20.8 Messbare Mengen

Definition *Eine Teilmenge A des $\mathbb{R}^n$ heißt μ-messbar, wenn ihre charakteristische Funktion μ-summierbar ist, also $\chi_A \in \mathcal{M}_s^n(\mu)$ gilt. Ihr Maß ist dann*

$$\mu(A) := I_\mu(\chi_A).$$

Die Familie aller dieser Mengen wird mit $\mathcal{A}^n(\mu)$ bezeichnet. ⋊

▹ A. Jedes Intervall und jede summierbare Menge ist μ-messbar, und ihr Maß stimmt mit dem bereits definierten Maß überein.

B. $\mathbb{Q}^n$ und $\mathbb{R}^n$ sind μ-messbar, und im Fall des Volumenmaßes λ ist

$$\lambda(\mathbb{Q}^n) = 0, \qquad \lambda(\mathbb{R}^n) = \infty.$$

C. Jede Borelmenge ist μ-messbar für jedes Maß μ – siehe nächste Seite. ◃

29 **Lemma** *Ist (A_k) eine monoton steigende Folge μ-messbarer Mengen, so ist auch $A = \bigcup_k A_k$ μ-messbar, und es gilt*

$$\mu(A) = \lim \mu(A_k).$$ ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Die charakteristischen Funktionen χ_{A_k} bilden eine monoton steigende Folge in $\mathcal{M}_s^n(\mu)$ mit nichtnegativen Integralen und $\chi_{A_k} \nearrow \chi_A < \infty$. Der Satz von Beppo Levi $_{24}$ ist also anwendbar. Somit ist $\chi_A \in \mathcal{M}_s^n(\mu)$ und

$$\mu(A) = I_\mu(\chi_A) = \lim I_\mu(\chi_{A_k}) = \lim \mu(A_k).$$ ⟩⟩⟩⟩⟩

Satz *Die Familie $\mathcal{A}^n(\mu)$ aller μ-messbaren Mengen bildet eine σ-Algebra: sie enthält die leere Menge und ist abgeschlossen unter abzählbaren Vereinigungen und abzählbaren Durchschnitten sowie Komplementbildung.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Die Vereinigung zweier messbarer Mengen ist wieder messbar, denn $_{22}$ $\chi_{A\cup B} = \sup(\chi_A, \chi_B)$ ist summierbar. Dasselbe gilt dann für Vereinigungen endlich vieler messbarer Mengen. Die Vereinigung abzählbar vieler messbarer Mengen A_k ist darstellbar als Vereinigung einer steigenden Folge messbarer Mengen,

$$A = \bigcup_k A_k = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{k\leqslant n} A_k,$$

und damit ebenfalls messbar $_{29}$. Das Komplement A^c einer messbaren Menge A ist messbar, denn $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$.

Die Messbarkeit abzählbar vieler Durchschnitte folgt mit den bisherigen Ergebnissen und der Regel von de Morgan,

$$\bigcap_k A_k = \Big(\bigcup_k A_k^c\Big)^c.$$ ⟩⟩⟩⟩⟩

Da sich offene Mengen als abzählbare Vereinigung von n-Intervallen schreiben lassen und deren Komplemente die abgeschlossenen Mengen bilden, erhalten wir folgendes

Korollar *Offene und abgeschlossene Mengen sind μ-messbar.* ⋊

▷ Der Durchschnitt abzählbar vieler offener Mengen, genannt *G_δ-Mengen*, ist μ-messbar. Dasselbe gilt für die Vereinigung abzählbar vieler abgeschlossener Mengen, genannt *F_σ-Mengen*. ◁

Die Familie $\mathcal{A}^n(\mu)$ aller μ-messbaren Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ enthält damit auch die *Borelalgebra* $\mathcal{B}^n$, welche definiert ist als die kleinste σ-Algebra, die alle offenen und abgeschlossenen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ enthält. Sie hängt also nicht vom Maß, sondern nur von der Topologie ab. Es gilt sogar

$$\mathcal{B}^n \subsetneq \mathcal{A}^n(\mu) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n),$$

worauf wir hier allerdings nicht eingehen werden.

▪ Integrale über messbare Mengen

Alle Integrale erstreckten sich bisher über den Gesamtraum $\mathbb{R}^n$. Integrale über messbare Teilmengen werden hierauf zurückgeführt, indem man die betreffende Funktion durch 0 auf deren Komplement fortsetzt.

Ist also $A \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge und $f\colon A \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion, so definieren wir deren Fortsetzung auf den Gesamtraum $\mathbb{R}^n$ als

$$f_A \coloneqq \begin{cases} f & \text{auf } A, \\ 0 & \text{auf } A^c. \end{cases}$$

Für eine auf ganz $\mathbb{R}^n$ erklärte Funktion f gilt also

$$f_A = \chi_A f.$$

Die Funktion f heißt *μ-messbar auf A*, wenn sowohl A als auch f_A μ-messbar sind. Ihr Integral über A ist dann definiert als

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu \coloneqq \int_{\mathbb{R}^n} f_A \,\mathrm{d}\mu.$$

Man überlegt sich, dass alle bisherigen Sätzen entsprechend auch hierfür gelten.

20.9 Parameterabhängige Integrale

Eine typische Anwendung des Satzes von Lebesgue betrifft parameterabhängige Integrale. Sei dazu I ein nichtentartetes Intervall und

$$f:\ I\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\quad (t,x)\mapsto f(t,x)$$

eine Funktion mit der Eigenschaft, dass für jedes $t\in I$ die *partielle Funktion*

$$f_t:\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R},\quad f_t(x)=f(t,x)$$

messbar ist. Der Parameter ist also t, und f_t bezeichnet hier nicht die partielle Ableitung nach t, sondern die Funktion zum fixierten Parameterwert t.

Satz *Für ein $a\in I$ gelte*

$$f_a =_\mu \lim_{t\to a} f_t.$$

Gibt es eine integrierbare Funktion g mit $|f_t|\leqslant_\mu g$ für alle $t\in I$, so sind auch alle f_t integrierbar, und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_a\,\mathrm{d}\mu = \lim_{t\to a}\int_{\mathbb{R}^n} f_t\,\mathrm{d}\mu. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Die Integrierbarkeit aller f_t folgt aus der Existenz einer integrierbaren Majorante g $_{28}$. Ist (t_k) eine beliebige Folge in I mit $t_k\to a$, so gilt

$$f_a =_\mu \lim f_{t_k},\qquad |f_{t_k}|\leqslant g.$$

Mit dem Satz von Lebesgue $_{27}$ folgt daher

$$I_\mu(f_a) = I_\mu(\lim f_{t_k}) = \lim I_\mu(f_{t_k}).$$

Da dies für jede solche Folge (t_k) gilt, folgt hieraus die Behauptung $_{7.3}$. ⟩⟩⟩⟩⟩

Korollar *Sei $f_x = f(\cdot,x)$ für fast jedes $x\in\mathbb{R}^n$ stetig auf I. Gibt es eine integrierbare Funktion g mit $|f_t|\leqslant g$ für alle $t\in I$, so ist auch*

$$F:\ I\to\mathbb{R},\quad F(t)=\int_{\mathbb{R}^n} f_t\,\mathrm{d}\mu$$

stetig auf I. $\rtimes$

30 **Satz** *Es sei f_a für ein $a\in I$ integrierbar, und die partielle Ableitung $f'=\partial_t f$ existiere in jedem Punkt von $I\times\mathbb{R}^n$. Gibt es eine integrierbare Funktion g mit $|f_t'|\leqslant g$ für alle $t\in I$, so ist auch*

$$F:\ I\to\mathbb{R},\quad F(t)=\int_{\mathbb{R}^n} f_t\,\mathrm{d}\mu$$

auf I differenzierbar, und es gilt

$$F'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} f_t' \, \mathrm{d}\mu, \qquad t \in I. \quad ⋊$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Aus dem Mittelwertsatz der Differenzialrechnung 8.10 und der Schranke für f' folgt für beliebige $t_k \neq t$ in I die Abschätzung

$$\left| \frac{f(t_k, x) - f(t, x)}{t_k - t} \right| \leqslant \sup_{s \in I} |f'(s, x)| \leqslant g(x).$$

Insbesondere ist

$$|f(t, x)| \leqslant |f(a, x)| + |t - a| \, g(x),$$

und damit f_t integrierbar für *alle* $t \in I$. Konvergiert nun (t_k) gegen t, so folgt aus der gleichmäßigen Schranke für die Differenzenquotienten und dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\begin{aligned} \lim \frac{F(t_k) - F(t)}{t_k - t} &= \lim \int \frac{f(t_k, x) - f(t, x)}{t_k - t} \, \mathrm{d}\mu \\ &= \int \lim \frac{f(t_k, x) - f(t, x)}{t_k - t} \, \mathrm{d}\mu = \int f_t' \, \mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

Da dies für jede solche Folge (t_k) gilt, ist F differenzierbar, und F' ist durch das letzte Integral gegeben. ⟩⟩⟩⟩⟩

▹ A. Für $t > 0$ ist bekanntlich

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-tx} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{t}.$$

Auf jedem Intervall $[\alpha, \infty)$ mit $\alpha > 0$ besitzt die Funktion $x^n \mathrm{e}^{tx}$ für $n \geqslant 0$ die integrierbare Majorante $x^n \mathrm{e}^{-\alpha x}$. Wir dürfen daher unter dem Integral nach t differenzieren und erhalten induktiv

$$\int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-tx} \, \mathrm{d}x = (-1)^n D^n \left(\frac{1}{t} \right) = \frac{n!}{t^{n+1}}, \qquad n \geqslant 0.$$

Mit $t = 1$ erhalten wir insbesondere

$$\int_0^\infty x^n \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x = n! \ .$$

B. *Ableitung der Fouriertransformation:* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrierbar. Die *Fouriertransformierte* von f ist, bis auf einen skalaren Faktor, die komplexwertige Funktion

$$\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i} \cdot tx} \, \mathrm{d}x.$$

Das Integral einer komplexwertigen Funktion wird hierbei durch die Integrale der Real- und Imaginärteile gebildet und hat, bis auf die Monotonie, dieselben

Eigenschaften wie das reellwertige Integral. Insbesondere gilt auch die Dreiecksungleichung A-26 .

Wegen

$$|f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot tx}| \leqslant |f(x)|, \qquad x, t \in \mathbb{R},$$

ist $|f|$ eine konvergente Majorante des Integranden für alle t. Da dieser in t stetig ist, ist $\hat{f}$ stetig auf $\mathbb{R}$. — Ist zusätzlich auch xf integrierbar, so hat die t-Ableitung des Integranden $|xf|$ als gleichmäßige integrierbare Majorante. Also ist $\hat{f}$ differenzierbar und

$$\begin{aligned} D\hat{f}(t) &= \int_{\mathbb{R}} \partial_t (f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot tx})\,\mathrm{d}x \\ &= -\mathrm{i}\int_{\mathbb{R}} xf(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot tx}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Somit ist $\hat{f}$ sogar stetig differenzierbar, und es gilt

$$D\hat{f} = -\mathrm{i}(xf)\hat{}\ .$$

Mehr dazu im Kapitel über die Fouriertransformation. ◂

21

Integration im $\mathbb{R}^n$

Für Regelfunktionen stimmt das Lebesgueintegral mit dem Regelintegral überein. Im eindimensionalen Fall stehen uns daher die vertrauten Techniken zur Verfügung, um Integrale zu berechnen. Doch wie geht man in höheren Dimensionen vor?

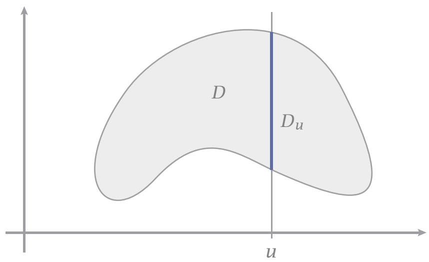
Im Wesentlichen gibt es zwei Möglichkeiten. Die erste ist als Satz von Fubini bekannt. Er erlaubt es unter recht allgemeinen Voraussetzungen, ein n-dimensionales Integral als Hintereinanderausführung niederdimensionaler Integrale darzustellen und so im Prinzip auf n eindimensionale Integrale zurückzuführen.

Die zweite besteht darin, ein Integral durch Einführung geeigneter Koordinaten – wie zum Beispiel Polar- oder Kugelkoordinaten – zu vereinfachen. Die hierfür nötige n-dimensionale Transformationsformel ergibt sich allerdings, anders als im eindimensionalen Fall, nicht direkt aus einer Kettenregel. Vielmehr ist einiges Geschick erforderlich, um diese mit dem Satz von Fubini und partieller Integration herzuleiten.

Es gibt noch noch eine dritte Möglichkeit – die als Satz von Stokes bekannte Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes auf höhere Dimensionen. Diesen betrachten wir erst im nächsten Kapitel, da er einigen begrifflichen Aufwand erfordert.

Abb 1

Zum Prinzip des Cavalieri



21.1 Der Satz von Fubini

Wir betrachten das Problem, ein n-dimensionales Integral als Folge 1-dimensionaler Integrale darzustellen, die wir – zumindest im Prinzip – berechnen können. Die Grundidee ist das *Prinzip des Cavalieri*. Sei D eine abgeschlossene Menge in der (u, v)-Ebene. Jeder *u-Schnitt*

$$D_u = \{v : (u, v) \in D\}$$

ist eine abgeschlossene 1-dimensionale Menge mit 1-dimensionalem Maß

$$L(D_u) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{D_u} \, \mathrm{d}\lambda_1 .$$

Der Flächeninhalt von D sollte sich dann als 1-dimensionales Integral über diese Schnittlängen darstellen lassen, also

$$\lambda_2(D) = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_D \, \mathrm{d}\lambda_2 = \int_{\mathbb{R}} L(D_u) \, \mathrm{d}\lambda_1 = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_D \, \mathrm{d}\lambda_1 \right) \mathrm{d}\lambda_1 .$$

Für das Flächenmaß von Intervallen ist dies jedenfalls richtig, denn die Fläche eines 2-Intervalls ist das Produkt der Längen seiner Seiten. Damit gilt es ebenso für alle zulässigen 2-dimensionalen Mengen, denn diese lassen sich als disjunkte Vereinigung von 2-Intervallen darstellen. Somit sollte dies auch für alle ebenen Gebiete gelten, die sich gut durch zulässige Mengen approximieren lassen.

Der Satz von Fubini verallgemeinert diesen Gedanken auf Maße in beliebigen Dimensionen, die sich als Produktmaße darstellen lassen. Dazu betrachten wir jetzt den Raum

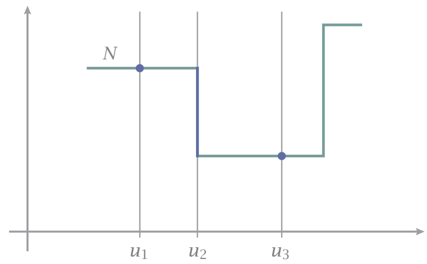
$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s, \qquad r, s \geqslant 1 .$$

Das Maß auf diesem Raum ist gegeben als Produkt

$$\mu_n = \mu_r \times \mu_s$$

Abb 2

Nullmenge mit verschiedenen Schnitten



zweier Maße auf den Faktorräumen. Ziel ist, ein Integral bezüglich μ_n durch zwei Integrale bezüglich der Maße μ_r und μ_s darzustellen.

Eine Komplikation besteht darin, dass im Allgemeinen nicht alle Schnitte einer μ_n-Nullmenge auch μ_r- oder μ_s-Nullmengen sind, sondern auch positives Maß haben können. Die genaue Formulierung des Satzes ist daher etwas umständlich, auch wenn dies für seine Anwendung selten eine Rolle spielt.

Wir vereinbaren noch folgende Notationen. Ist eine Funktion

$$f : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}, \quad f(x) = f(u, v)$$

gegeben, so sei ihr *u-Schnitt* die partielle Funktion [1]

$$f_u : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto f_u(v) \coloneqq f(u, v).$$

Ist diese Funktion μ_s-integrierbar für alle u außerhalb einer μ_r-Nullmenge in $\mathbb{R}^r$, so erhalten wir durch Integration über $\mathbb{R}^s$ μ_r-fast überall erklärte Funktion

$$F : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}, \quad F(u) =_{\mu_r} \int_{\mathbb{R}^s} f_u \, \mathrm{d}\mu_s.$$

Die Frage ist, ob diese Funktion μ_r-integrierbar ist, und ob

$$\int_{\mathbb{R}^r} F \, \mathrm{d}\mu_r = \int_{\mathbb{R}^r} \left(\int_{\mathbb{R}^s} f \, \mathrm{d}\mu_s \right) \mathrm{d}\mu_r = \int_{\mathbb{R}^n} f \, \mathrm{d}\mu_n.$$

Diese Frage beantworten wir zuerst für monoton approximierbare Funktionen.

1 **Satz von Tonelli** *Sei $f \in \mathcal{U}^n(\mu_n)$. Dann ist*

$$f_u \in_{\mu_r} \mathcal{U}^s(\mu_s), \qquad F \coloneqq_{\mu_r} \int_{\mathbb{R}^s} f \, \mathrm{d}\mu_s \in \mathcal{U}^r(\mu_r),$$

und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, \mathrm{d}\mu_n = \int_{\mathbb{R}^r} F \, \mathrm{d}\mu_r.$$

Dies gilt auch für den Fall unbeschränkter Integrale. ⋊

[1] Partielle Ableitungen benötigen wir hier nicht, so dass keine Velwechsrungsgefahl besteht.

Beweis des Satzes von Tonelli

Für den Beweis sei $\mathcal{U}^i = \mathcal{U}^i(\mu_i)$ für $i = n, r, s$. Da jedes Maß sich auf genau einen Raum bezieht, können wir auf deren Angabe in Integralen verzichten. — Der Beweis erfolgt nun in mehreren Schritten.

Schritt 1 *Der Satz von Tonelli gilt für die charakteristischen Funktionen beschränkter Intervalle.* ⋊

⟪⟪ Für $I = I_r \times I_s$ mit Intervallen $I_r \in \mathfrak{J}^r$ und $I_s \in \mathfrak{J}^s$ ist $f = \chi_I = \chi_{I_r}\chi_{I_s}$. Für jeden u-Schnitt gilt

$$f_u = \chi_{I,u} = \chi_{I_r}(u)\,\chi_{I_s} \in \mathcal{U}^s,$$

und Integration über $\mathbb{R}^s$ ergibt

$$F = \int \chi_{I_r}\chi_{I_s}\,\mathrm{d}\mu_s = \mu_s(I_s)\,\chi_{I_r} \in \mathcal{U}^r.$$

Aufgrund der Definition des Produktmaßes $\mu_n = \mu_r \times \mu_s$ gilt schließlich

$$\begin{aligned}\int F\,\mathrm{d}\mu_r &= \mu_s(I_s)\int \chi_{I_r}\,\mathrm{d}\mu_r \\ &= \mu_s(I_s)\mu_r(I_r) = \mu_n(I) = \int f\,\mathrm{d}\mu_n.\end{aligned}$$

Damit ist für χ_I alles gezeigt. ⟫⟫

Schritt 2 *Der Satz von Tonelli gilt für alle Treppenfunktionen.* ⋊

⟪⟪ Treppenfuntionen sind Linearkombinationen charakteristischer Funktionen von Intervallen. Daher genügt es zu zeigen, dass dieser Satz für eine Linearkombination $\alpha f + \beta g$ gilt, wenn er für Treppenfunktionen f und g gilt. Gilt nun der Satz von Tonelli für f und g, so gilt auch für jeden u-Schnitt

$$(\alpha f + \beta g)_u = \alpha f_u + \beta g_u \in \mathcal{T}^s,$$

und es ist

$$F = \int f\,\mathrm{d}\mu_s \in \mathcal{T}^r, \qquad G = \int g\,\mathrm{d}\mu_s \in \mathcal{T}^r.$$

Also ist auch

$$\int (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}\mu_s = \alpha \int f\,\mathrm{d}\mu_s + \beta \int g\,\mathrm{d}\mu_s = \alpha F + \beta G \in \mathcal{T}^r.$$

Und schließlich gilt dann auch, mit dem Satz von Tonelli für f und g,

$$\begin{aligned}\int (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}\mu_n &= \alpha \int f\,\mathrm{d}\mu_n + \beta \int g\,\mathrm{d}\mu_n \\ &= \alpha \int F\,\mathrm{d}\mu_r + \beta \int G\,\mathrm{d}\mu_r = \int (\alpha F + \beta G)\,\mathrm{d}\mu_r.\end{aligned}$$

Das war zu zeigen. ⟫⟫

21.4