

$$\varphi: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m \quad m > n$$

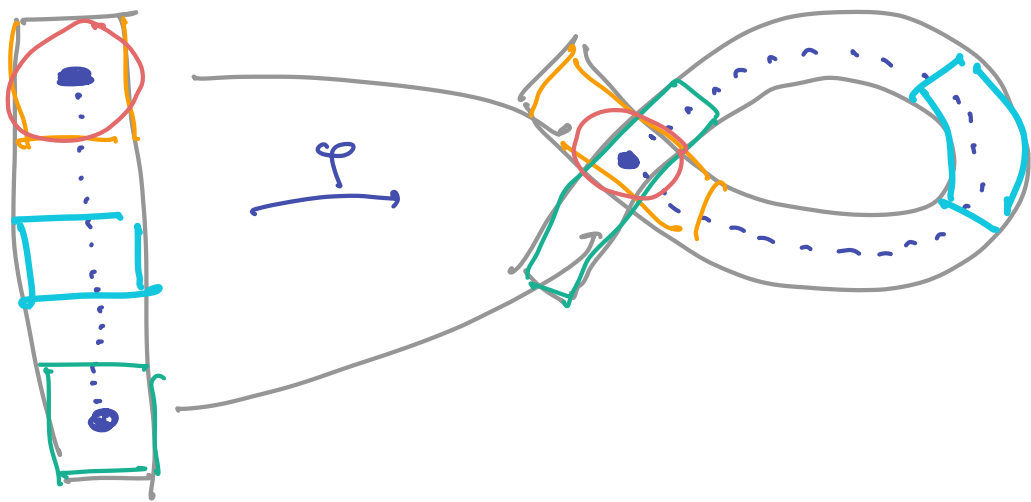
$$u = \varphi(x)$$

Dim ≥ 1 :

$$f: I \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{stetig,}$$

intervall

umkehrbar $\Leftrightarrow$ stetig umkehrbar



label

triples

form

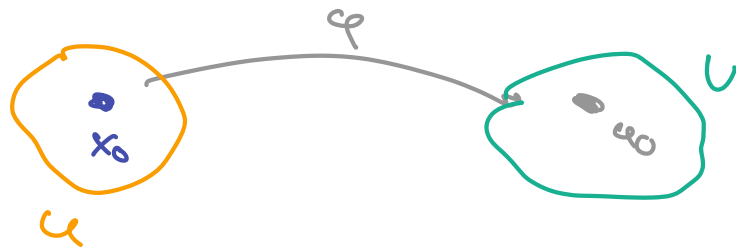
with

Lemma:

fixierte

$$\varphi(\underline{x_0}) = c_0$$

Gibt es eine offene Umgebung U
 von x_0 , die stetig auf
 eine offene Umg. V von c_0
 abgebildet wird?



$$\varphi : U \xrightarrow{\varphi} V ?$$

Linearisierung:

$$u = \varphi(x)$$

stellt dar

$$u_0 + \underbrace{D\varphi(x_0)}_{\text{Zur}} (x - x_0) = u$$

$\overset{\text{"}}{\varphi(x_0)}$ unverändert?

$$\Rightarrow \boxed{D\varphi(x_0)(x - x_0) = u - u_0}$$

$$Ax = u.$$

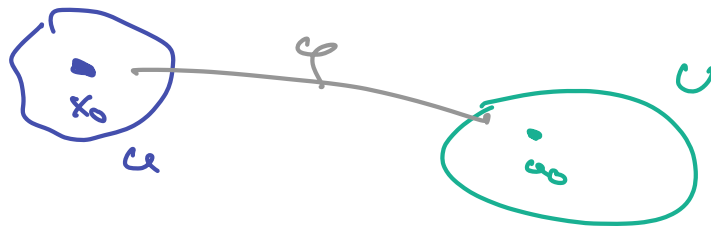
$$A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \quad \text{Zur}$$

unverändert für $x \rightarrow x_0$, wenn

$$(i) \quad u = u$$

$$(ii) \quad \text{oder } A \neq 0.$$

~~not~~ $\text{Dep}(x_0) \neq \emptyset$



$$f : C \xrightarrow{m-1} U$$

$$\underline{f} : U \rightarrow C$$

staying diff. set.

$$f \circ f \mapsto \text{in } C$$

$$f \circ f \mapsto \text{in } C$$

Beispiel

1. Affine Abb.: ~~Abb~~

$$\gamma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \\ x \mapsto b = Ax + b$$

Differ geb ist $A \neq 0$.

2. Die Abb.: γ Affine Abb.,

$$f: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ regulär .}$$

$$\text{Abb.: } f'(t) \neq 0, \quad t \in I.$$

$$f^{-1}: f(I) = I' \rightarrow I \text{ st. diff.}$$

$\Leftarrow$ $\Leftarrow$ Differ.

3. $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^1$

$$\varphi: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$\Leftarrow$ Differ

ü

Abb

$$\varphi \circ \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Differ.

f. Eine reguläre Kurve

$$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Man hat Differ. !

ü

$$\varphi : x_0 \mapsto u_0$$

$$\varphi^{-1} : u_0 \mapsto x_0$$

$$\varphi^{-1} \circ \varphi = \text{id}$$

$$\begin{aligned} D(\varphi^{-1} \circ \varphi) &= D(\text{id}) = \text{id} \\ &= (D\varphi^{-1} \circ \varphi) \cdot (D\varphi(x_0)) \end{aligned}$$

$$\text{Ans: } \underbrace{D\varphi^{-1}(u_0)}_{\text{regular}} \cdot \underbrace{D\varphi(x_0)}_{\text{regular}} = \text{id}$$

Q

Beweis des Chain Rule 2:

$$\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{um } x_0$$

$$c_0 = \varphi(x_0)$$

$D\varphi(x_0)$ invertierbar.

$$\tau : x \mapsto x + x_0 \quad (0 \mapsto x_0)$$

$$\gamma : u \mapsto \gamma'(u - u_0), \quad \gamma = D\varphi(x_0).$$

$$\tilde{\varphi} = \gamma \circ \varphi \circ \tau :$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \gamma(\varphi(x + x_0) - c_0)$$

$\tilde{\varphi}$ stetig diff.

$$\tilde{\varphi}(0) = 0$$

$$D\tilde{\varphi}(0) = \gamma' \cdot D\varphi(x_0) = I. \quad \checkmark$$

$\tilde{\varphi}$ ist also diff. 0

Wir zeigen f_1 ist linear:

$$\begin{aligned} 1. \quad & f_1(x+y) = f_1(x) + f_1(y) \\ & f_1(x) = f_1(y) = 0 \end{aligned}$$

Du sollst:

$$\begin{aligned} (x+y) \cdot f_1 &= x \cdot f_1 + y \cdot f_1 = 0 \\ f_1(x+y) &= f_1(x) + f_1(y) = 0 \end{aligned}$$

Somit ist f_1 linear. $\square$

Lemma:

$$u, v \in \Omega$$

Lemma:

$$[u, v] \subset \Omega$$

Schwarz Lemma:

$$|f(u) - f(v)| \leq \sup_{z \in [u, v]} \|Df(z)\| (u-v)$$

$$\leq \|Df\|_{\Omega} (u-v) \quad : (u-v)$$

$$\Rightarrow [f]_{\Omega} \leq \|Df\|_{\Omega}$$

Lemma:

$$t \in \Omega, \quad \Omega \neq \emptyset$$

$$|Df(t)| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{1}{h} f(t+h) - f(t) \right|$$

$$\leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{|h|} [f]_{\Omega} |h|$$

$$= [f]_{\Omega} |h|$$

Lemma:

$$\|Df(t)\| \leq [f]_{\Omega}$$

Lemma:

$$\|Df\|_{\Omega} \leq [f]_{\Omega}$$

$\square$

Con Special fact :

$$\varphi(0) = 0$$

$$\Delta \varphi(0) = I$$

Đưa:

$$[\varphi - id]_{B_r(0)} = \underbrace{(\Delta \varphi - Id)}_{0 \text{ tại } x=0} \Big|_{B_r(0)}$$

hàm xấp
hàm exact



0 tại $x=0$.

Prove : f is a contraction : $x, y \in X$:

$$d(fx) = d(fy) .$$

Then :

$$|x - y| = |(f(x) - x) - (f(y) - y)|$$

$$\leq [d - d]_2 |x - y|$$

$$< 1 \cdot |x - y|$$

$\Rightarrow$:

$$|x - y| = 0$$

$$x = y .$$

$\therefore f$ is a contraction . $\square$

Exercice 1

$$\varphi = \text{id} + f^2$$

$$\psi = \text{id} + f^2$$

On a :

$$\begin{aligned} \text{id} &= \varphi \circ \psi \\ &= (\text{id} + f^2) \circ (\text{id} + f^2) \\ &= \text{id} + f^2 + f^2 \circ (\text{id} + f^2) \end{aligned}$$

Donc

$$f^2 = -f^2 \circ (\text{id} + f^2)$$

On définit T :

$$T : u \mapsto Tu = -f^2 \circ (\text{id} + u)$$

On veut dire :

$$Tu = u$$