11. Vorlesung 24.11.2021

Bsp:

1. $I \in \mathcal{J}^n$: $\chi_I \in \mathcal{U}^\uparrow(\mu)$.

2. Dirichletfunktion:

   $\delta = \chi_{\mathbb{Q}}$ ist fa monoton approx.

   $\in \mathcal{U}^\uparrow(\lambda)$.

3. Jede stetige Funktion $\mathbb{R} \to [0,\infty)$

   ist $\mathcal{U}^\uparrow(\lambda)$.

4. Dann gilt auch $f \equiv \infty$.

5. Die charakteristische F. einer Cantormenge

   $\subset \mathbb{R}$ ist nicht fa monoton approx.

<u>Vereinbarung</u>:

$$\text{"}\,0 \cdot \infty = 0\,\text{"}$$

Integral
Def. Grenze

Wert ⇝ Funktion

<u>Beweis</u>: z.z. uv:

Seien (s_n), (t_n) wachsende Folgen in T_+.

Dann auch

$$s_n t_n \nearrow \quad , \quad \text{da } s_n \geq 0, \; t_n \geq 0$$

Ann

$$s_n \uparrow_\mu u \quad , \quad t_n \uparrow_\mu v$$

Folgt:

$$s_n t_n \uparrow_\mu uv \, .$$

Also: $\quad uv \in \mathcal{L}^+(\mu)$. $\boxtimes$

Beweis: Betrachte zweite Folge (t_k) ab:

Sei (t_k) eine andere Folge:

$s_k \uparrow_\mu u$, $\qquad t_k \uparrow_\mu u$

Dann $\boxed{\lim s_k =_\mu \lim t_k}$

Lemma C: wird $\leq_\mu$ und $\geq_\mu$

$$\begin{cases} I_\mu(s_k) \leq I_\mu(t_k) \\ I_\mu(s_k) \geq I_\mu(t_k) \end{cases}$$

$=$

$\square$

Bsp:

1. $s \in T_+^1$.

Dann $I_\lambda(s)$ ~~genauso~~ wie für Treppenfunktion, denn

$$s_k = s, \quad k \geq 1$$

ist approximierende Folge. ✓

2. Dirichlet: $f = \chi_{\mathbb{Q}}$:

$$I_\lambda(f) = 0.$$

3. Stetige Funktion $f : [a,b] \to [0,\infty)$ ist gem. Limes von Treppenfunktion in T_+^1

und kann sei steigende Folge:

$$s_k \uparrow f.$$

$$I_\lambda(s_k) \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \int_a^b f \\ I_\lambda(f) \end{array} \right\} =$$

4. Jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ erfüllt die Voraussetzungen (Riemann-Integral kann ∞ sein).

Prop: Suppose

$s_n \uparrow_\mu u, \quad t_n \uparrow_\mu v, \quad c \ge 0$

Then:

$cs_n + t_n \uparrow_\mu cu + v$

and in fact:

$$I_\mu(cu+v) = \lim I_\mu(cs_n + t_n)$$

$$= \lim \left(I_\mu(cs_n) + I_\mu(t_n) \right)$$

$$= \lim c\, I_\mu(s_n) + \lim I_\mu(t_n)$$

$$= c\, I_\mu(u) + I_\mu(v).$$

□

Rem: and validity for

$c = 0, \quad I_\mu(s_n) = \infty$ □

Lemă: Fie șirurile de fcț. simple pozitive
$(s_{n,\ell})_{\ell \geq 1}$ în T_+^n :

$$s_{n,1} \leq s_{n,2} \leq \dots \uparrow_\mu u_n$$

Fie $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \in T_+^n$

$$f_m := \max \{ s_{k,\ell} : 1 \leq k,\ell \leq m \}$$

crescător monoton simplă. Dacă și:

$$f_m \leq_\mu u_m \leq_\mu u, \quad m \geq 1.$$

Este și mai

$$f_m \uparrow_\mu u :$$

Dem: presupunem și adev. în p:

$$f_m(p) \leq \lim f_m(p) < u(p), \quad m \geq 1.$$

Deci și în mod fix mai $s_{k,\ell}(p)$.

Iar pentru p fix mai (sup), avem

$$s_{k,\ell} \nearrow u_k, \quad \ell \to \infty.$$

Claim: $f_n \uparrow_\mu u$

Proof: $u \in \mathcal{U}^n(\mu)$,

$$I_\mu(u) = \lim I_\mu(f_n)$$

Also: $f_n \le_\mu e_n \le_\mu u$

Monotonicity:

$$I_\mu(f_n) \le I_\mu(e_n) \le I_\mu(u)$$

Thus:

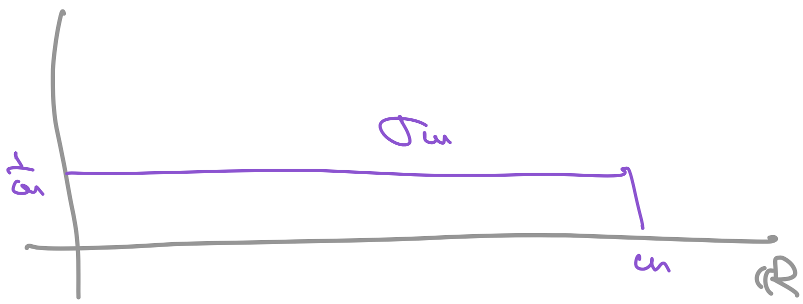
$$\lim_{n\to\infty} I_\mu(e_n) = I_\mu(u).$$

∎

Bem.: Gilt nicht für nicht-monotone Folgen, selbst dann, wenn kon. glm.:

Bsp.:

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\,\chi_{[0,n)}$$



$$\sigma_n \rightrightarrows 0$$

$$I_\mu(\sigma_n) = \frac{1}{n} \cdot \mu([0,n)) = 1,$$

für alle n.

Aber:

$$I_\mu(\sigma_n) \not\longrightarrow I_\mu(\lim \sigma_n) = I_\mu(0) = 0.$$

Beweis:

$$f =_\mu u - v \qquad \Big\}\ \mu\text{-f.ü. gleich}$$

$$g =_\mu \tilde{u} - \tilde{v} \qquad \text{"formal difference"}$$

Dann

$$\in \mathcal{M}^+(\mu) \left\{ \begin{aligned} f+g &=_\mu (u+\tilde{u}) - (v+\tilde{v}) \\ f-g &=_\mu (u+\tilde{v}) - (v+\tilde{u}) \\ fg &=_\mu \underbrace{(u\tilde{u} + v\tilde{v}) - (u\tilde{v} + v\tilde{u})}_{\text{wohldefinierte Definition}} \end{aligned} \right.$$

in $\mathcal{M}^+(\mu)$

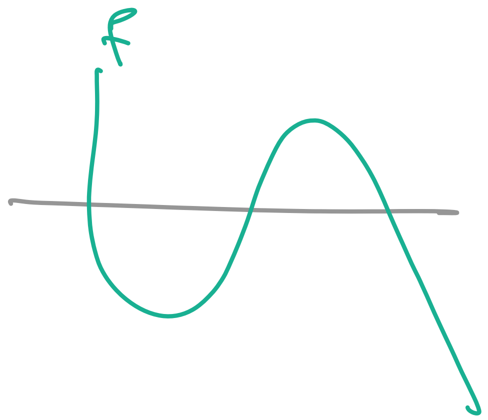
$$\mathcal{M}^+(\mu) \ni cf = \begin{cases} cu - cv, & c \geq 0, \\ (-c)v - (-c)u & c < 0 \end{cases}$$

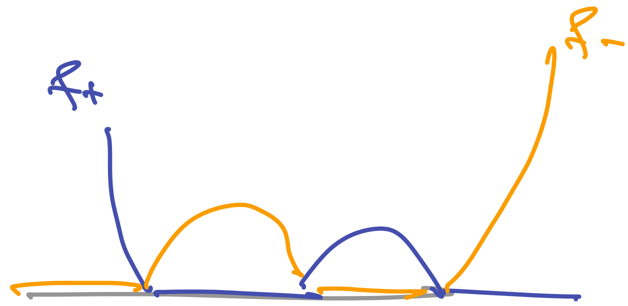
$\square$

Def:

$$f_+ := \max(f, 0)$$

$$f_- := \max(-f, 0) \geq 0$$





Dann gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} f &= f_+ - f_- \\ |f| &= f_+ + f_- \end{aligned}}$$

Beweis: Sei

$$f = u - v.$$

Dann $\max(u,v)$ μ-n. f.ü. endlich

in $U^{\uparrow}(\mu)$

Also:

$$f_+ = \max(u,v) - v$$

$$f_- = \underbrace{\max(u,v) - u}_{\text{endl. Darstellung}}$$

$\Big\}\in U^{\uparrow}(\mu)$

Damit für

$$|f| = f_+ + f_-$$

$\max(f,g)$, $\min(f,g)$. ✓

Bem: Folgerung:

$$f =_\mu u - v$$
$$=_\mu \tilde{u} - \tilde{v}.$$

Bew:

$$u + \tilde{v} =_\mu v + \tilde{u} \qquad \text{in } \mathcal{L}^1(\mu)$$

Also:

$$I_\mu(u) + I_\mu(\tilde{v}) = I_\mu(u + \tilde{v})$$
$$= I_\mu(v + \tilde{u})$$
$$= I_\mu(v) + I_\mu(\tilde{u}).$$

Fall 2B: $I_\mu(u) = \infty$, ~~dann~~ $I_\mu(v) < \infty$

Dann $I_\mu(\tilde{u}) = \infty$, $I_\mu(\tilde{v}) < \infty$

Sonst:

$$I_\mu(u) - I_\mu(v) = I_\mu(\tilde{u}) - I_\mu(\tilde{v}). \qquad \square$$

Bem:

$$f \in \mathcal{M}^0(\mu) \cap \mathcal{L}^1(\mu)$$

dasselbe Integral wie zuvor.

Bsp:

1. $\mathcal{L}^1(\mu) \subset \mathcal{M}^*_s(\mu)$.

2. $\exp$ λ-summierbar : $\mathcal{M}^*_s(\lambda)$.

3. Die Sinusfunktion $\sin$ ist nicht λ-summierbar!

4. $f \in \mathcal{M}^*(\mu)$ & $f \geq_\mu 0$ $\Longrightarrow f \in \mathcal{M}^*_s(\mu)$.

C

$$\mathcal{L}^1(\mu) \subsetneq \mathcal{M}^*_s(\mu) \subset \mathcal{M}^*(\mu)$$

cf

$u = u - 0$

Bem.: $f = u - v$ wobei Darstellung.

Dann gilt

$$f = \sum_{k\geq 1} (u_k - v_k),$$

$u_k, v_k \in L^+(\mu)$, $u_k \geq v_k$,

$$\sum_k \int u_k < \infty.$$

Für jedes $k \geq 1$ ex. eine Treppenfkt. f_k:

$$0 \leq f_k \leq v_k,$$

$$\int (v_k - f_k) < \frac{1}{2^k}, \quad k \geq 1.$$

Dann:

$$\left.\begin{array}{l} \tilde{u}_k = u_k - f_k \geq 0 \\ \tilde{v}_k = v_k - f_k \geq 0 \end{array}\right\} \in L^+(\mu)$$

Also

$$\tilde{u} = \sum_{k\geq 1} \tilde{u}_k, \quad \tilde{v} = \sum_{k\geq 1} \tilde{v}_k$$

in $L^+(\mu)$ mit $\int$ ...

Dann gilt:

$$f = \tilde{u} - \tilde{v}$$

und

$$\int \tilde{v} = \sum \int \tilde{v}_k = \sum \int (v_k - f_k) < \sum \frac{1}{2^k}$$