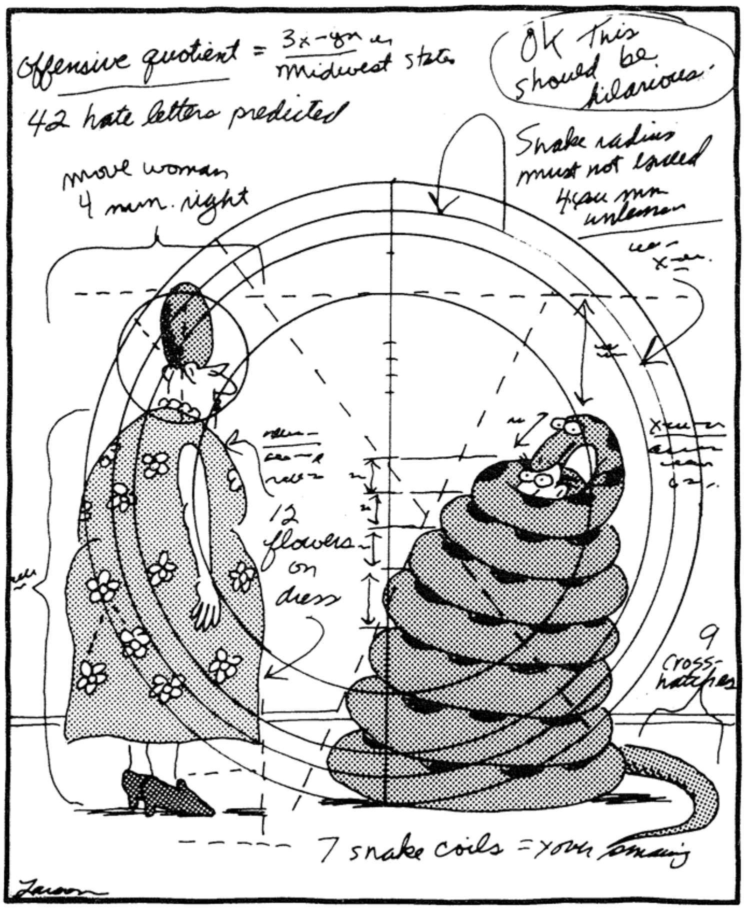
b. Geben sie ein nicht-kompaktes Beispiel, wo dies nicht zutrifft.

Für die folgenden Aufgaben benötigen sie Vorlesung 24

5 Bestimmen sie den Inhalt der Sphäre $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$ mithilfe des Flächenelementes $\mathrm{d}A$.

Schriftaufgabe

6 Sei K der 3-dimensionale Körper, der bei Rotation des Graphen von $x \mapsto x^\alpha$ über $[1,\infty)$ um die x-Achse entsteht. Für welche α ist das Volumen von K endlich, aber seine Oberfläche unendlich groß?



Revealing some of the mathematical computations every cartoonist must know.