Diese letzten beiden Übungsblätter bestehen aus älteren Klausuraufgaben

1 Zeigen Sie, dass es ein $\varepsilon > 0$ und eine C^1-Funktion $f\colon (1-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to \mathbb{R}$ mit $f(1) = 1$ gibt, die die Gleichung

$$\frac{t}{f(t)} + \frac{\log f(t)}{t} = f(t)$$

erfüllt. Bestimmen Sie außerdem $f'(1)$.

2 Gegeben ist

$$f\colon \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2x^2 + 2y^2 + 1.$$

Für welche $c \geqslant 0$ ist $f^{-1}(c)$ eine *a.* 1-dimensionale, *b.* 2-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^2$?
Natürlich mit Begründung.

3 Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

a. $\displaystyle\int_{x^2+y^2\leqslant 4} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$. *b.* $\displaystyle\int_{x^2+y^2+z^2\leqslant 9} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Schriftaufgabe

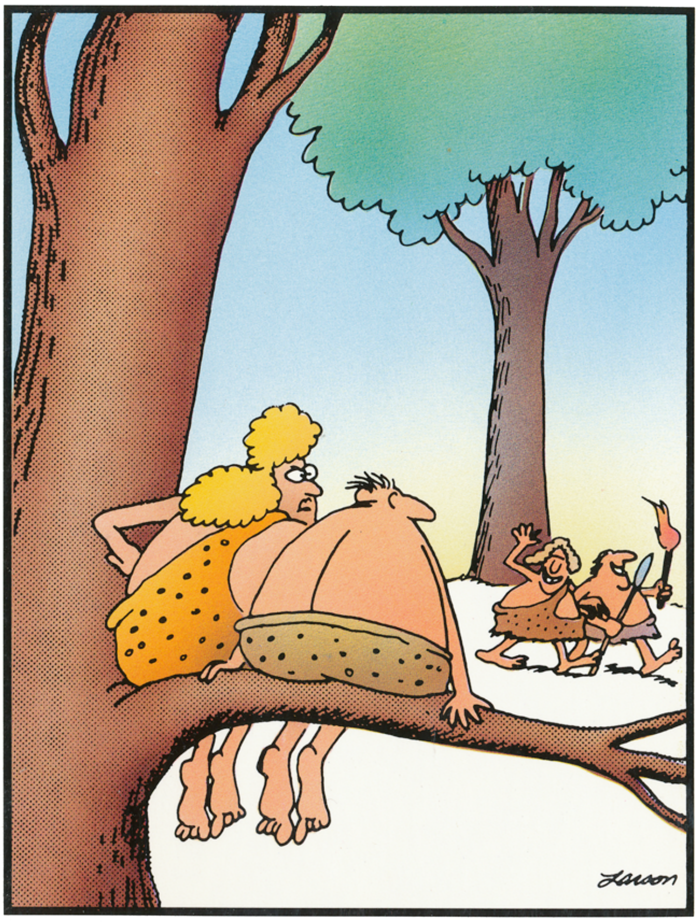
4 Gegeben sind die Funktion

$$f\colon \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f(x,y,z) = x + y - z$$

und die Menge

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x^2 + 4y^2 = 11 \wedge 4x = 3z\}.$$

a. Zeigen sie, dass M abgeschlossen und beschränkt ist, also kompakt.
b. Begründen sie, warum f auf M ein Minimum und ein Maximum besitzt.
c. Bestimmen sie diese Extremalstellen mit der Methode der Lagrangemultiplikatoren.



"And now there go the Wilsons! . . . Seems like everyone's evolving except us!"