12. Vorlesung 25. 11. 2021

Beweis: (f_n) monoton steigend in $\mathcal{L}^1_+(\mu)$.

OBdA $f_0 = 0$,

Dann gilt:

$$\underbrace{f_n - f_{n-1}}_{\geq 0} = u_n - v_n, \quad n \geq 1, \qquad u_n, v_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$$

$$I_\mu(v_n) < \frac{1}{2^n}.$$

Dann gilt

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} (f_k - f_{k-1}) \qquad f_0 = 0$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (u_k - v_k)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} u_k}_{g_n} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} v_k}_{h_n}$$

$$= g_n - h_n.$$

Dann: (g_n), (h_n) monoton steigend in $\mathcal{L}^1(\mu)$.

Satz von der monotonen Konvergenz:

$$g_n \uparrow_\mu g \in \mathcal{L}^0(\mu), \quad h_n \uparrow_\mu h \in \mathcal{L}^0(\mu).$$

Außerdem:

$$I_\mu(h_n) = \sum_{k=1}^{n} I_\mu(v_k) \le \sum_{k\ge 1} \frac{1}{2^k} = 1, \quad n \ge 1.$$

Also:

$$I_\mu(h) = \lim_{n\to\infty} I_\mu(h_n) \le 1$$

Daraus folgt:

$$h <_\mu \infty.$$

Dann gilt weiter:

$$g_n = f_n + h_n \uparrow_\mu g <_\mu \infty$$

weil $f <_\mu \infty$, also $\lim I_\mu(f_n) < \infty$

Also folgt

$$f =_\mu \lim f_n = \lim (g_n - h_n)$$
$$=_\mu \lim g_n - \lim h_n$$
$$=_\mu g - h$$

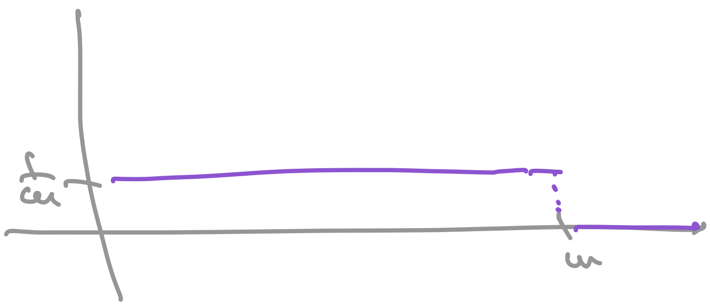
die vollständige und gewünschte Darstellung.

Also gilt:

$$I_\mu(f) = I_\mu(g) - I_\mu(h)$$
$$= \lim I_\mu(g_n) - \lim I_\mu(h_n)$$
$$= \lim \left(I_\mu(g_n) - I_\mu(h_n) \right)$$
$$= \lim I_\mu(g_n - h_n)$$
$$= \lim I_\mu(f_n) .$$

Bsp:

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \chi_{[0,n]} \in \mathcal{M}^{\uparrow}_{+}(X)$$



$$\sigma_n \rightrightarrows 0$$

$$I_\mu(\sigma_n) = 1 \underset{n \to \infty}{\not\longrightarrow} I_\mu(\lim \sigma_n)$$
$$= 0 .$$

Beweis: (f_n) sei μ-f.ü. konvergent.

Definiere

$$\Phi_{k,\ell} := \inf(f_k, \dots, f_\ell), \quad k \le \ell$$

Diese sind messbar, nicht-negativ, für jedes feste k monoton fallend in ℓ.

Also:

$$(f_k - \Phi_{k,\ell})_{\ell \ge k}$$

monoton steigend, und

$$f_k - \Phi_{k,\ell} \le f_k$$

Beppo Levi:

$$\Phi_k := \lim_{\ell\to\infty} \Phi_{k,\ell} = \inf(f_k, f_{k+1}, \dots)$$

ist summierbar, und

$$I_\mu(\Phi_k) \le \inf_{\ell \ge k} I_\mu(f_\ell).$$

Die Folge (Φ_k) steigt monoton, und

$$\lim_{k\to\infty} \Phi_k = \lim_{k\to\infty} \inf(f_k, f_{k+1}, \dots)$$

per Konvergenz!

$$= \lim_{k\to\infty} f_k =_\mu f.$$

Beppo Levi: f ist summierbar,

$$I_\mu(f) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{I_\mu(f_n)}_{\inf_{k\ge n} I_\mu(f_k)}$$

$$\le \underbrace{\lim_{n\to\infty} \inf_{k\ge n} I_\mu(f_k)}$$

$$= \liminf I_\mu(f_k).$$ ∎

Beweis: f ist summierbar.

Gilt $f =_\mu 0$, dann $I_\mu(f) = 0$. ✓

Umgekehrt: Betrachte

$$f_k := k f, \quad k \ge 0.$$

(f_k) monoton steigend in $\mathcal{M}^+_+(\mu)$

mit

$$\sup_{k\ge 0} I_\mu(f_k) = \sup_{k\ge 0} (k\, I_\mu(f)) = 0.$$

$$= \lim_{k\to\infty} k f$$

Beppo Levi: $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ ist summierbar.

Das geht nur, wenn $f =_\mu 0$. ∎

Beweis: Additivität: Seien nun $f, g \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

$$\left.\begin{aligned} f &= u - v \\ g &= \tilde{u} - \tilde{v} \end{aligned}\right\} \quad \text{geeignete Darstellung,}$$

$u, \tilde{u}, v, \tilde{v}$ integrierbar.

Dann

$$u + \tilde{v}, \quad v + \tilde{u} \quad \in \quad \mathcal{L}^1(\mu)$$

sind integrierbar

und damit

$$f - g = (u + \tilde{v}) - (v + \tilde{u})$$

weshalb Darstellung von integrierbarem $f - g$:

$$\begin{aligned} I_\mu(f - g) &= I_\mu(u + \tilde{v}) - I_\mu(v + \tilde{u}) \\ &= \underbrace{I_\mu(u) - I_\mu(v)} - \underbrace{I_\mu(\tilde{u}) + I_\mu(\tilde{v})} \\ &= I_\mu(f) - I_\mu(g) \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Dann:

$$f = f_+ - f_- \longleftarrow \text{wohldef. Def.}$$

$$I_\mu(f) = I_\mu(f_+) - I_\mu(f_-)$$

Also: f integrierbar gdw.

$$I_\mu(f_+) < \infty$$

$$\& \quad I_\mu(f_-) < \infty.$$

Aber ferner:

$$|f| = f_+ + f_- :$$

Also

$$I_\mu(|f|) = I_\mu(f_+) + I_\mu(f_-) < \infty.$$

Beweis: (f_n) Folge in $\mathcal{M}^1_{\bar{\mathbb{R}}}(\mu)$,

$|f_n| \le g \quad , \quad g \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

a) Betrachte

$g + f_n$: messbar, ≥ 0

$\longrightarrow_\mu g + f$.

Begründung:

$$g + f_n \le g + |f_n| \le_\mu 2g <_\mu \infty .$$

Lemma von Fatou:

$g + f =_\mu \lim (g + f_n)$ insbesondere:

$$I_\mu(g+f) = I_\mu(g + \lim f_n)$$
$$\le \liminf I_\mu(g + f_n)$$
$$= I_\mu(g) + \liminf I_\mu(f_n) .$$

$< \infty$

Da g integrierbar: $I_\mu(g) < \infty$:

$\Longrightarrow$ f integrierbar:

$$I_\mu(f) \le \liminf_{n \ge 1} I_\mu(f_n) .$$

2) Analog

$$g - f_k \geq 0 \quad , \quad k \geq 1$$

.....

$$I_\mu(g - f) = I_\mu(g - \lim f_k)$$

$$\leq \liminf I_\mu(g - f_k)$$

$$= I_\mu(g) - \limsup I_\mu(f_k)$$

$$\Longrightarrow$$

$$- I_\mu(f) \leq - \limsup I_\mu(f_k)$$

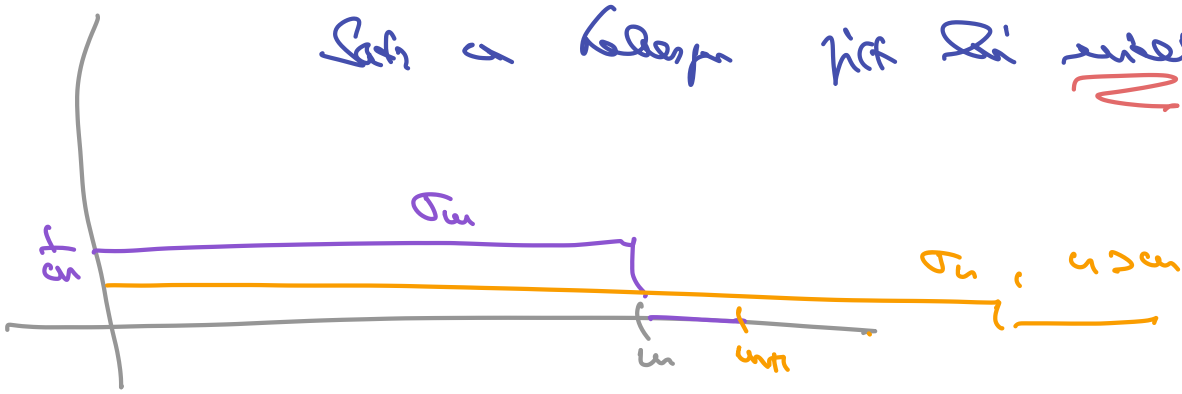
$$\Longleftrightarrow \quad \boxed{\limsup I_\mu(f_k) \leq I_\mu(f)}$$

$$\boxed{I_\mu(f) \leq \liminf_{k \geq 1} I_\mu(f_k)}$$

$$\Longrightarrow \quad I_\mu(f) = \lim I_\mu(f_k) \quad \blacksquare$$

Bsp: $\sigma_m = \frac{1}{m}\chi_{[0,m)}$

Satz von Lebesgue gilt hier nicht!

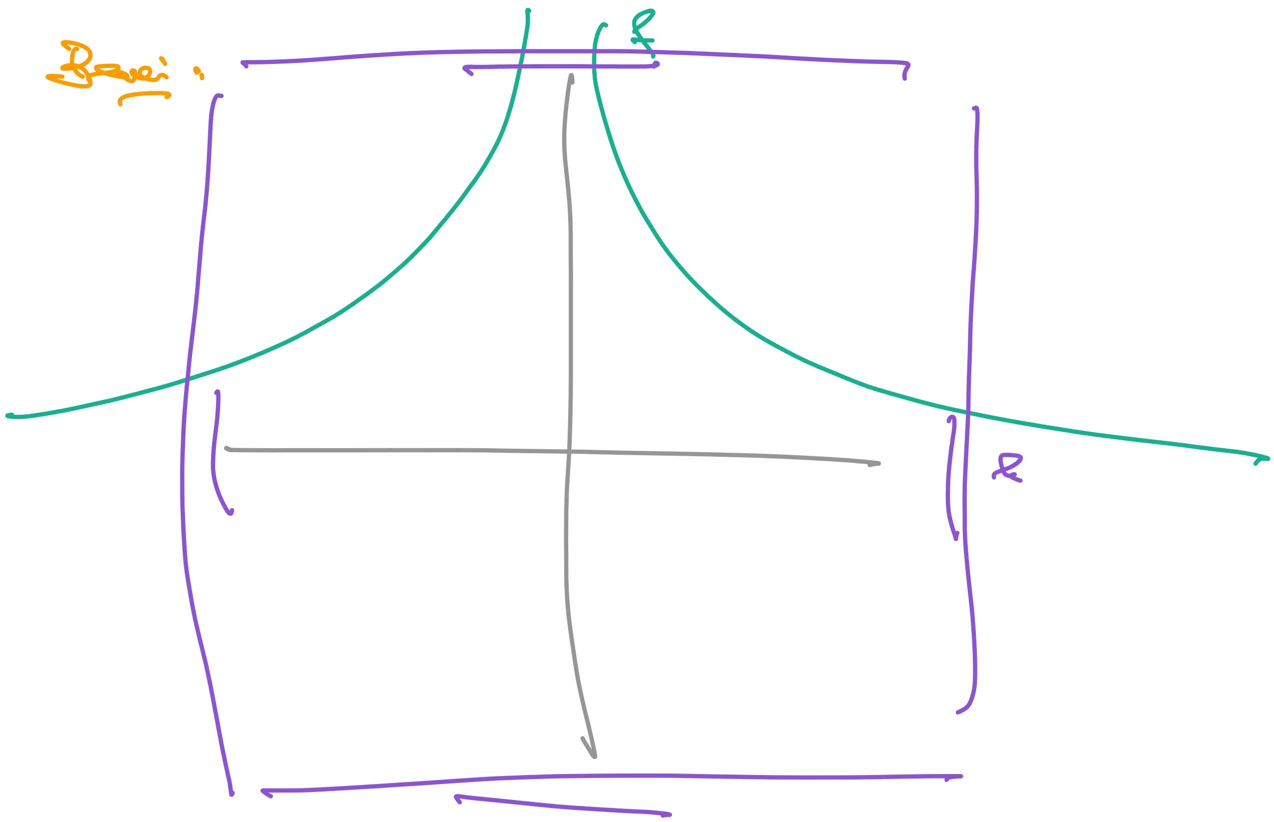


Kleinstmögliche Majorante für σ_n, $n \geq 1$:

$$g = \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m}\chi_{(m-1,m]}$$

nicht integrierbar.

Bsp.:



Betrachte Abschneiden f:

$$T_k f := \chi_{[-k,k]^n} \max(\min(f,k), -k), \quad k \ge 1.$$

Dies wird messbar, beschränkt, mit beschränktem Träger, also integrierbar.

Außerdem

$$\pi_n f \longrightarrow f$$

$$|\pi_n f| \le g, \quad \text{für } n.$$

Satz v. Lebesgue: $\Rightarrow$ f ist integrierbar, &

$$I_\mu(|f|) = \lim \left(I_\mu(|\pi_n f|) \right) \le I_\mu\, g < \infty.$$

$\square$