1 Für $m, n \geqslant 1$ sei

$$a_{mn} = \begin{cases} +1, & n = m, \\ -1, & n = m+1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = 0, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} = 1.$$

Im Satz von Fubini kann also auf die Voraussetzung der Integrierbarkeit nicht verzichtet werden.

2 Für $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f\colon \ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(u,v) = \frac{\operatorname{sgn}(uv)}{u^2 + v^2}$$

gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(u,v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = 0 = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(u,v)\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}u.$$

Trotzdem ist f nicht integrierbar.

3 Beweisen sie die elementaren Transformationsformeln mit dem Satz von Fubini und der Substitutionsregel für Regelintegrale.

4 Ist $f\colon \ [a,b]^2 \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt

$$\int_a^b \int_u^b f(u,v)\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}u = \int_a^b \int_a^v f(u,v)\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v.$$

5 Sei $\mathcal{T}$ eine Zerlegung der Eins auf einer Menge M in $\mathbb{R}^n$.
a. Ist M die Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen, so ist $\mathcal{T}$ höchstens abzählbar, wenn man auf M identisch verschwindende Funktionen nicht mitzählt.
b. Ist M offen und $\mathcal{T}$ der trivialen Überdeckung $\mathcal{O} = \{M\}$ untergeordnet, so ist $\mathcal{T}$ abzählbar *unendlich* – also *nicht* endlich.

Schriftaufgabe

6 Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine C^2-Funktion. Beweisen sie das Lemma von Schwarz,

$$(f_x)_y = (f_y)_x,$$

mithilfe des Satzes von Fubini. *Hinweis:* Nehmen sie an, dass $(f_{xy} - f_{yx})(u) > 0$ in einem Punkt u.

PULL
MIDVALE
SCHOOL FOR
THE GIFTED