18

Analysis im $\mathbb{R}^n$

Wir betrachten nun Abbildungen $\mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ mit $m \geqslant 2$, die man auch als vektorwertige Funktionen bezeichnet. Zunächst formulieren wir den lokalen Umkehrsatz für Abbildungen des $\mathbb{R}^n$ in sich selbst. Wir beweisen ihn – recht ausführlich – zuerst innerhalb der Kategorie der lipschitzstetigen Abbildungen. Höhere Regularität betrachten wir erst danach und bereitet keine neuen Probleme.

Eine unmittelbare Folge des Umkehrsatzes ist der fundamentale Satz über implizite Funktionen. Er bildet die Grundlage für die Definition gleichungsdefinierter Mannigfaltigkeiten, und daran anknüpfend die Diskussion von Extrema mit Nebenbedingungen und der Methode der Lagrangemultiplikatoren.

18.1 Umkehrabbildungen

Wir betrachten vektorwertige Abbildungen

$$\varphi : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m, \quad x \mapsto u = \varphi(x).$$

Zuerst wollen wir die Frage studieren, unter welchen Bedingungen eine solche Abbildung *umkehrbar*, also die Gleichung $u = \varphi(x)$ nach x eindeutig auflösbar ist. Mit anderen Worten: Wann können wir das System von m Gleichungen in n Variablen,

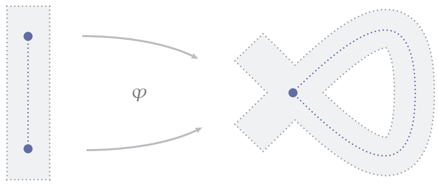
$$\begin{aligned} u_1 &= \varphi_1(x_1, .., x_n), \\ u_2 &= \varphi_2(x_1, .., x_n), \\ &\vdots \\ u_m &= \varphi_m(x_1, .., x_n), \end{aligned}$$

eindeutig nach $x_1, .., x_n$ auflösen?

18.1

Abb 1

Lokal, aber nicht global injektive Abbildung



Den eindimensionalen Fall kennen wir bereits 7.2. Ist I ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f umkehrbar dann und nur dann, wenn f streng monoton ist. In diesem Fall ist $J = f(I)$ ein Intervall, die Umkehrfunktion f^{-1} auf $f(I)$ wohldefiniert und ebenfalls stetig und streng monoton 7.13.

In höheren Dimensionen steht uns das Monotoniekriterium jedoch nicht zur Verfügung, und die Sache ist komplizierter. So kann man zum Beispiel die Abbildung φ in Abbildung 1 so definieren, dass sie *lokal* injektiv ist. Das heißt, jeder Punkt besitzt eine kleine Umgebung, die bijektiv abgebildet wird. Sie ist aber nicht *global* injektiv, denn die beiden hervorgehobenen Punkte links werden auf denselben Punkt rechts abgebildet. Also ist φ insgesamt nicht umkehrbar.

In einem ersten Schritt vereinfachen wir daher die Aufgabe, indem wir sie *lokalisieren* – was ohnehin bei vielen analytischen Problemen eine sinnvolle Herangehensweise ist. Wir fixieren also einen Punkt x_0 und dessen Bild

$$u_0 = \varphi(x_0)$$

und fragen, ob es offene Umgebungen U von x_0 und V von u_0 gibt, in denen die Gleichung $u = \varphi(x)$ eindeutig nach x auflösbar ist.

Beschränken wir uns auf kleine Umgebungen, so können wir in einem zweiten Schritt das Problem *linearisieren*, indem wir die typischerweise *nichtlineare* Abbildung φ lokal durch ihre *Linearisierung* im Punkt x_0 approximieren. Dies ist ohnehin ein wichtiger Spezialfall des allgemeinen Problems und führt zu der Gleichung

$$u = u_0 + D\varphi(x_0)(x - x_0).$$

Die lineare Algebra lehrt nun, dass diese Gleichung *uneingeschränkt* – also ohne weitere Annahmen für alle u – lösbar ist genau dann, wenn $D\varphi(x_0)$ invertierbar ist, also

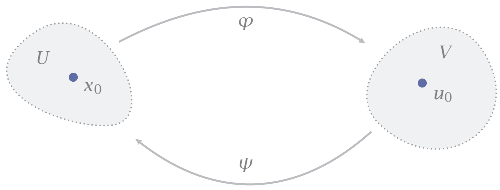
$$\det D\varphi(x_0) \neq 0$$

gilt. Insbesondere müssen u und x von derselben Dimension sein.

Für die lokale Umkehrbarkeit einer differenzierbaren Abbildung φ um einen Punkt x_0 ist es somit sicher sinnvoll zu verlangen, dass $D\varphi(x_0)$ regulär ist. Das fundamentale Ergebnis ist, dass diese Eigenschaft auch *hinreichend* ist.

Abb 2

Abbildung und Umkehrabbildung



1 **Umkehrsatz** *Es sei* $\varphi : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ *stetig differenzierbar und*

$$\det D\varphi(x_0) \neq 0.$$

Dann existieren Umgebungen U *von* x_0 *und* V *von* $u_0 = \varphi(x_0)$ *sowie eine stetig differenzierbare Abbildung* $\psi : V \to U$*, so dass*

$$\psi \circ \varphi = id_U, \qquad \varphi \circ \psi = id_V. \quad ⋊$$

Im Detail bedeutet dies, dass φ die offene Menge U bijektiv auf die offene Menge V abbildet und deren lokale Umkehrabbildung $\psi = (\varphi \mid U)^{-1}$ ebenfalls stetig differenzierbar ist.

▪ Etwas Terminologie

Der Satz über die Existenz lokaler Umkehrabbildungen gehört zu den wichtigsten Hilfsmitteln der Analysis. Wir wollen seine wesentlichen Aspekte deshalb auch begrifflich herausstellen.

Definition *Eine* C^1*-Abbildung* $\varphi : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ *heißt regulär im Punkt* x_0*, und der Punkt selbst regulärer Punkt der Abbildung* φ*, wenn*

$$\det D\varphi(x_0) \neq 0.$$

Die Abbildung φ *heißt regulär, wenn sie in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs regulär ist.* ⋊

Ein nicht-regulärer Punkt heißt *singulärer Punkt*, dort ist $\det D\varphi(x_0) = 0$.

Definition *Sei* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *offen und nicht leer. Eine stetig differenzierbare Abbildung* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *heißt Diffeomorphismus, wenn gilt:*

(i) $\Omega' = \varphi(\Omega)$ *ist offen,*
(ii) $\varphi : \Omega \to \Omega'$ *ist bijektiv,*
(iii) $\varphi^{-1} : \Omega' \to \Omega$ *ist ebenfalls stetig differenzierbar.*

Genauer heißt dann φ *ein Diffeomorphismus von* Ω *auf* Ω'. ⋊

Bemerkung Entsprechend sind *Homöomorphismus* und *Lipeomorphismus* definiert, hierfür ist nur *stetig differenzierbar* durch *stetig* respektive *lipschitzstetig* zu ersetzen. ⊸

A. Eine affine Abbildung

$$\Lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad x \to u = Ax + b$$

ist ein Diffeomorphismus des $\mathbb{R}^n$ genau dann, wenn $\det A \neq 0$.

B. Ist I ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ regulär, so verschwindet die Ableitung f' nirgends. Also ist gemäß dem Satz über Umkehrfunktionen $_{8.15}$ f ein Diffeomorphismus von I auf $I' = f(I)$.

C. Sind $\varphi : \Omega \to \Omega'$ und $\psi : \Omega' \to \Omega''$ Diffeomorphismen, so sind

$$\varphi^{-1} : \Omega' \to \Omega, \qquad \psi \circ \varphi : \Omega \to \Omega''$$

ebenfalls Diffeomorphismen.

D. Eine reguläre Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ kann kein Diffeomorphismus sein.

2 **Notiz** *Ein Diffeomorphismus φ ist in jedem Punkt seines Definitionsbereichs regulär.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ Da φ und φ^{-1} beide differenzierbar sind, können wir auf die Identität $\varphi^{-1} \circ \varphi = id$ die Kettenregel $_{14.7}$ anwenden und erhalten

$$(D\varphi^{-1} \circ \varphi) D\varphi = \mathrm{Id}$$

auf ganz Ω. Dies geht aber nur, wenn $D\varphi$ in jedem Punkt regulär ist. ⟩⟩⟩⟩

Wie bereits am Beispiel von Abbildung 1 bemerkt, gilt die Umkehrung dieser Feststellung im *Globalen* im Allgemeinen *nicht*. Aus der Regularität, einer lokalen Eigenschaft, kann man nicht auf die globale Eigenschaft der Umkehrbarkeit schließlich. Dies ist nur lokal möglich, und das ist die Quintessenz des Umkehrsatzes.

3 **Kurzfassung des Umkehrsatzes** *Lokal um einen regulären Punkt ist eine stetig differenzierbare Abbildung diffeomorph.* ⋊

Das bedeutet natürlich, dass die Einschränkung auf eine hinreichend kleine Umgebung dieses Punktes einen Diffeomorphismus dieser Umgebung auf sein Bild ergibt. Wichtige Beispiele sind Polar- und Kugelkoordinaten, die wir am Ende dieses Abschnitts betrachten.

Rückführung auf einen Spezialfall

Der Beweis des Umkehrsatzes wird übersichtlicher, wenn wir folgenden Spezialfall betrachten. Auf ihn führen wir den allgemeinen Fall zurück.

4 **Spezialfall** *Es sei* $\varphi\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ *stetig differenzierbar und*

$$\varphi(0) = 0, \qquad D\varphi(0) = \mathrm{Id}.$$

Dann ist φ *lokal um* 0 *diffeomorph.* ⋊

⟪⟪ *Beweis des Umkehrsatz mithilfe des Spezialfalls* Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^1-Abbildung mit regulärer Ableitung $\Lambda = D\varphi(x_0)$. Verschieben wir den Nullpunkt nach x_0 mittels der Translation $\tau\colon x \mapsto x + x_0$ und wenden nach φ die affine Transformation $\lambda\colon u \mapsto \Lambda^{-1}(u - u_0)$ mit $u_0 = \varphi(x_0)$ an, so erhalten wir die *normalisierte Abbildung*

$$\tilde{\varphi} = \lambda \circ \varphi \circ \tau\colon\ \tilde{\varphi}(x) = \Lambda^{-1}(\varphi(x + x_0) - u_0).$$

Diese erfüllt die Voraussetzungen des Spezialfalls, denn $\tilde{\varphi}$ ist stetig differenzierbar, $\tilde{\varphi}(0) = 0$, und

$$D\tilde{\varphi}(0) = \Lambda^{-1} D\varphi(x_0) = \mathrm{Id}.$$

Also besitzt $\tilde{\varphi}$ eine stetig differenzierbare lokale Inverse $\tilde{\psi}$. Es gilt also

$$\tilde{\psi} \circ \tilde{\varphi} = \tilde{\psi} \circ \lambda \circ \varphi \circ \tau = id_{U_0},$$
$$\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi} = \lambda \circ \varphi \circ \tau \circ \tilde{\psi} = id_{V_0},$$

mit gewissen Umgebungen U_0 und V_0 von 0. Verknüpfen wir die erste Gleichung von links mit τ und von rechts mit τ^{-1} und verfahren analog in der zweiten Gleichung mit λ, so erhalten wir

$$(\tau \circ \tilde{\psi} \circ \lambda) \circ \varphi = id_U, \qquad U = \tau(U_0)$$
$$\varphi \circ (\tau \circ \tilde{\psi} \circ \lambda) = id_V, \qquad V = \lambda^{-1}(V_0).$$

Somit ist φ ein Diffeomorphismus von U auf V mit der stetig differenzierbaren Umkehrabbildung $\psi = \tau \circ \tilde{\psi} \circ \lambda$. ⟫⟫

Der Umkehrsatz für lipschitzstetige Abbildungen

Andererseits können wir den Spezialfall $_4$ etwas allgemeiner fassen. Es stellt sich heraus, dass der Umkehrsatz bereits innerhalb der Kategorie der lipschitzstetigen Abbildungen gilt, ohne dass der Beweis dadurch komplizierter würde. Für $f\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ und eine Menge Ω im Definitionsbereich von f sei dazu

$$[f]_\Omega \coloneqq \sup_{\substack{u \neq v \\ u,v \in \Omega}} \frac{|f(u) - f(v)|}{|u - v|},$$

wobei $|\cdot|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^n$ sei. Dies ist die bestmögliche Lipschitzkonstante von f auf Ω bezüglich $|\cdot|$. Für konvexes Ω und stetig differenzierbares f ergibt sich diese Konstante aus dem Schrankensatz:

5 **Lemma** *Ist $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar und Ω konvex, so gilt*

$$[f]_\Omega = \|Df\|_\Omega\,,$$

wobei $\|\cdot\|$ die von $|\cdot|$ induzierte Operatornorm bezeichnet. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Mit $u, v \in \Omega$ ist auch $[u, v] \subset \Omega$ aufgrund der Konvexität von Ω. Aufgrund des Schrankensatzes $_{14.16}$ gilt dann

$$|f(u) - f(v)| \leqslant \max_{z \in [u,v]} \|Df(z)\|\, |u - v| \leqslant \|Df\|_\Omega\, |u - v|\,.$$

Also gilt $[f]_\Omega \leqslant \|Df\|_\Omega$. — Umgekehrt gilt für $z \in \Omega$ und $h \neq 0$

$$\begin{aligned} |Df(z)h| &= \lim_{t \to 0} \left| \frac{1}{t}(f(z + th) - f(z)) \right| \\ &\leqslant \lim_{t \to 0} \frac{1}{|t|}\, [f]_\Omega\, |th| = [f]_\Omega\, |h|\,. \end{aligned}$$

Da dies für alle $h \neq 0$ gilt, folgt hieraus $\|Df(z)\| \leqslant [f]_\Omega$. Und da dies für jedes $z \in \Omega$ gilt, folgt auch $\|Df\|_\Omega \leqslant [f]_\Omega$. ⟩⟩⟩⟩

Für eine Abbildung φ wie im Spezialfall $_4$ gilt aufgrund der Stetigkeit der ersten Ableitung

$$[\varphi - id]_{B_r(0)} = \|D\varphi - \mathrm{Id}\|_{B_r(0)} \to 0, \qquad r \to 0.$$

Wird die rechte Seite kleiner als 1, so ist eine solche Abbildung immer injektiv:

Proposition A *Ist $\varphi : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ lipschitzstetig und $[\varphi - id]_\Omega < 1$, so ist φ auf Ω injektiv.* ⋊

⟨⟨⟨⟨ Angenommen, es ist $\varphi(x) = \varphi(y)$ für $x, y \in \Omega$. Dann ist

$$|x - y| = |(\varphi(x) - x) - (\varphi(y) - y)| \leqslant [\varphi - id]_\Omega\, |x - y|\,.$$

Wegen $[\varphi - id]_\Omega < 1$ folgt hieraus $|x - y| = 0$, also $x = y$. ⟩⟩⟩⟩

Das Problem besteht somit nicht im Nachweis der Injektivität von φ, sondern im Nachweis der Stetigkeit der Umkehrabbildung φ^{-1} auf einer offenen Menge. Dies ist gleichbedeutend damit, dass die Abbildung φ selbst *offen* ist:

Definition *Eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ heißt offen, wenn sie jede offene Menge auf eine offene Menge abbildet.* ⋊

Dies zeigen wir im Folgenden, indem wir die Umkehrabbildung innerhalb der Klasse lipschitzstetiger Abbildungen konstruieren.

Proposition B *Sei $\varphi\colon B_r(0) \to \mathbb{R}^n$ lipschitzstetig mit*

$$\varphi(0) = 0, \qquad [\varphi - id]_{B_r(0)} \leqslant 1/4.$$

Dann existiert eine lipschitzstetige Abbildung $\psi\colon B_{r/2}(0) \to B_r(0)$ mit

$$\psi(0) = 0, \qquad [\psi - id]_{B_{r/2}(0)} \leqslant 1/2,$$

so dass $\varphi \circ \psi = id_{B_{r/2}(0)}$. ⋊

▪ Formulierung als Fixpunktproblem

Für den Beweis formulieren wir die Aussage als Fixpunktproblem. Dazu schreiben wir $\varphi = id + \hat{\varphi}$ und die gesuchte Umkehrabbildung als $\psi = id + \hat{\psi}$. Zu lösen ist dann die Gleichung

$$id = \varphi \circ \psi = (id + \hat{\varphi}) \circ (id + \hat{\psi}) = id + \hat{\psi} + \hat{\varphi} \circ (id + \hat{\psi}),$$

was äquivalent ist zu

$$\hat{\psi} = -\hat{\varphi} \circ (id + \hat{\psi}).$$

Zu gegebenem $\hat{\varphi}$ suchen wir also ein $\hat{\psi}$, das in einer hinreichend kleinen Umgebung von 0 definiert ist und diese Gleichung erfüllt.

Die Abbildung $\hat{\psi}$ erscheint hier als *Fixpunkt* des Operators

$$T\colon\ u \mapsto Tu = -\hat{\varphi} \circ (id + u),$$

also als Lösung der *Fixpunktgleichung*

$$Tu = u.$$

Wir haben das *Invertierungsproblem ›Gesucht ist die Inverse der Abbildung φ‹* somit in das *Fixpunktproblem ›Gesucht ist ein Fixpunkt des Operators T‹* umformuliert. Dies ist ein oft angewandter Kunstgriff, da für Fixpunktprobleme vielfältige und weitreichende Sätze zur Verfügung stehen. Einer der vielseitigsten ist der Banachsche Fixpunktsatz, den wir bereits beim Beweis des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes für gewöhnliche Differenzialgleichungen kennengelernt haben. Wir wiederholen ihn hier der Vollständigkeit halber.

6 **Banachscher Fixpunktsatz** *Sei E ein Banachraum mit Norm $\|\cdot\|$, sei X eine abgeschlossene Teilmenge von E, und $T\colon X \to X$ eine Kontraktion. Das heißt, es existiert eine Konstante $\theta \in (0,1)$, so dass*

$$\|Tu - Tv\| \leqslant \theta\,\|u - v\|, \qquad u, v \in X.$$

Dann besitzt T in X genau einen Fixpunkt ξ. Außerdem konverigert für jedes $x_0 \in X$ die Folge $x_n = T^n x_0$ gegen diesen Fixpunkt ξ mit

$$\|x_n - \xi\| \leqslant \frac{\theta^n}{1-\theta}\,\|x_1 - x_0\|, \qquad n \geqslant 1. \quad \rtimes$$

Die Herausforderung bei der Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes besteht natürlich darin, im jeweiligen Fall einen geeigneten Banachraum E und eine geeignete Teilmenge X zu finden. Der folgende Beweis gibt dafür ein Beispiel.