13. Vorlesung 1.12.2021

Bsp: 1. Intervall $I \in \mathcal{J}^n$

2. Zulässige Menge $\in \mathcal{Z}^n$

3. $\mathbb{Q}^n$ ist abzählbar

4. $\mathbb{R}^n$.

Beweis: Definiere

$\chi_{A_n} \in \mathcal{M}_s^+(\mu)$

monoton steigend

$\chi_{A_n} \uparrow \chi_A < \infty$

Beppo Levi:

$$\mu(A) = I_\mu(\chi_A)$$

$$= I_\mu(\lim \chi_{A_k})$$

$$\overset{BL}{=} \lim I_\mu(A_k) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k)$$

$\square$

Bewijs:

Vereniging:

$A \cup B$: $\chi_{(A\cup B)} = \max(\underbrace{\chi_A}, \underbrace{\chi_B})$

[illegible]

Aftelbare unie : $(A_k)_{k\geq 1}$:

$$A = \bigcup_{k\geq 1} A_k = \bigcup_{n\geq 1}\Big(\bigcup_{1\leq k\leq n} A_k\Big)$$

meetb. & positief

meetb. stijgend in n

meetb.

Komplement: $\chi_{(A^c)} = 1-\chi_A$

meetb. & posit.

positief

A^c meetb.

Doorsnede:

$$\bigcap_{k\geq 1} A_k = \Big(\bigcup_{k\geq 1} A_k^c\Big)^c$$

meetb.

meetb.

meetb.

$\mathcal{A}^n(\mu) \underset{\neq}{\supset} \mathcal{B}^n$ Borelalgebra:

kleinste σ-Algebra, die alle offenen und abgeschl. Teil. d. $\mathbb{R}^n$ enthält.

topologisch

Ebenso:

$$\mathcal{P}^n := \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \underset{\neq}{\supset} \mathcal{A}^n(\mu) \underset{\neq}{\supset} \mathcal{B}^n .$$

Beweis: $f_t \in L^1(\mu)$ für alle t.

Existiert eine Majorante $g \in L^1(\mu)$.

Sei (t_n) beliebige Folge mit $t_n \to a$, dann gilt

$$f_{t_n} \xrightarrow{\mu} f_a, \quad |f_{t_n}| \leq g$$

Aus Satz v. Lebesgue:

$$I_\mu(f_a) = I_\mu(\lim f_{t_n}) = \lim I_\mu(f_{t_n}).$$

Da dies für jede Folge (t_n) mit $t_n \to a$:

$$\lim_{t \to a} \underbrace{\int f_t \, d\mu}_{F(t)} = \underbrace{\int f_a \, d\mu}_{F(a)}. \qquad \boxed{\text{qed}}$$

$$F(t) \xrightarrow[t \to a]{} F(a)$$

Beweis: Mittelwertsatz:

$$\left| \frac{f(t_n,x) - f(t,x)}{t_n - t} \right| \le \sup_{s \in I} |f'(s,x)| \le_\mu g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Insbesondere: $t \sim a$, fest:

$$|f(t,x)| \le \underbrace{\underbrace{|f(a,x)|}_{\text{int.}} + \underbrace{|t-a|\, g(x)}_{\text{int.}}}_{\text{int.}} \in \mathcal{L}^1(\mu).$$

Für $t_n \to t$: Satz v. Lebesgue:

$$\lim_{t_n \to t} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \lim \int \frac{f(t_n,x) - f(t,x)}{t_n - t}\, d\mu$$

$$= \int \lim \frac{\cdots}{\cdots}\, d\mu$$

$$= \int f'_t \, d\mu .$$

Bsp 1:

$$\int_0^\infty e^{-tx}\,dx = \frac{1}{t}.$$

$t \geq \alpha > 0$:

$$\partial_t^n\left(e^{-tx}\right) = (-x)^n e^{-tx}$$

$$x^n e^{-tx} \leq x^n e^{-\alpha x}$$ uniform für jedes $n \geq 1$.

Also:

$$\int_0^\infty x^n e^{-tx}\,dx = (-1)^n \int_0^\infty \partial_t^n\left(e^{-tx}\right)dx$$

$$= (-1)^n \partial_t^n\left(\frac{1}{t}\right)$$

$$= \frac{n!}{t^{n+1}}.$$

$t=1$: $$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n!$$

Bsp 2: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in L^1(\mathbb{R})$.

$$\hat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ixt}\, dx, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

Wohldefiniert: weil

$$|f(x)\, e^{-ixt}| = |f(x)|$$

Stetig in t: weil e^{-ixt} stetig in t.

Ableitung:
$$\int_{\mathbb{R}} \partial_t \left(f(x)\, e^{-ixt} \right) dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}} -ix f(x)\, e^{-ixt}\, dt$$

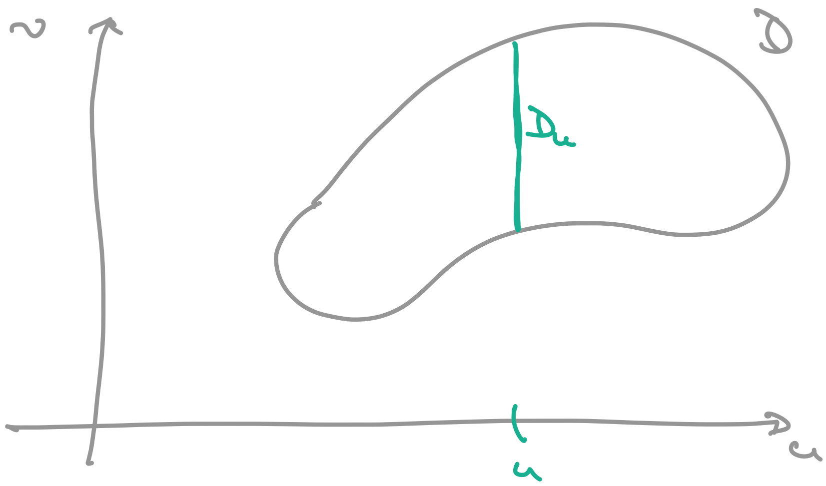
$$= -i \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, e^{-ixt}\, dt$$

Falls auch $x \cdot f(x) \in L^1(\mathbb{R})$, dann ist $\hat{f}$ differenzierbar, und

$$\hat{f}'(t) = \quad = -i\, (xf)^{\wedge}.$$

$\boxed{}$

21. Integration in $\mathbb{R}^n$



$$D_u := \{ v : (u,v) \in D \}$$

$$L(D_u) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{D_u} \, d\lambda_1$$

Idee:

$$\lambda_2(D) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_D \, d\lambda_2$$

$$= \int_{\mathbb{R}} L(D_u) \, d\lambda_1$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_D \, \underset{\substack{\uparrow \\ v}}{d\lambda_1} \right) \underset{\substack{\uparrow \\ u}}{d\lambda_1}$$

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \quad , \quad r,s \geq 1, \quad r+s = n$

$\mu_n = \mu_r \times \mu_s$

$$\boxed{\lambda_n = \lambda_r \times \lambda_s}$$

$f : \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$

$x = (u,v)$

$f(x) = f(u,v)$

u-Schnitt von f :

$f_u : \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$

$v \longmapsto f_u(v) = f(u,v)$

Ist f_u μ_s-integrierbar für μ_r-fast alle u :

$F : \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathbb{R}$

$$F(u) =_{\mu_r} \int_{\mathbb{R}^s} f_u \, d\mu_s$$

Frage:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(u)\, d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^r} \left(\int_{\mathbb{R}^s} f\, d\mu_s \right) d\mu_r \overset{?}{=} \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mu_n \, .$$

Notation:

$$\mathcal{L}^i = \mathcal{L}^i(\mu_i) \, , \qquad i = n, r, s$$

$$\int \ldots d\mu_i = \int_{\mathbb{R}^i} \ldots d\mu_i \, ,$$

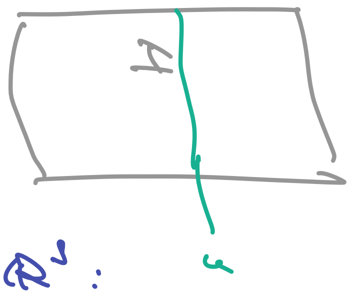
Schritt 1:

$$\mathbb{R}^n \ni I = I_r \times I_s : \quad I_r \in \mathcal{J}^r, \; I_s \in \mathcal{J}^s$$

$$f = \chi_I = \chi_{I_r}\,\chi_{I_s}$$

u-Schnitt:

$$f_u = \chi_{I,u} = \chi_{I_r}(u)\cdot\chi_{I_s} \in \mathcal{U}^s$$



Integration über $\mathbb{R}^s$:

$$F = \int \chi_{I_r}\,\chi_{I_s}\,d\mu_s$$

$$= \mu_s(I_s)\cdot\chi_{I_r} \in \mathcal{U}^r$$

Damit

$$\int F\,d\mu_r = \mu_s(I_s)\cdot\int \chi_{I_r}\,d\mu_r$$

$$= \mu_s(I_s)\cdot\mu_r(I_r)$$

$$=: \mu_n(I_r \times I_s)$$

$$= \mu_n(I)$$

$$= \int f\,d\mu_n \,. \qquad \square$$

Schritt 2: Treppenfunktion:

$$\alpha f + \beta g$$

Tonelli gilt für f und g. Daraus folgt:

$$(\alpha f + \beta g)_u = \alpha f_u + \beta g_u \in T^0$$

und

$$F = \int f \, d\mu_s \in T^0$$

$$G = \int g \, d\mu_s \in T^0$$

$$\Longrightarrow \int (\alpha f + \beta g)\, d\mu_s$$

$$= \alpha \int f \, d\mu_s + \beta \int g \, d\mu_s$$

$$= \alpha F + \beta G \in T^0$$

Damit

$$\int (\alpha f + \beta g)\, d\mu_r = \alpha \int f \, d\mu_r + \beta \int g \, d\mu_r$$

$$= \alpha \int F \, d\mu_r + \beta \int G \, d\mu_r$$

$$= \int (\alpha F + \beta G)\, d\mu_r . \quad \square$$