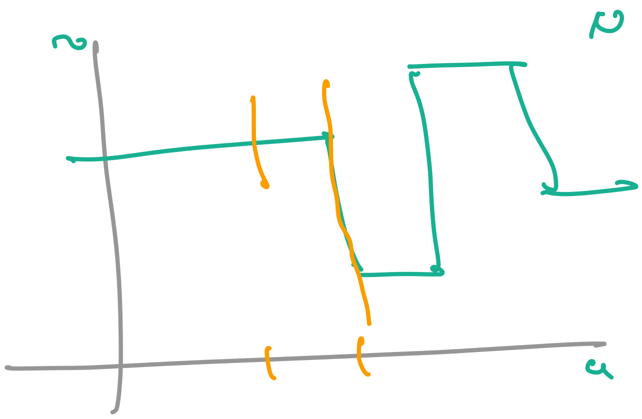
14. Vorlesung 2.12.2021



$\Omega_u = \{ v : (u,v) \in \Omega \}$

Ω_u - Zerlegung ?

Beweis: Angenommen sei A μ_n-Nullmenge.

Es ex. Überdeckung (I_k) durch n-Würfel

so dass

- jeder Punkt von A ∞ oft überdeckt
- $\sum_{k\geq 1} \mu_n(I_k) < \infty$.

Betrachte die Schnitte: $(I_{k,x})$ bilden Überdeckung von A_x durch s-Würfel

wobei jeder Punkt von A_x ∞ oft überdeckt.

Zu zeigen:

$$\sum_{k\geq 1} \mu_s(I_{k,x}) < \infty$$

Dann A_x eine μ_s-Nullmenge.

Setze

$$\sum_{k\geq 1} \mu_s(I_{k,x})$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{1\leq k\leq m} \mu_s(I_{k,x})$$

$$= \lim_{m\to\infty} \underbrace{\sum_{1\leq k\leq m} \int_{\mathbb{R}^s} \chi_{I_{k,x}}\, d\mu_s}_{\varphi_m(x)}$$

Dann gilt: φ_n einfache messbare Folge von Treppenfunktionen in T^r

und es gilt:

$$\int \varphi_n \, d\mu_n = \sum_{1 \le k \le s_n} \underbrace{\int \left(\int \chi_{I_{k,n}} \, d\mu_S \right) d\mu_n}$$

$$\overset{2.\,\text{Schritt}}{=} \sum_{1 \le k \le s_n} \int \chi_{I_k} \, d\mu_n$$

$$= \sum_{k \ge 1} \mu_n(I_k) < \infty .$$

<u>Lemma A</u>:

$$\varphi := \lim \varphi_n <_{\mu_n} \infty$$

Also: X_n μ_n-fast überall u. eine μ_S-Nullmenge. ∎

Schritt 3: Sei $f \in \mathfrak{L}^n$, (f_k) Folge von TF:

$$f_k \nearrow_{\text{f.ü.}} f, \quad I_{\mu_n}(f_k) \nearrow I_{\mu_n}(f).$$

Hilfssatz: Es ex. μ_r-Nullmenge N_r sodass

$$f_{k,u} \nearrow_{k\to\infty} f_u, \quad u \notin N_r.$$

Satz monotone Konvergenz:

$$f_u \in \mathfrak{L}^s, \quad \int f_{k,u} \, d\mu_s \nearrow \int f_u \, d\mu_s, \quad u \notin N_r$$

Damit gilt also:

$$F_k = \int f_k \, d\mu_s \nearrow_{\text{f.ü.}} F = \int f \, d\mu_s$$

in T^r

Satz monotone Konvergenz:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^r} F \, d\mu_r &= \int \lim F_k \, d\mu_r \\
&= \lim \int F_k \, d\mu_r \\
&= \lim \int \left(\int f_k \, d\mu_s \right) d\mu_r \\
&= \lim_{k\to\infty} \int f_k \, d\mu_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu_n . \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Beweis: Sei $f = g - h$ beliebige Darstellung mit $g, h \in \mathcal{U}^+$

Tonelli

Für g, h gilt Tonelli, und die auftretenden Integrale sind endlich.

Damit folgt Fubini mit Linearität von Integralen. $\square$

$f = f(x) = f(u,v)$. Assume:

$f(u,\cdot)$ int. for given u integrable in v.

$$F = \int_{\mathbb{R}^n} f(u,v)\,dv =: F(u)$$

and [illegible]:

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^m} F(u)\,du = \int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(u,v)\,dv\right)du = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,dx.}$$

$u \leftrightarrow v$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^m} f(u,v)\,du\right)dv$$

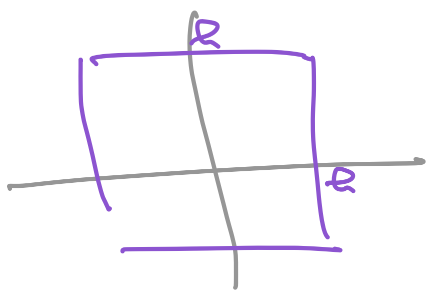
$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^m} f(u,v)\,du\,dv$$

Beweis: Annahme:

$$\int\int |f| \, dv \, du < \infty .$$

Sei (f_n) eine approximierende Folge

wie beim Satz (Integrabilität):



Dann $f_n \to f$.

Da f_n integrierbar, gilt Fubini:

$$\int |f_n| \, dx = \int \int |f_n(u,v)| \, dv \, du$$

$$\leq \underbrace{\iint |f(u,v)| \, dv \, du}$$

$< \infty$, für alle n.

Damit (Integrabilität!) ist $f \in L^1(\ldots)$.

$\square$

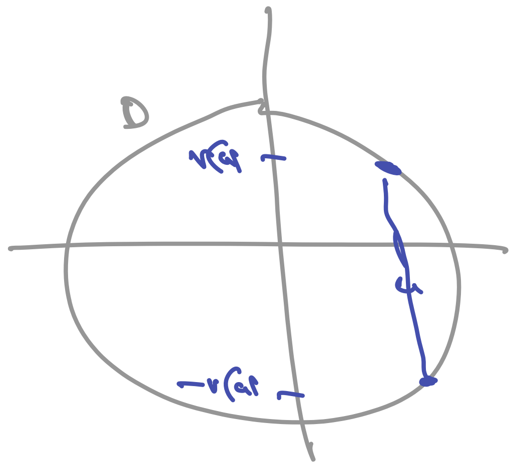
Beispiele :

1. $D = \{ x^2 + y^2 \leq 1 \} \subset \mathbb{R}^2$

$f : D \to \mathbb{R}$

$$\int_D f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^2} f \chi_D \, d\lambda$$

$r(u) = \sqrt{1-u^2}$



$$= \int_{(-1,1)} \left(\int_{(-1,1)} (f \chi_D) \, dv \right) du$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-r(u)}^{r(u)} f(u,v) \, dv \right) du$$

$$= \int_D f \, d\lambda .$$

2. Sei $f(u,v) = \sqrt{1-u^2-v^2}$

$$\frac{V}{2} = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-r(u)}^{r(u)} \sqrt{1-u^2-v^2}\, dv \right) du$$

Subst. : $v = r(u) \sin t$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

Dann :

$$\underbrace{1-u^2}_{r^2(u)} - r^2(u) \sin^2 t = r^2(u) \cos^2 t$$

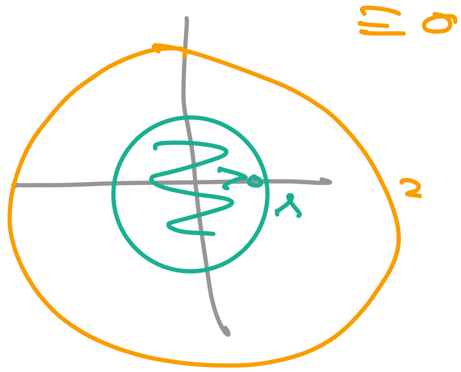
$$= \int_{-1}^{1} r^2(u) \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt \right) du$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} (1-u^2)\, du = \frac{2\pi}{3} .$$

Bsp: Wähle $\rho_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$:

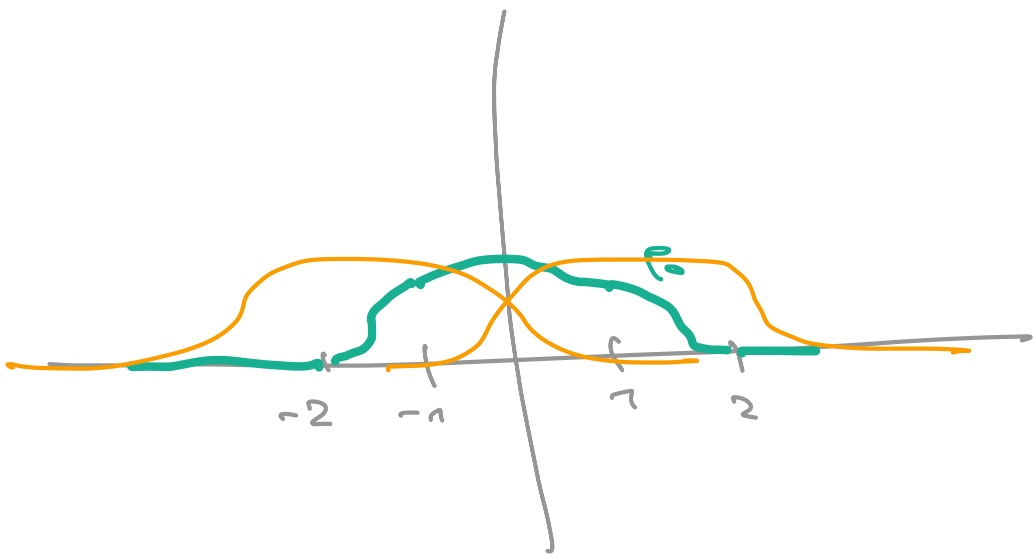
$$\rho_0(B_1 > 0$$

$$\rho_0(B_2^c = 0$$



Für $k \in \mathbb{Z}^n$:

$$\rho_k = \rho_0(\cdot - k)$$



$$\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \rho(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \rho_k(x) > 0$$

Normalisiere:

$$\sigma_k := \frac{\rho_k}{\rho}.$$

$\blacksquare$

Beweis: 1. Schritt: Sei K kompakt!

Es ex. $U_1, \dots, U_m$ in $\mathcal{O}$:

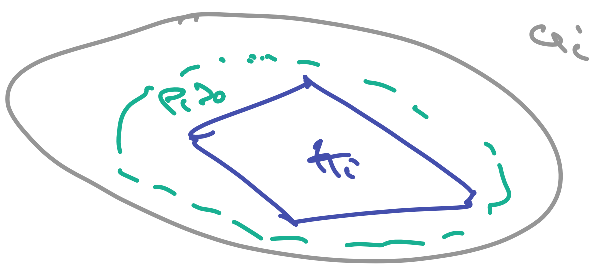
$$K \subset U := U_1 \cup \dots \cup U_m .$$

Dann kompakte Mengen $K_i \subset U_i$ so, dass

$$K \subset K_1^\circ \cup \dots \cup K_m^\circ \subset U .$$

Dann ex. stetige C^∞-Funktionen φ_i:

$$\varphi_i|_{K_i} > 0 , \quad \varphi_i|_{U_i^c} \equiv 0$$



$\varphi_i \equiv 0$.

Sonst gilt:

$$\rho_1 + \dots + \rho_n > 0 \quad \text{auf} \quad K_0 = K_1 \cup \dots \cup K_n$$

und damit auch > 0

auf ein Umgebung $U_0 \supset K_0$.

Dazu ex. noch eine weitere C^∞-Funktion

ρ_0:

$$\rho_0|_{K_0} \equiv 0,$$

$$\rho_0|_{U_0^c} > 0.$$

Dann gilt:

$$\rho = \rho_0 + \dots + \rho_n > 0 \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^n$$

$$\rho|_{K_0} = \rho_1 + \dots + \rho_n$$

Setze dann

$$\sigma_i := \frac{\rho_i}{\rho}, \quad 1 \le i \le n.$$

2. Schritt: Es genügt:

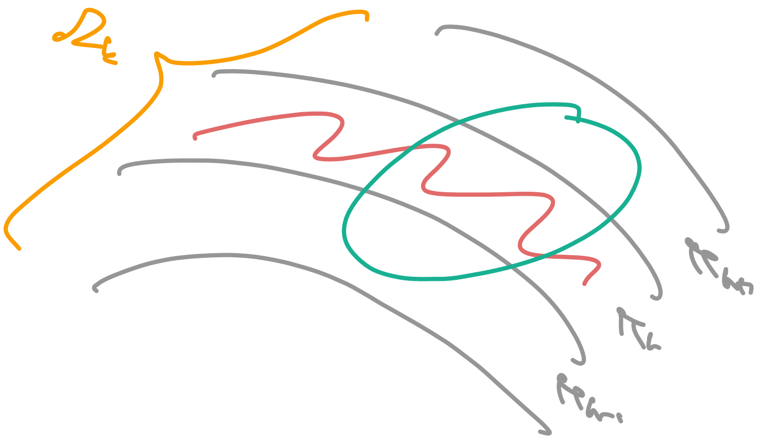
$(M_n)_{n\geq 1}$ steigende Folge kompakter Mengen:

$$M = \bigcup_{n\geq 1} M_n$$

$$M_n \subset M_{n+1}^\circ$$

Def. Definiere

$$\Omega_n := M_{n+1}^\circ \setminus M_{n-2} \quad \text{offen.}$$



Dann

$$K_n = \underbrace{M_n \setminus M_{n-1}^\circ}_{\text{kompakt.}} \subset \Omega_n$$

wobei $M_{-1} = M_0 = \emptyset$.

Dann:
$$\mathcal{O}_n = \{ U \cap \Omega_n : U \in \mathcal{O} \}$$

offene Überdeckung von K_n.

3. Schritt: M ist offen.

Ausschöpfung durch Kompakta:

$$M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$$

$$K_n = \underbrace{\{ x \in M : |x| \leq n \wedge \operatorname{dist}(x, M^c) \geq \tfrac{1}{n} \}}_{\text{kompakt.}}$$

4. Schritt: M beliebig:

$\mathcal{O} = \{U\}$ Überdeckung.

Dann

$$\Omega = \bigcup_{U \in \mathcal{O}} U \quad \text{offen,} \quad \supset M.$$

Schritt 3.

$\square$