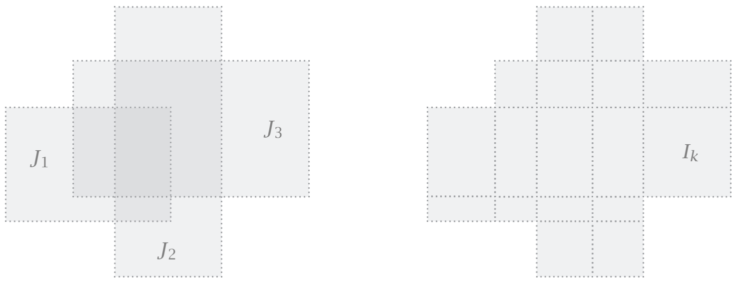
Abb 6 Darstellung einer zulässigen Menge



20.2 Treppenfunktionen

Wie beim Cauchyintegral definieren wir das Lebesgueintegral zunächst für besonders einfache Funktionen. Die Klasse dieser Funktionen hängt nicht vom Maß μ ab.

Definition *Eine Treppenfunktion auf dem $\mathbb{R}^n$ ist eine Funktion der Gestalt*

$$s = \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} c_k \chi_{I_k}$$

mit endlich vielen Intervallen $I_k \in \mathfrak{J}^n$ und reellen Zahlen $c_k \in \mathbb{R}$. Der Raum aller solchen Treppenfunktionen wird mit $\mathcal{T}^n$ bezeichnet. ⋊

Jede Treppenfunktion s nimmt nur endlich viele Werte an und ist damit *beschränkt*. Ihr *Träger*, definiert als die *abgeschlossene* Menge

$$\operatorname{supp}(s) \coloneqq \{s \neq 0\}^- = \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) \neq 0\}^-,$$

ist ebenfalls beschränkt, somit kompakt, und eine zulässige Menge.

Jede Treppenfunktion s besitzt unendlich viele solcher Darstellungen. Insbesondere gibt es auch immer Darstellungen mit disjunkten Intervallen I_k [8]. Diese nennen wir ein *mit s verträgliches System*, und die einzelnen Intervalle heißen *Konstanzintervalle* von s. Ein gemeinsames verträgliches System gibt es auch für jede endliche Zahl von Treppenfunktionen:

9 **Lemma** *Zu je endlich vielen Treppenfunktionen gibt es immer ein gemeinsames verträgliches System von Konstanzintervallen.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Seien $s_1, .., s_n$ Treppenfunktionen und $I_{k,1}, .., I_{k,l_k}$ die Konstanzintervalle von s_k. Die Vereinigung dieser endlich vielen Intervalle ist eine zulässige Menge. Es gibt daher [8] paarweise disjunkte Intervalle $J_1, .., J_r$ so, dass

$$\bigcup_{1\leqslant i\leqslant r} J_i = \bigcup_{1\leqslant k\leqslant n}\ \bigcup_{1\leqslant l\leqslant l_k} I_{k,l},$$

wobei jedes J_i ganz oder gar nicht in jedem dieser $I_{k,l}$ enthalten ist. Somit ist jedes J_i Konstanzintervall jeder Treppenfunktion s_k. Also bildet $J_1,..,J_r$ ein mit allen $s_1,..,s_n$ verträgliches System. ⟩⟩⟩⟩⟩

10 **Lemma** *Sind s und t Treppenfunktionen, so sind es auch αs für $\alpha\in\mathbb{R}$ sowie*

$$s+t,\quad st,\quad \max(s,t),\quad \min(s,t),\quad |s|.$$

Somit bildet $\mathcal{T}^n$ einen reellen Vektorraum, sogar eine reelle Algebra. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Betrachte zum Beispiel $\max(s,t)$. Wählen wir zu s und t ein gemeinsames verträgliches System von Konstanzintervallen $I_1,..,I_m$ [9], so ist

$$s = \sum_{1\leqslant k\leqslant m} a_k\chi_{I_k},\qquad t = \sum_{1\leqslant k\leqslant m} b_k\chi_{I_k}.$$

Dann gilt

$$\max(s,t) = \sum_{1\leqslant k\leqslant m} \max(a_k,b_k)\chi_{I_k}.$$

Also ist $\max(s,t)$ ebenfalls eine Treppenfunktion. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Integral

Das Lebesgueintegral einer Treppenfunktion wird wie beim Cauchyintegral definiert. Der einzige Unterschied ist, dass wir Intervalle mit einem allgemeineren Maß als nur dem Volumenmaß messen.

Definition *Sei*

$$s = \sum_{1\leqslant k\leqslant m} c_k\chi_{I_k}$$

eine Treppenfunktion mit disjunkten Intervallen $I_k\in\mathcal{J}^n$. Dann ist das Lebesgueintegral von s bezüglich eines Maßes μ oder kurz das μ-Integral von s definiert als die reelle Zahl

$$I_\mu(s) \coloneqq \sum_{1\leqslant k\leqslant m} c_k\mu(I_k).\qquad ⋊$$

Das Integral von Treppenfunktionen ist immer *endlich*, da alle Intervalle beschränkt sind und die Summe endlich ist.

Diese Definition ist natürlich erst gerechtfertigt, wenn wir zeigen, dass der Wert des Integrals nicht von der Darstellung von s abhängt. Der Beweis beruht darauf, dass es zu je zwei verschiedenen verträglichen Systemen von Konstanzintervallen einer Treppenfunktion immer ein weiteres solches System gibt, dessen

Intervalle ganz oder gar nicht in den vorliegenden Intervallen enthalten sind 9 . Der Rest ist dann Routine.

▷ a. Für das Längenmaß λ ist dies das Cauchyintegral 10.1 .

b. Für eine Masseverteilung m auf einer diskreten Menge Λ ist

$$I_m(s) = \sum_{p\in\Lambda} s(p)m(p),$$

wobei wegen der Kompaktheit des Trägers von s die Summe sich nur über die endlich vielen Punkte in $\Lambda \cap \operatorname{supp}(s)$ erstreckt. Die Summe ist also endlich, auch wenn Λ keine endliche Menge ist.

c. Bezüglich des Zählmaßes ν auf $\mathbb{N}$ ist jede Funktion $a\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit beschränktem Träger eine Treppenfunktion, und

$$I_\nu(a) = \sum_{n\geqslant 1} a(n). \quad ◁$$

11 **Satz** *Das μ-Integral auf $\mathcal{T}^n$ ist linear und monoton, und es gilt die Dreiecksungleichung. Für Treppenfunktionen s,t und reelle Zahlen α gilt also die*

(i) *Linearität:* $I_\mu(\alpha s + t) = \alpha I_\mu(s) + I_\mu(t)$,

(ii) *Monotonie:* $s \leqslant t \quad \Rightarrow \quad I_\mu(s) \leqslant I_\mu(t)$,

(iii) *Dreiecksungleichung:* $|I_\mu(s)| \leqslant I_\mu(|s|)$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Die letzten beiden Eigenschaften folgen aus der Positivität des Maßes. So ist zum Beispiel mit einem verträglichen Intervallsystem

$$|I_\mu(s)| = \left| \sum_{1\leqslant k\leqslant m} c_k \mu(I_k) \right| \leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant m} |c_k|\, \mu(I_k) = I_\mu(|s|).$$

Alles andere ist Routine. ⟩⟩⟩⟩⟩

▪ Ausdehnung des Maßes

Die charakteristische Funktion einer zulässigen Menge ist ebenfalls eine Treppenfunktion 8 . Wir können damit jedes Intervallmaß μ ausdehnen zu einer Funktion

$$\tilde{\mu}: \mathcal{Z}^n \to [0,\infty), \quad \tilde{\mu}(M) := I_\mu(\chi_M).$$

Für ein Intervall $I \in \mathcal{J}^n$ gilt insbesondere

$$\tilde{\mu}(I) = I_\mu(\chi_I) = 1 \cdot \mu(I) = \mu(I),$$

denn χ_I ist eine Treppenfunktion mit Konstanzintervall I und Wert 1. Somit gilt $\tilde{\mu}|\mathcal{J}^n = \mu$, und $\tilde{\mu}$ definiert eine Fortsetzung von μ auf $\mathcal{Z}^n$. Im Weiteren schreiben wir hierfür ebenfalls wieder μ.

12 **Satz** *Die auf $\mathcal{Z}^n$ ausgedehnte Funktion μ ist ebenfalls additiv, monoton und regulär. Für zulässige Mengen M und N mit $N \subset M$ gilt außerdem*

$$\mu(M \setminus N) = \mu(M) - \mu(N). \quad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Sind M und N zulässig und $N \subset M$, so ist auch $O = M \setminus N$ zulässig [7], und $M = N \cup O$ ist eine disjunkte Vereinigung zulässiger Mengen. Aufgrund der Additivität ist dann

$$\mu(M) = \mu(N) + \mu(O) = \mu(N) + \mu(M \setminus N).$$

Da alle Terme *endlich* sind, folgt hieraus die letzte Behauptung. Alles Weitere ist als Übung überlassen. ⟩⟩⟩⟩⟩

20.3 Drei Hilfssätze

Für den weiteren Aufbau der Theorie benötigen wir drei Resultate über Folgen von nichtnegativen Treppenfunktionen. Die ersten beiden werden auch *erster und zweiter Hauptsatz* von Lebesgue bezeichnet.

Mit $\mathcal{T}_+^n$ bezeichnen wir im Folgenden den Raum aller nichtnegativen Treppenfunktionen.

13 **Lemma A** *Sei (s_k) eine steigende Folge in $\mathcal{T}_+^n$. Gilt*

$$\lim_{k\to\infty} I_\mu(s_k) < \infty,$$

so gilt auch $\lim_{k\to\infty} s_k <_\mu \infty$. $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ Zu zeigen ist, dass

$$N = \{x \in \mathbb{R}^n : s_k(x) \to \infty\}$$

eine Nullmenge bildet. Sei dazu $I = \lim I_\mu(s_k) < \infty$ und $M > 0$. Für jedes k ist

$$E_k = \{s_k > M\} \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n : s_k(x) > M\}$$

die Vereinigung endlich vieler Konstanzintervalle von s_k und damit zulässig. Ferner ist $s_k \geqslant M\chi_{E_k}$ und deshalb

$$I \geqslant I_\mu(s_k) \geqslant I_\mu(M\chi_{E_k}) = MI_\mu(\chi_{E_k}) = M\mu(E_k).$$

Für alle k gilt somit

$$\mu(E_k) \leqslant \frac{I}{M}. \tag{1}$$

Wegen der Monotonie der Folge (s_k) bildet (E_k) eine monoton steigende Folge zulässiger Mengen, und es gilt

$$N \subset \bigcup_{k \geqslant 0} E_k = \bigcup_{k \geqslant 1} (E_k \setminus E_{k-1}) \cup E_0.$$

Die Mengen E_0 und $E_k \setminus E_{k-1}$ für $k \geqslant 1$ sind sämtlich zulässig und disjunkt, für deren Maße gilt deshalb 12

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(E_k \setminus E_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (\mu(E_k) - \mu(E_{k-1})) = \mu(E_n) - \mu(E_0).$$

Zusammen mit (1) folgt hieraus

$$\sum_{k \geqslant 1} \mu(E_k \setminus E_{k-1}) + \mu(E_0) \leqslant \frac{I}{M}.$$

Stellen wir jetzt noch jede dieser Mengen als endliche Vereinigung disjunkter Intervalle dar 8, so erhalten wir eine abzählbare Familie disjunkter Intervalle, die N überdecken und deren Maßsumme kleiner ist als I/M. Da I fest und M beliebig ist, ist N eine Nullmenge. ⟫⟫⟫

14 **Lemma B** *Sei (s_k) eine fallende Folge in $\mathcal{T}_+^n$. Gilt*

$$\lim_{k \to \infty} s_k =_\mu 0,$$

so gilt auch $\lim_{k \to \infty} I_\mu(s_k) = 0$. ⋊

⟪⟪⟪ Sei $s_0 \geqslant s_1 \geqslant s_2 \geqslant .. \geqslant 0$ eine solche Folge. Aufgrund der Monotonie des μ-Integrals 11 gilt dann auch

$$I_\mu(s_0) \geqslant I_\mu(s_1) \geqslant I_\mu(s_2) \geqslant .. \geqslant 0.$$

Zum Beweis des Lemmas genügt es daher zu zeigen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \geqslant 0$ gibt, so dass $I_\mu(s_n) < \varepsilon$.

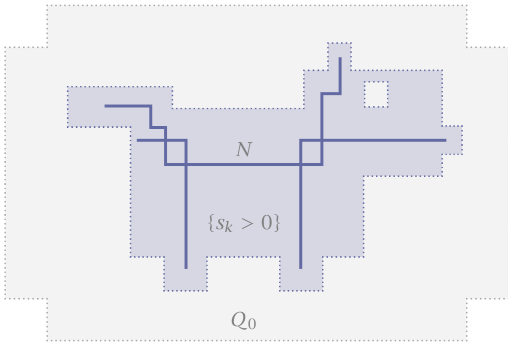
Aufgrund der Monotonie und Nichtnegativität der Treppenfunktionen s_k sind ihre Träger alle enthalten im Träger $Q_0 = \operatorname{supp}(s_0)$. Diese Menge ist zulässig sowie abgeschlossen und beschränkt, also kompakt. Außerdem existiert aufgrund der Monotonie der Folge der punktweise Limes der s_k, und nach Voraussetzung ist $N = \{\lim s_k > 0\}$ eine Nullmenge. Diese ist notwendigerweise in Q_0 enthalten.

Wir können auch noch annehmen, dass jedes s_k ein verträgliches System von Konstanzintervallen besitzt, welches Q_0 überdeckt. Gegebenenfalls ergänzen wir endlich viele geeignete Intervalle und weisen s_k dort den Wert 0 zu.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wir fassen dann alle Konstanzintervalle aller s_k, auf denen diese kleiner als ε sind, zu einer abzählbaren Familie zusammen und bezeichnen

Abb 7

Zum Beweis von Lemma B



sie mit $I_1, I_2, \ldots$ Diese überdecken $Q_0 \setminus N$, da dort $s_k \searrow 0$. Ferner sei $J_1, J_2, \ldots$ eine Überdeckung von N durch n-Intervalle mit der Eigenschaft, dass

$$\sum_{l \geqslant 1} \mu(J_l) < \varepsilon/2.$$

Aufgrund der Regularität von μ existieren dazu *offene* Intervalle $\tilde{I}_l \supset I_l$ und $\tilde{J}_l \supset J_l$ mit

$$\sum_{l \geqslant 1} \mu(\tilde{I}_l \setminus I_l) + \sum_{l \geqslant 1} \mu(\tilde{J}_l) < \varepsilon.$$

Beide Familien zusammen bilden eine offene Überdeckung der kompakten Menge Q_0. Nach dem Satz von Heine-Borel 10.10 – der im $\mathbb{R}^n$ genau wie in $\mathbb{R}$ gilt und bewiesen wird A-2 – gibt es auch eine endliche Teilüberdeckung. Es gilt also

$$Q_0 \subset \tilde{I}_1 \cup \ldots \cup \tilde{I}_r \cup \tilde{J}_1 \cup \ldots \cup \tilde{J}_s$$

mit einer geeigneten Auswahl und Umnummerierung dieser Intervalle.

Zu jedem $\tilde{I}_l$ existiert nun ein Index k_l, so dass $s_{k_l} | I_l < \varepsilon$. Wir setzen $n = \max(k_1, \ldots, k_r)$ und zeigen, dass $I_\mu(s_n)$ klein wird. Sei dazu

$$A = \bigcup_{1 \leqslant l \leqslant r} I_l, \qquad B = \bigcup_{1 \leqslant l \leqslant r} (\tilde{I}_l \setminus I_l) \;\cup \bigcup_{1 \leqslant l \leqslant s} \tilde{J}_l.$$

Dann ist $\chi_A + \chi_B \geqslant 1$ auf Q_0 und deshalb

$$I_\mu(s_n) \leqslant I_\mu((\chi_A + \chi_B)s_n) = I_\mu(\chi_A s_n) + I_\mu(\chi_B s_n).$$

Aufgrund der Wahl von n und der Monotonie der Folge (s_k) ist

$$s_n | I_l \leqslant s_{k_l} | I_l < \varepsilon$$

für jedes l und deshalb auch $s_n | A < \varepsilon$. Also gilt

$$I_\mu(\chi_A s_n) \leqslant \varepsilon I_\mu(\chi_{Q_0}) = \varepsilon \mu(Q_0).$$

20.14

Andererseits gilt

$$\mu(B) \leqslant \sum_{1 \leqslant l \leqslant r} \mu(\tilde{I}_l \setminus I_l) + \sum_{1 \leqslant l \leqslant s} \mu(\tilde{J}_l) < \varepsilon$$

und deshalb

$$I_\mu(\chi_B s_n) \leqslant \|s_n\| \, I_\mu(\chi_B) \leqslant \|s_0\| \, \mu(B) \leqslant \varepsilon \, \|s_0\| \,,$$

wobei $\|\cdot\|$ die Supremumsnorm bezeichnet. Also gilt insgesamt

$$I_\mu(s_n) \leqslant \varepsilon(\mu(Q_0) + \|s_0\|).$$

Da $\mu(Q_0)$ und $\|s_0\|$ unabhängig von n sind, ist die Behauptung bewiesen. ⟩⟩⟩⟩⟩

15 **Lemma C** *Seien $(s_k), (t_k)$ zwei monoton steigende Folgen in $\mathcal{T}^n_+$. Gilt*

$$\lim_{k\to\infty} s_k \leqslant_\mu \lim_{k\to\infty} t_k,$$

so gilt auch $\lim_{k\to\infty} I_\mu(s_k) \leqslant \lim_{k\to\infty} I_\mu(t_k)$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Betrachte

$$u_{n,m} \coloneqq \max(s_n - t_m, 0).$$

Dies sind nichtnegative Treppenfunktionen, die für jedes feste n bezüglich m monoton fallen mit $\lim_{m\to\infty} u_{n,m} =_\mu 0$. Also gilt mit Lemma B $_{14}$ auch

$$\lim_{m\to\infty} I_\mu(u_{n,m}) = 0.$$

Wegen $u_{n,m} \geqslant s_n - t_m$ gilt andererseits $_{11}$ $I_\mu(u_{n,m}) \geqslant I_\mu(s_n) - I_\mu(t_m)$, also

$$I_\mu(t_m) \geqslant I_\mu(s_n) - I_\mu(u_{n,m})$$

für alle m. Also gilt auch $_{5.9}$

$$\lim_{m\to\infty} I_\mu(t_m) \geqslant I_\mu(s_n) - \lim_{m\to\infty} I_\mu(u_{n,m}) = I_\mu(s_n).$$

Da dies für jedes n gilt, muss auch $\lim_{m\to\infty} I_\mu(t_m) \geqslant \lim_{n\to\infty} I_\mu(s_n)$ gelten. Dies gilt auch für uneigentliche Grenzwerte. ⟩⟩⟩⟩⟩