1 *a.* $\mathbb{Z}$ ist eine Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}$.
b. Ebenso die Menge $M = \{1/n : n \geqslant 1\}$.
c. Nicht aber $M' = M \cup \{0\}$.

2 Gegeben ist

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2x^2 + 2y^2 + 1.$$

a. Für welche $c \in \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(c)$ eine Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^2$?
b. Wie lauten in diesem Fall die Tangentengleichungen?

3 Beweisen Sie den Satz über implizite Funktionen für Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ unter Verwendung des Resultats, dass $f(x,\cdot)$ streng monoton ist, falls $f_y(x,\cdot) \neq 0$.

4 Sind M_1 und M_2 gleichungsdefinierte Mannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^{m_1}$ respektive $\mathbb{R}^{m_2}$, so ist $M_1 \times M_2$ eine gleichungsdefinierte Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$. Bestimmen Sie auch die Dimension dieser Mannigfaltigkeit.

Schriftaufgabe

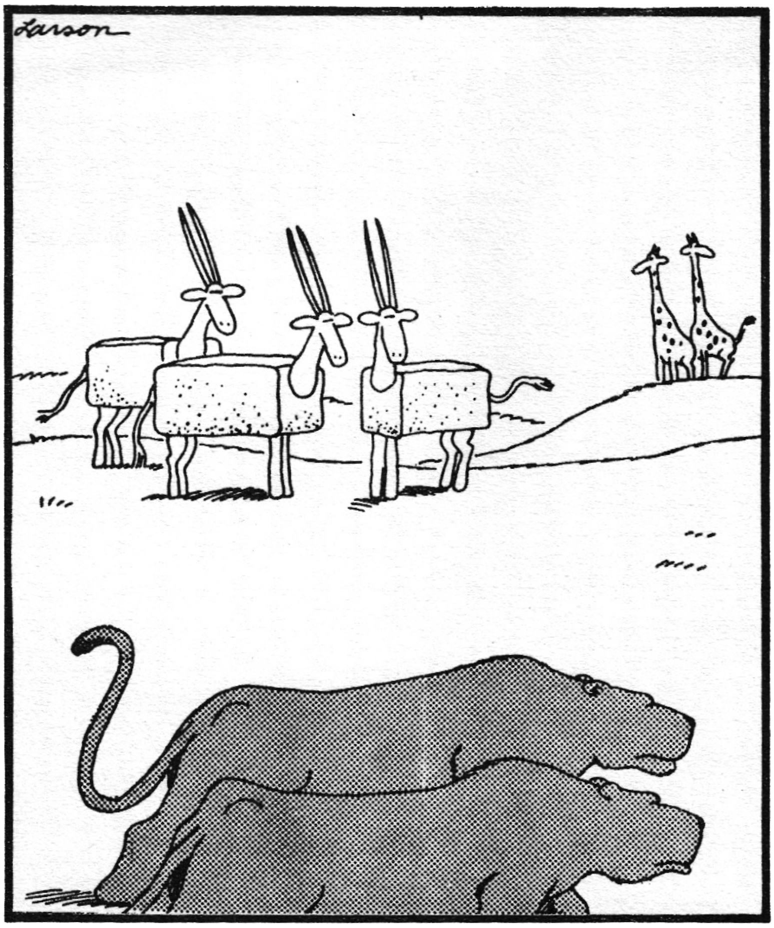
5 Identifizieren Sie den $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit dem Raum aller reellen $n \times n$-Matrizen, und sei $S(n)$ der Raum aller symmetrischen $n \times n$ Matrizen in $\mathbb{R}^{n\times n}$. betrachten Sie die Abbildung

$$\Phi: \mathbb{R}^{n\times n} \to S(n), \quad \Phi(M) = M^\top M.$$

Zeigen Sie, dass I ein regulärer Wert von Φ ist, und damit der Raum

$$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^\top A = I\}$$

aller orthogonalen Matrizen eine Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^{n\times n}$.



Knowing the lion's preference for red meat,
the spamalopes remained calm but wary.