Ana-3 3

Ws 2021/22 04.11.2021

1 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Gilt

$$|f(x) - f(y)| \geqslant \lambda\,|x - y|\,, \qquad x, y \in \Omega,$$

mit einem $\lambda > 0$, so ist f ein Diffeomorphismus auf $f(\Omega)$.

2 *a.* Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex, und $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ sei C^2. Gilt

$$Hu > 0$$

auf ganz Ω, so definiert $f = \nabla u$ einen Diffeomorphismus von Ω auf $f(\Omega)$.
b. Gilt außerdem

$$Hu \geqslant \lambda E$$

auf ganz Ω mit einem $\lambda > 0$, so gilt außerdem

$$|f(x) - f(y)| \geqslant \lambda\,|x - y|\,, \qquad x, y \in \Omega.$$

3 Bestimmen sie die Maxima der Funktion

$$f(x, y, z) = xy^2z^3, \qquad x, y, z > 0,$$

unter der Nebenbedingung $x + 2y + 3z = 6$.

4 Welche Punkte auf der Fläche $z = 2xy + 1$ liegen dem Nullpunkt am nächsten?

Schriftaufgabe

5 Bestimmen sie die Extrema der Funktion

$$f\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = xyz$$

unter den Nebenbedingungen
a. $x^2 + y^2 + z^2 = 3$,
b. $x + y + z = 5$ und $xy + yz + zx = 8$.

"OK! Now don't move, Andy! . . . Here comes Mom!"