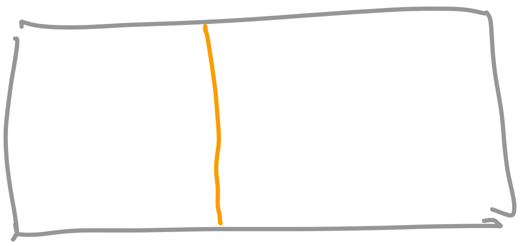
10. Vorlesung 18.11.2021



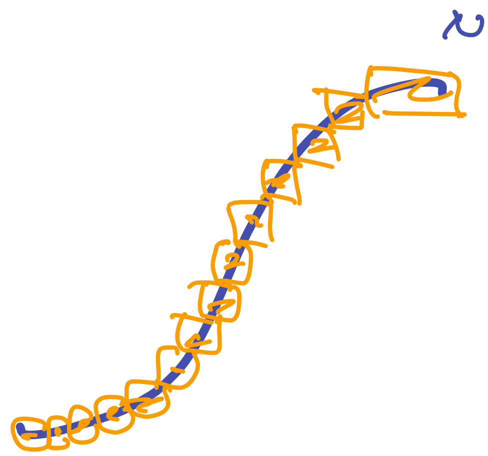
Zu jedem $I \in \mathcal{J}^n$ und jedem $\varepsilon > 0$

ex. offenes Intervall I_* mit

$$I_* \supset I \, ,$$

$$\mu(I_*) < \mu(I) + \varepsilon \, .$$

Bsp in $\mathbb{R}^2$



Bsp $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$: 1.1

$$\lambda(\{v\}) = 0$$

$$\|s\|_{\mathbb{R}^n} < \infty$$

Träger von s :

$$\operatorname{supp}(s) = \overline{\{s \neq 0\}} = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : s(x) \neq 0\}}$$

$\in \mathcal{Z}^n$ kompakt.

Bemerkung: Seien $S_1, \dots, S_n \in \mathcal{J}^n$.

Für S_k: $\underbrace{I_{k,1}, \dots, I_{k,\ell_k}}_{\text{alle Intervalle } \in \mathcal{I}^n}$ Teilintervalle

Dann disjunkte Intervalle

$J_1, \dots, J_r$

$$\begin{cases} \bigcup_{1 \le i \le r} J_i = \bigcup_{k,\ell} I_{k,\ell} \\ J_i \cap I_{k,\ell} \neq \emptyset \implies J_i \subset I_{k,\ell}. \end{cases}$$

Bew.: $J_1, \dots, J_r$ sind aus allen S_k endliches System von Konstruktion. ☐

Beweis: z.z. $\max(s,t)$.

Zu s,t ex. System $I_1, \ldots, I_m$:

$$s = \sum \alpha_k \chi_{I_k}, \quad t = \sum \beta_k \chi_{I_k}$$

Dann gilt:

$$\max(s,t) = \sum_{k=1}^{m} \max(\alpha_k, \beta_k) \, \chi_{I_k}$$

$$\in T^n$$

$\blacksquare$

Bsp: 1. λ Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$:

I_λ = Riemannintegral!

2. m Massenverteilung auf $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$.

$$I_m(f) = \sum_{p \in \Lambda} f(p)\, m(p)$$

Träger von f ist kompakt, $\cap\, \Lambda$ ist endlich

endliche Summe

genau: nur endlich viele $f(p) \neq 0$.

3. Zählmaß ν auf $\mathbb{N}$

Sei $a: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Funktion mit endlichem Träger:

$$I_\nu(a) = \sum_{n \geq 1} a(n)$$

wobei $a(n) = 0$ für n hinreichend groß.

Beweis:

$$|I_\mu(s)| = \left|\sum_{k=1}^{n} c_k\, \mu(A_k)\right|$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} |c_k| \cdot |\mu(A_k)|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |c_k|\, |\mu|(A_k)$$

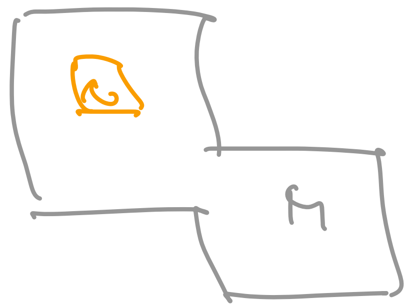
$$= I_{|\mu|}(|s|)$$

$$|s| = \sum |c_k| \chi_{A_k}.$$ ∎

Bemerk: $M, N \in \mathfrak{A}$,

$N \subset M$.

Dann: $M \setminus N =: O \in \mathfrak{A}$



Denn:

$M = N \cup O$

~~disjunkte~~ Vereinigung zulässig für μ

Also:

$$\mu(M) = \mu(N) + \mu(O)$$
$$= \mu(N) + \mu(M \setminus N)$$

$$\Longrightarrow \quad \mu(M \setminus N) = \mu(M) - \mu(N)$$

~~ist~~ ist die Formel sinnvoll.

Falls N unendlich und $\mu(N) = \infty$, dann falsch.

Beweis: Zu zeigen:

$$N = \{x \in \mathbb{R}^n : f_k(x) \longrightarrow \infty\}$$

ist eine Nullmenge.

Sei $I = \lim I_\mu(f_k) < \infty$,

$M > 0$.

Für gegebenes k gilt:

$$E_k = \{f_k > M\} = \{x \in \mathbb{R}^n : f_k(x) > M\}$$

$$\in \mathcal{L}^n$$

Dann:

$$f_k \geq M \cdot \chi_{E_k} \quad \text{auf } \mathbb{R}^n .$$

Damit:

$$I \geq I_\mu(f_k) \geq I_\mu(M \cdot \chi_{E_k})$$

$$= M \cdot I_\mu(\chi_{E_k})$$

$$= M \cdot \mu(E_k) .$$

Also:

$$\mu(E_k) \leq \frac{I}{M}$$

Die S_n wachsen monoton :

und (E_n) wachsen monoton :

$$E_n \subseteq E_{n+1}, \quad \text{für } n$$

Dann gilt:

$$\mathbb{N} \subset \bigcup_{n \geq 0} E_n$$

$$= \underbrace{\bigcup_{n \geq 1} \left(\underline{E_n \setminus E_{n-1}} \right) \cup \underline{E_0}}$$

disjunkt

disjunkt & messbar

Also:

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(E_k \setminus E_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} \left(\mu(E_k) - \mu(E_{k-1}) \right)$$

$$= \mu(E_n) - \mu(E_0)$$

Also:

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(E_k \setminus E_{k-1}) + \mu(E_0) = \mu(E_n) \leq \frac{1}{2}$$

Gilt für jedes n :

$\Rightarrow$

$$\sum_{k\ge 1} \mu(E_k \setminus E_{k+1}) + \mu(B) \le \frac{1}{M}.$$

[illegible]

$$\sum \mu(\,\cdot\,) \le \frac{1}{\lambda}.$$

[illegible] $\varepsilon>0$ [illegible], [illegible] $\frac{1}{M} > 0$ [illegible]: [illegible]

Beweis: Sei $s_0 \ge s_1 \ge s_2 \ge \dots \ge 0$.

wg Monotonie von I_μ:

$$I_\mu(s_0) \ge I_\mu(s_1) \ge \dots \ge 0$$

Genügt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ ex. $n \ge 1$:

$$I_\mu(s_n) < \varepsilon .$$

$$\operatorname{supp}(s_n) \subseteq \operatorname{supp}(s_0) = Q_0 \quad \text{kompakt.}$$

Klar nun:

$$N := \{ \lim_n s_n > 0 \} \subset Q_0$$

ist μ-Nullmenge.

Können annehmen: jedes s_n sei Cost verknüpfte Summe von Kantenintervallen, die Q_0 überdecken.

Sei $\varepsilon > 0$.

Wähle eine Konkurrenzfolge von S_n, wo $S_n < \varepsilon$:

$I_1, I_2, \dots$ überdecken $Q_0 \setminus N$

$J_1, J_2, \dots$ überdecken N

und $\sum_\ell \mu(J_\ell) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Wegen Regularität von μ:

Es ex. offene Intervalle $\tilde{I}_\ell \supset I_\ell$ und $\tilde{J}_\ell \supset J_\ell$ mit

$$\boxed{\sum_{\ell \geq 1} \mu(\tilde{I}_\ell \setminus I_\ell) + \sum_{\ell \geq 1} \mu(\tilde{J}_\ell) < \varepsilon}$$

Die $\tilde{I}_\ell, \tilde{J}_\ell$ bilden eine offene Überdeckung von $\underline{Q_0}$. Kompakt: Heine-Borel:

Es gibt endliche Überdeckung von Q_0:

$$Q_0 \subset \tilde{I}_1 \cup \dots \cup \tilde{I}_r \cup \tilde{J}_1 \cup \dots \cup \tilde{J}_s$$

Es gibt endliche Überdeckung von Q_0:

$$Q_0 \subset \tilde I_1 \cup \dots \cup \tilde I_n \cup \tilde J_1 \cup \dots \cup \tilde J_s$$

Zu jedem $\tilde I_\ell$ existiert ein k_ℓ:

$$s_{k_\ell}|_{I_\ell} < \varepsilon .$$

Sei

$$v = \max(k_1, \dots, k_n) < \infty .$$

Lemma gibt: $\quad I_\mu(s_v) < C \cdot \varepsilon .$

Seien dann:

$$\begin{cases} A = \bigcup_{1 \le \ell \le n} I_\ell , \\ B = \bigcup_{1 \le \ell \le n} (\tilde I_\ell \setminus I_\ell) \cup \bigcup_{1 \le \ell \le s} \tilde J_\ell \end{cases}$$

Dann

$$\chi_A + \chi_B \geq 1 \quad \text{auf } Q_0$$

Also:

$$I_\mu(s_v) \le I_\mu(s_v(\chi_A + \chi_B)) = I_\mu(\chi_A s_v) + I_\mu(\chi_B s_v) .$$

Also:

$$I_\mu(s_n) \le I_\mu\big(s_n(\chi_A + \chi_B)\big)$$
$$= I_\mu(\chi_A s_n) + I_\mu(\chi_B s_n).$$

Aufgrund der Def von n und der Monotonie der s_n:

$$s_n|_{I_k} \le s_{n_k}|_{I_k} < \varepsilon \quad \text{für } I_k$$

$$\Longrightarrow \quad s_n|_A < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad I_\mu(\chi_A s_n) \le \varepsilon\, I_\mu(\chi_{Q_0})$$
$$= \varepsilon\, \mu(Q_0).$$

Zu Bereich:

$$\mu(B) \le \sum_{1 \le k \le n} \mu(\tilde{I}_k \setminus I_k) + \sum \mu(\tilde{J}_k) < \varepsilon$$

$$\Longrightarrow \quad I_\mu(\chi_B s_n) \le \|s_n\|\, \underbrace{I_\mu(\chi_B)}$$
$$\le \|s_0\|\, \varepsilon.$$

Zusammen:

$$\underline{I_\mu(s_n)} \le \varepsilon\, \underline{\mu(Q_0)} + \varepsilon \cdot \underline{\|s_0\|}$$
$$= C \cdot \varepsilon.$$

Beweis: Betrachte

$$c_{n,m} := \max(s_n - t_m, 0) \geq 0$$

$$\in \mathcal{T}_+^{\uparrow}$$

n fest: ist in m monoton fallende Folge:

$$\lim_{m\to\infty} c_{n,m} =_\mu 0.$$

Also (s.o.)

$$\lim_{m\to\infty} I_\mu(c_{n,m}) = 0.$$

Wegen $c_{n,m} \geq s_n - t_m$ gilt ~~monoton~~ gilt

$$I_\mu(c_{n,m}) \geq I_\mu(s_n) - I_\mu(t_m),$$

also

$$I_\mu(t_m) \geq I_\mu(s_n) - I_\mu(c_{n,m}), \quad m \geq n.$$

Für alle m:

$$\lim_{m\to\infty} I_\mu(t_m) \geq I_\mu(s_n) - \underbrace{\lim_{m\to\infty} I_\mu(c_{n,m})}_{0}$$

$$= I_\mu(s_n)$$

Für alle n: $\quad$ — " — $\geq \lim_{n\to\infty} I_\mu(s_n)$. ∎