# Ana-3 13

Ws 2021/22 03.02.2022

1 Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, und

$$h \coloneqq (\partial_1\varphi, .., \partial_n\varphi)^\top : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

*a.* Definieren Sie, wann die Hessesche $H\varphi$ von $\varphi$ strikt positiv definit ist.
*b.* Ist dies der Fall, so ist $h$ in jedem Punkt ein lokaler Diffeomorphismus.
*c.* Darüber hinaus ist $h$ injektiv auf ganz $\mathbb{R}^n$.

2 Formulieren und beweisen Sie den Satz von Stokes auf elementare Weise für

*a.* $\displaystyle\int_{\partial[0,1]} g(x)$ *b.* $\displaystyle\int_{\partial[0,1]^2} h(x,y)\,\mathrm{d}y$

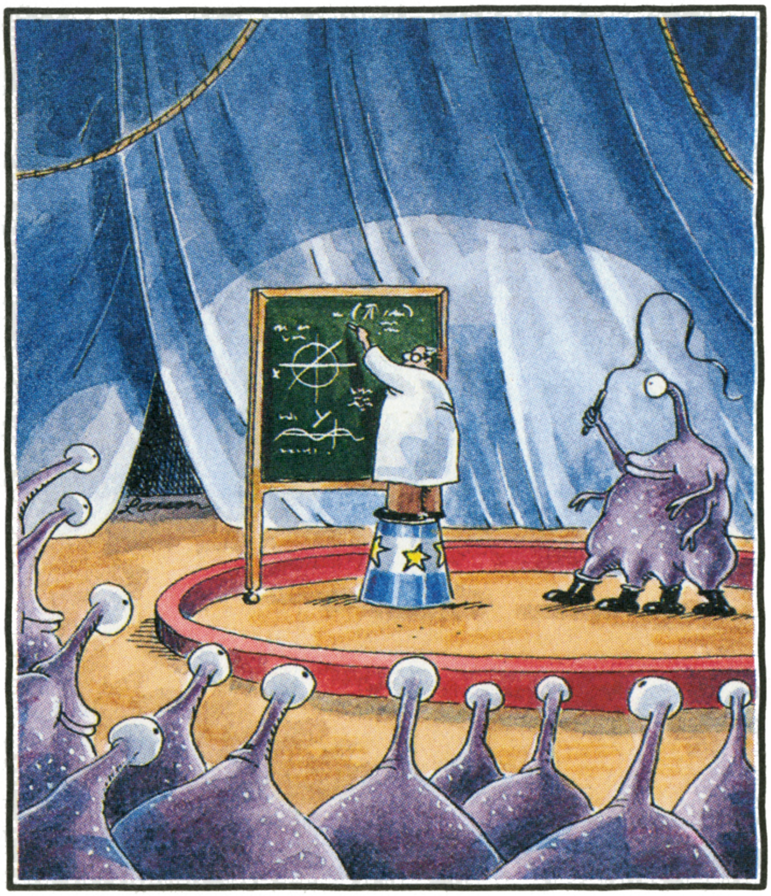
3 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und nicht leer. Begründen Sie mit dem lokalen Umkehrsatz, dass eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi\colon \Omega \to \Omega'$ ein Diffeomorphismus genau dann ist, wenn Sie bijektiv und regulär ist.

4 *3* *a.* Formulieren Sie den Satz von Lebesgue über die dominierte Konvergenz.
*b.* Geben Sie ein Beispiel, dass die Aussage des Satzes nicht gilt, wenn die Bedingung der Dominierung nicht erfüllt ist.

5 *2* Geben Sie ein Beispiel einschließlich Begründung einer monoton fallenden Folge von offenen Mengen $A_k \subset \mathbb{R}^2$, wo

$$\lim \lambda(A_k) \neq \lambda(\lim A_k), \qquad \lim A_k \coloneqq \bigcap_{k\geqslant 1} A_k.$$

6 Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und regulär.
*a.* Geben Sie die Definition dafür, dass $f$ regulär ist.
*b.* Zeigen Sie, dass das Bild jeder offenen Menge unter $f$ ebenfalls offen ist.
*c.* Geben Sie ein Beispiel, dass die Regularität von $f$ hinreichend, aber nicht notwendig ist.



Abducted by an alien circus company, Professor Doyle is forced to write calculus equations in center ring.