23 **Korollar** *Ist f μ-summierbar, so auch f_+, f_- und $|f|$, und es gilt*

$$I_\mu(f) = I_\mu(f_+) - I_\mu(f_-), \qquad I_\mu(|f|) = I_\mu(f_+) + I_\mu(f_-).$$

Sind f und g μ-summierbar und gilt $f \leqslant_\mu g$, so gilt auch $I_\mu(f) \leqslant I_\mu(g)$. ⋊

Die Sätze von Levi und Fatou

Der Satz von der monotonen Konvergenz $_{18}$ gilt auch in $\mathcal{M}^n_+(\mu)$, allerdings muss eine Voraussetzung erfüllt sein.

24 **Satz von Beppo Levi** *Sei (f_k) eine μ-monoton steigende Folge in $\mathcal{M}^n_+(\mu)$. Gilt*

$$\sup I_\mu(f_k) < \infty \quad \textit{oder} \quad f =_\mu \lim f_k <_\mu \infty,$$

so ist f μ-summierbar, und es gilt

$$I_\mu(f) = \lim I_\mu(f_k). \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨ Wir können annehmen, dass $f_0 \equiv 0$. Aufgrund des vorangehenden Satzes $_{22}$ existiert für jedes $k \geqslant 1$ eine summierbare Darstellung

$$f_k - f_{k-1} = u_k - v_k, \qquad I_\mu(v_k) < 2^{-k}.$$

Somit ist

$$f_k = \sum_{l=1}^{k}(f_l - f_{l-1}) = \sum_{l=1}^{k}(u_l - v_l) = g_k - h_k$$

mit

$$g_k = \sum_{l=1}^{k} u_l, \qquad h_k = \sum_{l=1}^{k} v_l.$$

Diese Funktionen bilden monoton steigende Folgen in $\mathcal{U}^n(\mu)$. Aufgrund des Satzes von der monotonen Konvergenz $_{18}$ gilt also

$$g_k \nearrow_\mu g \in \mathcal{U}^n(\mu), \qquad h_k \nearrow_\mu h \in \mathcal{U}^n(\mu).$$

Für alle k ist dabei

$$I_\mu(h_k) = \sum_{l=1}^{k} I_\mu(v_l) \leqslant \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} = 1.$$

Also ist $_{18}$ $I_\mu(h) = \lim I_\mu(h_k) \leqslant 1$ und damit $_{13}$ $h <_\mu \infty$. Wegen $f <_\mu \infty$ gilt dann auch $g_k = f_k + h_k \nearrow_\mu g <_\mu \infty$. Also hat

$$f =_\mu \lim f_k = \lim (g_k - h_k) = \lim g_k - \lim h_k =_\mu g - h$$

eine wohldefinierte und summierbare Darstellung, und es gilt

$$\begin{aligned} I_\mu(f) = I_\mu(g) - I_\mu(h) &= \lim I_\mu(g_k) - \lim I_\mu(h_k) \\ &= \lim\,(I_\mu(g_k) - I_\mu(h_k)) \\ &= \lim I_\mu(g_k - h_k) \\ &= \lim I_\mu(f_k). \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. ⟩⟩⟩⟩⟩

Für nicht-monotone Folgen gilt dieser Satz nicht [19]. Statt dessen gilt das

25 **Lemma von Fatou** *Sei (f_k) eine μ-fast überall konvergente Folge in $\mathcal{M}_+^n(\mu)$. Gilt*

$$\sup I_\mu(f_k) < \infty \quad \textit{oder} \quad f =_\mu \lim f_k <_\mu \infty,$$

so ist f μ-summierbar, und es gilt

$$I_\mu(f) \leqslant \liminf I_\mu(f_k). \qquad \rtimes$$

Hierbei ist der *limes inferior* einer reellen Zahlenfolge (a_n) definiert als

$$\liminf_n a_n \coloneqq \lim_n \inf_{m \geqslant n} a_n = \lim_n b_n, \qquad b_n = \inf_{m \geqslant n} a_m.$$

Da die Folge (b_n) monoton steigt, existiert der Grenzwert immer in der erweiterten Zahlengeraden. Konvergiert (a_n), so ist $\liminf a_n = \lim a_n$. Andernfalls ist er das Infimum der Menge aller Häufungswerte der Folge (a_n) [A-5.43].

⟨⟨⟨⟨⟨ Betrachte die Funktionen

$$\phi_{k,l} \coloneqq \inf(f_k, .., f_l), \qquad k \leqslant l.$$

Diese sind sämtlich messbar [21], nichtnegativ, und bilden für jedes k eine monoton fallende Folge bezüglich l. Die Folge $(f_k - \phi_{k,l})_{l \geqslant k}$ ist monoton steigend in $\mathcal{M}_+^n(\mu)$ und nach oben durch f_k beschränkt. Wir können daher darauf den Satz von Beppo Levi [24] anwenden und schließen, dass

$$\phi_k = \lim_{l \to \infty} \phi_{k,l} = \inf(f_k, f_{k+1}, ..)$$

für jedes k summierbar ist, mit

$$I_\mu(\phi_k) \leqslant \inf_{l \geqslant k} I_\mu(f_l).$$

Die Folge (ϕ_k) steigt monoton, mit

$$\lim \phi_k = \liminf f_k =_\mu \lim f_k =_\mu f.$$

Wir können den Satz von Beppo Levi daher nochmals anwenden und schließen, dass f ebenfalls summierbar ist, mit

$$I_\mu(f) = \lim I_\mu(\phi_k) \leqslant \lim_k \inf_{l \geqslant k} I_\mu(f_l) = \liminf I_\mu(f_k).$$

Damit ist das Lemma bewiesen. ⟫⟫⟫

▹ Das Beispiel 19 der Treppenfunktionen $\sigma_m = m^{-1}\chi_{[0,m]}$ zeigt auch, dass im Lemma von Fatou die strikte Ungleichung eintreten kann und die Nichtnegativität der Funktionenfolge notwendig ist. Denn

$$\sigma_m \rightrightarrows 0, \qquad I_\mu(\sigma_m) \equiv 1 > 0,$$

und für $\tau_m = -\sigma_m$ gilt

$$\tau_m \rightrightarrows 0, \qquad I_\mu(\tau_m) \equiv -1 < 0. \quad ◃$$

26 **Satz** *Sei f μ-messbar und nichtnegativ. Dann gilt*

$$f =_\mu 0 \quad \Leftrightarrow \quad I_\mu(f) = 0. \quad ⋊$$

⟪⟪⟪ Die Funktion f ist jedenfalls summierbar 22. Ist $f =_\mu 0$, so ist offensichtlich $I_\mu(f) = 0$. Um die Umkehrung zu beweisen, betrachte $f_k = kf$ für $k \geqslant 0$. Diese Folge ist monoton steigend in $\mathcal{M}_+^n(\mu)$ mit

$$\sup_{k \geqslant 0} I_\mu(f_k) = \sup_{k \geqslant 0} kI_\mu(f) = 0.$$

Der Satz von Beppo Levi ist damit anwendbar, und der punktweise Limes der f_k eine summierbare Funktion. Dies ist aber nur möglich, wenn $f =_\mu 0$. ⟫⟫⟫

20.6 Integrierbare Funktionen

Das Integral summierbarer Funktionen kann unbeschränkt sein. Mit Blick auf die Konstruktion vollständig normierter Räume wie die L^p-Räume ist es aber notwendig, Räume von summierbaren Funktionen mit endlichen Integral zu betrachten.

Definition und Satz *Eine Funktion $f \in \mathcal{M}_s^n(\mu)$ heißt μ-integrierbar, wenn ihr μ-Integral endlich ist. Der Raum aller μ-integrierbaren Funktionen wird mit $\mathcal{L}^n(\mu)$ bezeichnet. Auf ihm definiert das Lebesgueintegral*

$$I_\mu : \mathcal{L}^n(\mu) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto I_\mu(f)$$

ein lineares Funktional. ⋊

⟪⟪⟪ Wir zeigen die Additivität. Funktionen $f, g \in \mathcal{L}^n(\mu)$ besitzen summierbare Darstellungen $f = u - v$ und $g = \tilde{u} - \tilde{v}$ mit integrierbaren Funktionen in $\mathcal{U}^n(\mu)$. Dann sind auch $u + \tilde{u}$ und $v + \tilde{v}$ integrierbare $\mathcal{U}^n(\mu)$-Funktionen 17 und damit

$$f - g = (u + \tilde{v}) - (v + \tilde{u})$$

eine Darstellung mit integrierbaren Funktionen. Weiter folgt

$$\begin{aligned} I_\mu(f - g) &= I_\mu(u + \tilde{v}) - I_\mu(v + \tilde{u}) \\ &= I_\mu(u) - I_\mu(v) - I_\mu(\tilde{u}) + I_\mu(\tilde{v}) \\ &= I_\mu(f) - I_\mu(g). \end{aligned}$$

Alles andere wird entsprechend gezeigt. ⟫⟫⟫

Ein Unterschied zum Riemannintegral besteht darin, dass eine Funktion dann und nur dann μ-integrierbar ist, wenn es auch $|f|$ ist.

Satz *Ist f μ-integrierbar, so sind es auch f_+, f_- und $|f|$.* ⋊

⟪⟪⟪ Wegen 23 $I_\mu(f) = I_\mu(f_+) - I_\mu(f_-)$ ist f μ-integrierbar genau dann, wenn $I_\mu(f_+)$ und $I_\mu(f_-)$ endlich sind. Dann ist genau dann der Fall, wenn auch

$$I_\mu(f_+) + I_\mu(f_-) = I_\mu(f_+ + f_-) = I_\mu(|f|)$$

endlich ist. ⟫⟫⟫

Der wichtigste Satz der Lebesguetheorie betrifft die Vertauschbarkeit von Integration und punktweisen Limes unter sehr allgemeinen Bedingungen. Er wird auch als *Satz von der dominierten Konvergenz* bezeichnet.

27 **Satz von Lebesgue** *Sei (f_k) eine μ-fast überall konvergente Folge in $\mathcal{M}_s^n(\mu)$. Gibt es eine Funktion $g \in \mathcal{L}^n(\mu)$, so dass*

$$|f_k| \leqslant_\mu g, \qquad k \geqslant 1,$$

so ist $f =_\mu \lim f_k$ integrierbar, und es gilt

$$I_\mu(f) = \lim_{k\to\infty} I_\mu(f_k). \qquad ⋊$$

⟪⟪⟪ Die Funktionen $g + f_k$ sind sämtlich messbar, nichtnegativ, und konvergieren μ-fast überall gegen $g + f$. Außerdem gilt für alle k

$$g + f_k \leqslant g + |f_k| \leqslant_\mu 2g <_\mu \infty.$$

Mit dem Lemma von Fatou ist somit $g + f$ integrierbar, und es gilt

$$\begin{aligned} I_\mu(g + f) &= I_\mu(g + \lim f_k) \\ &\leqslant \liminf I_\mu(g + f_k) = I_\mu(g) + \liminf I_\mu(f_k). \end{aligned}$$

Da g integrierbar ist, ist auch f integrierbar, und es gilt

$$I_\mu(f) \leqslant \liminf I_\mu(f_k).$$

Argumentiert man entsprechend für $g - f_k \geqslant 0$, so folgt

$$\begin{aligned} I_\mu(g-f) &= I_\mu(g - \lim f_k) \\ &\leqslant \liminf I_\mu(g-f_k) = I_\mu(g) - \limsup I_\mu(f_k), \end{aligned}$$

und man erhält

$$\limsup I_\mu(f_k) \leqslant I_\mu(f).$$

Somit konvergiert die Folge $I_\mu(f_k)$ mit Grenzwert $I_\mu(f)$. ⟩⟩⟩⟩⟩

▹ Das Beispiel 19 der Treppenfunktionen $\sigma_m = m^{-1}\chi_{[0,m]}$ zeigt auch, dass eine integrierbare Majorante unverzichtbar ist. Die kleinste Majorante ist hier

$$g = \sum_{m \geqslant 1} m^{-1}\chi_{(m-1,m]}.$$

Ihr λ-Integral ist die harmonische Reihe. Also ist g nicht λ-integrierbar. Und tatsächlich gilt der Satz von Lebesgue für die Folge (σ_m) *nicht.* ◃

28 **Majorantenkriterium** *Ist f messbar, g integrierbar und $|f| \leqslant_\mu g$, so ist auch f integrierbar, und es gilt*

$$I_\mu(|f|) \leqslant I_\mu(g).$$ ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Betrachte die abgeschnittenen Funktionen

$$\Pi_k f \coloneqq \chi_{[-k,k]^n} \max(\min(f,k), -k), \qquad k \geqslant 1.$$

Diese sind messbar und beschränkt mit beschränktem Träger, also integrierbar. Wegen $|\Pi_k f| \leqslant_\mu g$ für alle k und $\Pi_k f \to f$ punktweise ist also f aufgrund des Satzes von Lebesgue integrierbar, und es ist

$$I_\mu(|f|) = \lim I_\mu(|\Pi_k f|) \leqslant I_\mu(g)$$

aufgrund der Monotonie des Integrals. ⟩⟩⟩⟩⟩

Im Satz von Lebesgue genügt es daher anzunehmen, dass die f_k messbar sind. Ihre Integrabilität folgt dann aus der Existenz einer integrierbaren Majorante.