1 Für jede $2k+1$-Form ω mit $k \geqslant 0$ gilt $\omega \wedge \omega = 0$.

2 Seien ω und υ Differenzialformen von geradem Grad, σ von beliebigem Grad. Man berechne die äußeren Ableitungen von

a. $\mathrm{d}\omega \wedge \upsilon - \omega \wedge \mathrm{d}\upsilon$,

b. $\mathrm{d}\omega \wedge \upsilon \wedge \sigma + \omega \wedge \mathrm{d}\upsilon \wedge \sigma + \omega \wedge \upsilon \wedge \mathrm{d}\sigma$.

3 Auf dem $\mathbb{R}^4$ seien

$$\omega = \mathrm{d}x_1 + x_2\,\mathrm{d}x_2, \qquad \upsilon = \sin x_2\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_3 + \cos x_3\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_4.$$

Außerdem sei $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3 x_4, x_4)$. Man bestimme

a. $\mathrm{d}\omega$ und $\mathrm{d}\upsilon$ *b.* $\sigma = \omega \wedge \upsilon$ *c.* $\varphi^*\sigma$ *d.* $\mathrm{d}\sigma$ und $\mathrm{d}(\varphi^*\sigma)$.

4 Mit der Kugelkoordinatenabbildung $\varphi\colon (r, \varphi, \theta) \mapsto (x, y, z)$ berechne man

a. $\varphi^*\mathrm{d}x$, $\varphi^*\,\mathrm{d}y$, $\varphi^*\,\mathrm{d}z$

b. $\varphi^*(\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z)$

c. $\varphi^*\mathrm{d}x \wedge \varphi^*(\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z)$.

Schriftaufgabe

5 Jedem Vektorfeld $v = (v_1, v_2, v_3)\colon \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ seien die beiden Formen

$$\omega_v^1 \coloneqq v_1\,\mathrm{d}x + v_2\,\mathrm{d}y + v_3\,\mathrm{d}z,$$
$$\omega_v^2 \coloneqq v_1\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + v_2\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + v_3\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

zugeordnet. Außerdem sei $f\colon \mathbb{R}^3 \hookrightarrow \mathbb{R}$ eine skalare Funktion.

a. Zeigen sie, dass

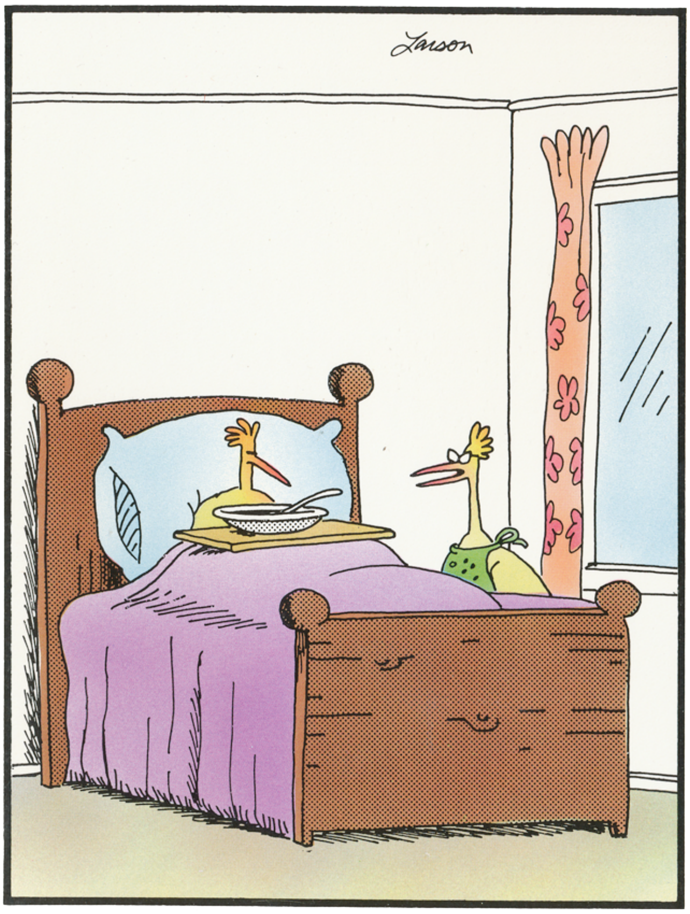
$$\mathrm{d}f = \omega_{\nabla f}^1,$$
$$\mathrm{d}\omega_v^1 = \omega_{\nabla \times v}^2,$$
$$\mathrm{d}\omega_v^2 = (\nabla \bullet v)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z.$$

b. Folgern sie, dass

$$\nabla \times (\nabla f) = 0, \qquad \nabla \bullet (\nabla \times v) = 0.$$

c. Falls $\nabla \times v = 0$ auf einem sternförmigen Gebiet A, so ist $v = \nabla f$ mit einer skalaren Funktion f auf A.

d. Falls $\nabla \bullet v = 0$ auf einem sternförmigen Gebiet A, so ist $v = \nabla \times w$ mit einem Vektorfeld w auf A.



"Quit complaining and eat it! . . . Number one, chicken soup is good for the flu — and number two, it's nobody we know."