20.4 Monoton approximierbare Funktionen

Bis jetzt gingen wir genau so vor wie bei der Definition des Cauchyintegrals, abgesehen vom Bezug auf ein allgemeines Maß. Der entscheidende Unterschied ergibt sich nun durch die Art, wie das μ-Integral von den Treppenfunktionen auf eine größere Klasse von Funktionen ausgedehnt wird.

Dazu betrachten wir zuerst Funktionen, die sich punktweise durch monoton steigende Folgen von nichtnegativen Treppenfunktionen approximieren lassen. Diese Funktionen sind also *per definitionem* nichtnegativ und dürfen auch den Wert ∞ annehmen.

Definition *Eine Funktion $u\colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt μ-monoton approximierbar, wenn es eine μ-monoton steigende Folge (s_k) in $\mathcal{T}_+^n$ gibt, so dass*

$$u =_\mu \lim_{k\to\infty} s_k .$$

Der Raum dieser Funktionen wird mit $\mathcal{U}^n(\mu)$ bezeichnet. $\rtimes$

A. Für jedes Intervall I gilt $\chi_I \in \mathcal{U}^n(\mu)$ $_{\text{A-14}}$.
B. Die Dirichletfunktion $\delta = \chi_{\mathbb{Q}}$ ist λ-monoton approximierbar $_{\text{A-7}}$.
C. Jede nichtnegative stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ ist in $\mathcal{U}^1(\lambda)$ $_{\text{A-14}}$.
D. Auch die Funktion $f \equiv \infty$ ist μ-monoton approximierbar.
E. Die charakteristische Funktion einer Cantormenge ist *nicht* λ-monoton approximierbar $_{\text{A-20}}$.

Multiplizieren wir eine solche Funktion mit 0, so können Ausdrücke der Form $0\cdot\infty$ auftreten. Im Rahmen der Integrationstheorie ist es sinnvoll, solchen Ausdrücken den Wert 0 zuzuweisen, was wir von nun an tun werden.

16 **Lemma** *Sind u und v in $\mathcal{U}^n(\mu)$, so sind es auch cu für $c \geqslant 0$ sowie*

$$u+v, \quad uv, \quad \max(u,v), \quad \min(u,v). \quad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨ Sind zum Beispiel (s_k) und (t_k) monoton steigende Folgen in $\mathcal{T}_+^n$, so ist es auch $(s_k t_k)$, da nur Produkte nichtnegativer reeller Zahlen auftreten. Aus $s_k \nearrow_\mu u$ und $t_k \nearrow_\mu v$ folgt dann auch $s_k t_k \nearrow_\mu uv$. Entsprechend alles Übrige. ⟩⟩⟩⟩

Das Integral für Funktionen in $\mathcal{U}^n(\mu)$ wird in naheliegender Weise erklärt.

Definition *Ist $u \in \mathcal{U}^n(\mu)$ der punktweise Grenzwert einer μ-monoton steigenden Folge (s_k) in $\mathcal{T}_+^n$, so heißt*

$$I_\mu(u) \coloneqq \lim_{k\to\infty} I_\mu(s_k)$$

das Lebesgueintegral von f bezüglich μ oder kurz μ-Integral von u. Dieses kann auch den Wert ∞ annehmen. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Dieses Integral hängt nicht von der Wahl der Folge ab. Sei (t_k) eine weitere steigende Folge in $\mathcal{T}_+^n$ mit $t_k \nearrow_\mu u$. Dann gilt notwendigerweise

$$\lim s_k =_\mu \lim t_k.$$

Wenden wir Lemma C 15 mit $\leqslant_\mu$ und $\geqslant_\mu$ anstelle von $=_\mu$ an, so erhalten wir

$$\lim I_\mu(s_k) \leqslant \lim I_\mu(t_k), \qquad \lim I_\mu(s_k) \geqslant \lim I_\mu(t_k).$$

Also sind beide Grenzwerte gleich. ⟩⟩⟩⟩⟩

▷ A. Für eine Treppenfunktion $s \in \mathcal{T}_+^n$ stimmt dieses Integral mit dem zuvor definierten überein, denn die konstante Folge (s) ist eine geeignete approximierende Folge.

B. Für die Dirichletfunktion δ gilt $I_\lambda(\delta) = 0$.

C. Eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to [0,\infty)$ ist der gleichmäßige Limes einer steigenden Folge von Treppenfunktionen in $\mathcal{T}_+^n$ A-13. Setzen wir also f außerhalb von $[a,b]$ durch Null zu einer Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ fort, so stimmen Cauchy- und Lebesgueintegral überein:

$$\int_a^b f = I_\lambda(f).$$

D. Eine stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ besitzt immer ein λ-Integral. Dies kann auch den Wert ∞ annehmen und stimmt mit dem uneigentlichen Cauchyintegral von f überein A-11. ◁

17 **Lemma** *Für $u, v \in \mathcal{U}^n(\mu)$ und $c \geqslant 0$ gilt*

$$I_\mu(cu + v) = cI_\mu(u) + I_\mu(v).$$

Ist $u \leqslant_\mu v$, so gilt ferner $I_\mu(u) \leqslant I_\mu(v)$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Sind (s_k) und (t_k) monoton steigende Folgen von nichtnegativen Treppenfunktionen mit $s_k \nearrow_\mu u$ und $t_k \nearrow_\mu v$, so ist $(cs_k + t_k)$ eine solche Folge mit $cs_k + t_k \nearrow_\mu cu + v$, und es gilt

$$\begin{aligned} I_\mu(cu + v) &= \lim I_\mu(cs_k + t_k) \\ &= \lim \left(I_\mu(cs_k) + I_\mu(t_k)\right) \\ &= \lim cI_\mu(s_k) + \lim I_\mu(t_k) = cI_\mu(u) + I_\mu(v). \end{aligned}$$

Entsprechend wird die Monotonie gezeigt A-15. ⟩⟩⟩⟩⟩

Man beachte, dass $I_\mu(cu) = cI_\mu(u)$ auch für $c = 0$ und unbeschränktes Integral gilt, da wir $0 \cdot \infty = 0$ vereinbart haben.

Monotone Konvergenz

Wir zeigen nun, dass $\mathcal{U}^n(\mu)$ abgeschlossen ist unter monotoner Grenzwertbildung. Das heißt, der punktweise Grenzwert einer monoton steigenden Folge in $\mathcal{U}^n(\mu)$ gehört wieder zu $\mathcal{U}^n(\mu)$, und dieser Prozess vergrößert den Raum nicht. Außerdem vertauschen Integral und Grenzübergang.

18 **Satz von der monotonen Konvergenz** *Sei (u_k) eine μ-monoton steigende Folge in $\mathcal{U}^n(\mu)$. Dann ist auch $u =_\mu \lim u_k$ in $\mathcal{U}^n(\mu)$, und es gilt*

$$I_\mu(u) = \lim I_\mu(u_k). \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Zu jedem u_k existiert eine steigende Folge $(s_{k,l})_{l \geqslant 1}$ in $\mathcal{T}_+^n$ mit

$$s_{k,1} \leqslant s_{k,2} \leqslant s_{k,3} \leqslant .. \leqslant s_{k,l} \nearrow_\mu u_k.$$

Dabei können wir annehmen, dass die punktweise Konvergenz für alle k außerhalb einer gemeinsamen Nullmenge N stattfindet 5. Dann sind die Funktionen

$$t_m := \max\{s_{k,l} : 1 \leqslant k, l \leqslant m\}, \qquad m \geqslant 1,$$

als Maximum über jeweils endlich viele nichtnegative Treppenfunktionen ebenfalls nichtnegative Treppenfunktionen 10. Diese bilden ebenfalls eine monoton steigende Folge, wobei

$$t_m \leqslant_\mu u_m \leqslant_\mu u, \qquad m \geqslant 1.$$

Es gilt auch

$$t_m \nearrow_\mu u.$$

Denn gilt dies in einem Punkt p *nicht*, so ist $t_m(p) \leqslant \lim t_m(p) < u(p)$ für alle m. Dasselbe gilt dann auch für alle $s_{k,l}(p)$. Folglich gehört p zu der Nullmenge N, auf der die Treppenfunktionen nicht gegen u konvergieren.

Somit ist $u \in \mathcal{U}^n(\mu)$. Aus der Definition des Integrals folgt außerdem

$$\lim I_\mu(t_m) = I_\mu(u).$$

Wegen $t_m \leqslant_\mu u_m \leqslant_\mu u$ ist andererseits 17

$$I_\mu(t_m) \leqslant I_\mu(u_m) \leqslant I_\mu(u).$$

Also gilt auch $\lim I_\mu(u_m) = I_\mu(u)$. ⟩⟩⟩⟩⟩

19 ▷ Für nicht-monotone Folgen gilt dieser Satz nicht, selbst wenn die Konvergenz gleichmäßig ist. Für die Treppenfunktionen $\sigma_m = m^{-1}\chi_{[0,m]}$ beispielsweise gilt

$$\sigma_m \rightrightarrows 0, \qquad I_\mu(\sigma_m) \equiv 1 \nrightarrow 0,$$

doch die Konvergenz gegen die Nullfunktion ist nicht monoton. ◁

20.5 Messbare und summierbare Funktionen

Wir betrachten nun den Raum aller Funktionen, die sich als *Differenz* von monoton approximierbaren Funktionen darstellen lassen. Um undefinierte Ausdrücke zu vermeiden, beschränken wir uns dabei auf Funktionen, die μ-fast überall endlich sind.

20 **Definition und Satz** *Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ heißt μ-messbar, wenn sie eine wohldefinierte Darstellung*

$$f =_\mu u - v, \qquad u, v \in \mathcal{U}^n(\mu),$$

besitzt, wo u und v μ-fast überall endlich sind. Der Raum aller μ-messbaren Funktionen wird mit $\mathcal{M}^n(\mu)$ bezeichnet und bildet eine Algebra. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Seien $f =_\mu u - v$ und $g =_\mu \tilde{u} - \tilde{v}$ wohldefinierte Darstellungen aus μ-fast überall endlichen $\mathcal{U}^n(\mu)$-Funktionen. Da Summen und Produkte aus diesen wieder μ-monoton approximierbar 16 und μ-fast überall endlich sind, sind

$$\begin{aligned} f + g &=_\mu (u + \tilde{u}) - (v + \tilde{v}), \\ f - g &=_\mu (u + \tilde{v}) - (v + \tilde{u}), \\ fg &=_\mu (u\tilde{u} + v\tilde{v}) - (u\tilde{v} + v\tilde{u}) \end{aligned}$$

wohldefinierte Darstellungen von $f \pm g$ und fg. Also sind diese ebenfalls μ-messbar. Dasselbe gilt für skalare Vielfache, denn $cf = cu - cv$ für $c \geqslant 0$ und $cf = (-c)v - (-c)u$ sonst sind wohldefinierte Darstellungen. Also ist $\mathcal{M}^n(\mu)$ eine Algebra. ⟩⟩⟩⟩⟩

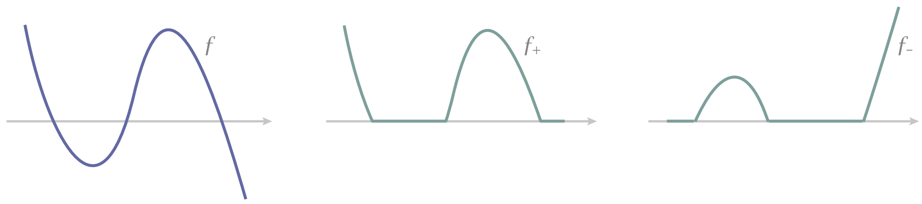
Für eine beliebige reellwertige Funktion f heißen

$$f_+ \coloneqq \max(f, 0), \qquad f_- \coloneqq \max(-f, 0)$$

der *Positivteil* respektive *Negativteil* dieser Funktion. Auch der Negativteil einer Funktion ist *nichtnegativ*, und offensichtlich gilt

$$f = f_+ - f_-, \qquad |f| = f_+ + f_-.$$

Abb 8 Positivteil und Negativteil einer Funktion



21 **Satz** *Sind f und g μ-messbar, so sind es auch*

$$f_+, \quad f_-, \quad |f|, \quad \max(f,g), \quad \min(f,g). \quad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Sei $f = u - v$ eine wohldefinierte Darstellung. Da $\max(u,v)$ ebenfalls μ-fast überall endlich ist und zu $\mathfrak{U}^n(\mu)$ gehört 16, sind auch 21

$$f_+ = \max(u,v) - v, \qquad f_- = \max(u,v) - u$$

wohldefinierte Darstellungen und diese Funktionen somit μ-messbar. Dasselbe gilt dann auch für $|f| = f_+ + f_-$ sowie $\max(f,g)$ und $\min(f,g)$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Summierbare Funktionen

Das Integral einer messbaren Funktion $f = u - v$ ist als Differenz der Integrale von u und v genau dann wohldefiniert, wenn wenigstens eines von ihnen endlich ist. Das Integral selbst kann unbeschränkt sein.

Definition *Eine Funktion $f \in \mathcal{M}^n(\mu)$ besitzt eine summierbare Darstellung, wenn es eine wohldefinierte Darstellung*

$$f =_\mu u - v, \qquad u, v \in \mathfrak{U}^n(\mu),$$

gibt, wo mindestens eine Funktion ein endliches μ-Integral besitzt. In diesem Fall heißt f μ-summierbar, und

$$I_\mu(f) := I_\mu(u) - I_\mu(v)$$

das Integral von f bezüglich μ oder kurz das μ-Integral von f. Der Raum der μ-summierbaren Funktionen wird mit $\mathcal{M}^n_S(\mu)$ bezeichnet. $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ Das Integral ist unabhängig von der summierbaren Darstellung. Denn ist $f =_\mu \tilde{u} - \tilde{v}$ eine zweite solche Darstellung, so ist $u + \tilde{v} =_\mu v + \tilde{u}$ und damit 17

$$I_\mu(u) + I_\mu(\tilde{v}) = I_\mu(u + \tilde{v}) = I_\mu(v + \tilde{u}) = I_\mu(v) + I_\mu(\tilde{u}).$$

Ist nun zum Beispiel $I_\mu(u) = \infty$, so ist notwendigerweise $I_\mu(v) < \infty$. Dann muss aber auch $I_\mu(\tilde{u}) = \infty$ und $I_\mu(\tilde{v}) < \infty$ gelten, und damit

$$I_\mu(u) - I_\mu(v) = I_\mu(\tilde{u}) - I_\mu(\tilde{v})$$

auf der erweiterten Zahlengeraden. Dasselbe gilt in den anderen Fällen. Also ergeben beide Darstellungen dasselbe Integral $I_\mu(f)$. Für $f \in \mathcal{U}^n(\mu) \cap \mathcal{M}^n(\mu)$ stimmt dieses Integral mit der vorangehenden Definition überein, so dass es gerechtfertigt ist, dieselbe Notation zu verwenden. ⟫⟫

▹ A. Jede monoton approximierbare Funktion ist μ-summierbar.
B. Die Exponenzialfunktion exp ist λ-summierbar.
C. Die Sinusfunktion sin ist *nicht* λ-summierbar. ◃

▪ Nichtnegative Funktionen

Sei $\mathcal{M}_+^n(\mu)$ der Raum aller nichtnegativen Funktionen in $\mathcal{M}^n(\mu)$. Offensichtlich enthält dieser Raum alle monoton approximierbaren Funktionen. Aber nicht jede nichtnegative messbare Funktion ist monoton approxierbar A-20, so dass

$$\mathcal{U}^n(\mu) \subsetneq \mathcal{M}_+^n(\mu).$$

Es ist daher nicht selbstverständlich, dass solche Funktionen auch summierbar sind. Dies erfordert einen Beweis.

22 **Satz** *Ist f μ-messbar und nichtnegativ, so ist f μ-summierbar, und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine summierbare Darstellung $f = u - v$ mit $I_\mu(v) < \varepsilon$.* ⋊

⟪⟪ Besitzt f eine wohldefinierte Darstellung, so auch eine Darstellung A-17

$$f =_\mu \sum_{k\geqslant 1} (u_k - v_k)$$

mit $\mathcal{U}^n(\mu)$-Funktionen u_k, v_k so, dass $v_k \leqslant u_k$ und $I_\mu(u_k) < \infty$ für alle $k \geqslant 1$. Für jedes $k \geqslant 1$ existiert dazu eine Treppenfunktion t_k mit

$$0 \leqslant t_k \leqslant v_k, \qquad I_\mu(v_k - t_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Dann gehören $\hat{u}_k = u_k - t_k \geqslant 0$ und $\hat{v}_k = v_k - t_k \geqslant 0$ ebenfalls zu $\mathcal{U}^n(\mu)$, ebenso

$$\hat{u} = \sum_{k\geqslant 1} \hat{u}_k, \qquad \hat{v} = \sum_{k\geqslant 1} \hat{v}_k$$

aufgrund des Satzes von der monotonen Konvergenz 18. Es gilt dann

$$I_\mu(\hat{v}) = \sum_{k\geqslant 1} I_\mu(\hat{v}_k) = \sum_{k\geqslant 1} I_\mu(v_k - t_k) < \sum_{k\geqslant 1} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

und $f = \hat{u} - \hat{v}$. ⟫⟫

23 **Korollar** *Ist f μ-summierbar, so auch f_+, f_- und $|f|$, und es gilt*

$$I_\mu(f) = I_\mu(f_+) - I_\mu(f_-), \qquad I_\mu(|f|) = I_\mu(f_+) + I_\mu(f_-).$$

Sind f und g μ-summierbar und gilt $f \leqslant_\mu g$, so gilt auch $I_\mu(f) \leqslant I_\mu(g)$. ⋊