Hilfssatz *Sei N eine μ_n-Nullmenge. Dann ist μ_r-fast jeder u-Schnitt*

$$N_u = \{v : (u, v) \in N\} \subset \mathbb{R}^s$$

eine μ_s-Nullmenge. ⋊

⟪⟪⟪ Zu der μ_n-Nullmenge N existiert 20.6 eine Folge (I_k) von n-Intervallen, so dass jeder Punkt in N von unendlich vielen Intervallen überdeckt wird und

$$\sum_{k \geqslant 1} \mu_n(I_k) < \infty.$$

Die u-Schnitte $(I_{k,u})$ bilden dann eine Überdeckung von N_u durch s-Intervalle, wober jeder Punkt von N_u unendlich oft überdeckt wird. Gilt also

$$\sum_{k \geqslant 1} \mu_s(I_{k,u}) < \infty,$$

so ist auch N_u eine μ_s-Nullmenge 20.6 . — Betrachte dazu

$$\psi_m = \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} \int \chi_{I_k} \, \mathrm{d}\mu_s.$$

Es ist also

$$\psi(u) = \sum_{k \geqslant 1} \int \chi_{I_{k,u}} \, \mathrm{d}\mu_s = \sum_{k \geqslant 1} \mu_s(I_{k,u}).$$

Dies ist eine monoton steigende Folge von Funktionen in $\mathcal{T}^r$ mit beschränkter Integralfolge, denn

$$\int \psi_m \, \mathrm{d}\mu_r = \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} \int \left(\int \chi_{I_k} \, \mathrm{d}\mu_s \right) \mathrm{d}\mu_r \leqslant \sum_{k \geqslant 1} \mu_n(I_k) < \infty.$$

Mit Lemma A 20.13 gilt also $\psi \coloneqq \lim \psi_m <_{\mu_r} \infty$. Also ist N_u für μ_r-fast alle u eine μ_s-Nullmenge. ⟫⟫⟫

Schritt 3 *Der Satz gilt für alle monoton approximierbaren Funktionen.* ⋊

⟪⟪⟪ Sei $f \in \mathcal{U}^n$ und (f_k) eine Folge von Treppenfunktionen mit

$$f_k \nearrow_{\mu_n} f, \qquad I_{\mu_n}(f_k) \nearrow I_{\mu_n}(f).$$

Die Folge konvergiert also außerhalb einer μ_n-Nullmenge monoton gegen f. Aufgrund des Hilfssatzes gibt es dann eine μ_r-Nullmenge N_r in $\mathbb{R}^r$, so dass auch

$$f_{k,u} \nearrow_{\mu_s} f_u, \qquad u \notin N_r.$$

Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz 20.18 folgt

$$f_u \in \mathcal{U}^s, \qquad \int f_{k,u} \, \mathrm{d}\mu_s \nearrow \int f_u \, \mathrm{d}\mu_s, \qquad u \notin N_r.$$

Damit gilt also

$$F_k = \int f_k \, \mathrm{d}\mu_s \nearrow_{\mu_r} F = \int f \, \mathrm{d}\mu_s,$$

wobei die F_k eine Folge in $\mathcal{T}^r$ bilden. Wiederum mit dem Satz von der monotonen Konvergenz ist also $F \in \mathcal{U}^r$, und mit Schritt 2 ist

$$\begin{aligned}\int F \, \mathrm{d}\mu_r &= \lim \int F_k \, \mathrm{d}\mu_r \\ &= \lim \int f_k \, \mathrm{d}\mu_n = \int f \, \mathrm{d}\mu_n.\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für jede Funktion $f \in \mathcal{U}^n$ bewiesen. ⟫⟫⟫

■ Der Satz von Fubini

Nun betrachten wir den Fall beliebiger messbarer Funktionen. Wie beim Übergang vom Satz von Beppo Levi zum Satz von Lebesgue setzen wir voraus, dass die betrachtete Funktion nicht nur messbar, sondern integrierbar ist. Diese Annahme ist unverzichtbar.

2 **Satz von Fubini** *Sei $f \in \mathcal{L}^n(\mu_n)$. Dann ist*

$$f_u \in_{\mu_r} \mathcal{L}^s(\mu_s), \qquad F :=_{\mu_r} \int_{\mathbb{R}^s} f \, \mathrm{d}\mu_s \in \mathcal{L}^r(\mu_r),$$

und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, \mathrm{d}\mu_n = \int_{\mathbb{R}^r} F \, \mathrm{d}\mu_r. \qquad \rtimes$$

⟪⟪⟪ Sei $f = u_1 - u_2$ eine zulässige Darstellung von f durch monoton approximierbare Funktionen. Für u_1 und u_2 gilt somit der Satz von Tonelli, wobei nach Voraussetzung alle auftretenden Integrale endlich sind. Die Behauptung für f ergibt sich hieraus mit der Linearität des Integrals. ⟫⟫⟫

In klassischer Notation für Volumenmaße sagt dieser Satz Folgendes aus. Ist $f = f(x) = f(u,v)$ integrierbar, so ist der u-Schnitt $f(u,\cdot)$ für fast jedes u eine integrierbare Funktion von v. Dessen Integral bezüglich v definiert fast überall eine integrierbare Funktion F von u, und für deren Integral gilt

$$\int_{\mathbb{R}^r} F(u) \, \mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}^r} \left(\int_{\mathbb{R}^s} f(u,v) \, \mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, \mathrm{d}x.$$

Aus Symmetriegründen können wir die Rollen von u und v vertauschen und erhalten dementsprechend

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^s} \left(\int_{\mathbb{R}^r} f(u,v) \, \mathrm{d}u \right) \mathrm{d}v.$$

Dabei bezeichnen $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}x$ die Volumenmaße auf $\mathbb{R}^r$, $\mathbb{R}^s$ respektive $\mathbb{R}^n$.

In der Regel lässt man die Klammern hierbei weg und schreibt kürzer

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^s}\int_{\mathbb{R}^r} f(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \int_{\mathbb{R}^r}\int_{\mathbb{R}^s} f(u,v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u.$$

Dies ist ›von innen nach außen‹ zu lesen. Beim letzten Integral zum Beispiel wird der Integrand zuerst bezüglich v über $\mathbb{R}^s$ integriert, und das Ergebnis anschließend bezüglich u über $\mathbb{R}^r$. Dies ist etwas ganz anderes als das Integral über $\mathbb{R}^n$ auf der linken Seite!

Typischerweise werden die Sätze von Tonelli und Fubini gemeinsam angewendet, um erst die Integrierbarkeit einer Funktion festzustellen und dann deren Integral durch iterierte Integrale darzustellen.

3 **Satz von Tonelli-Fubini** *Sei $f \in \mathcal{M}^n(\lambda)$. Existiert eines der Integrale*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,\mathrm{d}x,\quad \int_{\mathbb{R}^s}\int_{\mathbb{R}^r} |f(u,v)|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v,\quad \int_{\mathbb{R}^r}\int_{\mathbb{R}^s} |f(u,v)|\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u$$

und ist endlich, so auch jedes andere, und alle sind gleich. In diesem Fall ist f integrierbar, und es gilt der Satz von Fubini $_2$. ⋊

⟨⟨⟨⟨ Ist das erste Integral endlich, so ist f integrierbar. Dann ist der Satz von Fubini auf f und $|f|$ anwendbar, und wir sind fertig.

Sei jetzt zum Beispiel das letzte Integral endlich. Die abgeschnittenen Funktionen $|f_k|$ vom Beweis des Majorantenkriteriums $_{20.28}$ sind integrabel, und mit Fubini gilt

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f_k|\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^r}\int_{\mathbb{R}^s} |f_k(u,v)|\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^r}\int_{\mathbb{R}^s} |f(u,v)|\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u < \infty.\end{aligned}$$

Da dies für alle k gilt, ist auch $|f|$ integrierbar, und wir können wie zuvor argumentieren. ⟩⟩⟩⟩

▪ Beispiele

Wir geben hier zwei Beispiele. Viele weitere ergeben sich später von selbst.

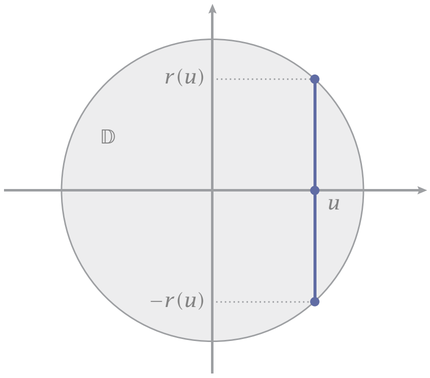
4 ▹ A. Sei $f\colon \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ stetig auf der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}$ Dann ist

$$\int_{\mathbb{D}} f\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^2} f\chi_{\mathbb{D}}\,\mathrm{d}\lambda.$$

Da $\chi_{\mathbb{D}}(u,v) = 1$ für $|v| \leqslant r(u) := \sqrt{1-u^2 0}$ und 0 sonst, erhalten wir

Abb 3

Integration über die Einheitskreisscheibe



$$\int_{\mathbb{D}} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^2} f\chi_{\mathbb{D}} \,\mathrm{d}\lambda = \int_{[-1,1]} \left(\int_{[-1,1]} (f\chi_{\mathbb{D}}) \,\mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u$$
$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-r(u)}^{r(u)} f(u,v) \,\mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u.$$

B. Mit $f(u,v) = \sqrt{1 - u^2 - v^2 0}$ erhalten wir insbesondere die Hälfte des Volumens V der Einheitskugel,

$$\frac{V}{2} = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-r(u)}^{r(u)} \sqrt{1 - u^2 - v^2} \,\mathrm{d}v \right) \mathrm{d}u.$$

Die Substitution $v = r(u)\sin t$ mit $-\pi/2 \leqslant t \leqslant \pi/2$ ergibt mit einer kurzen Rechnung

$$\frac{V}{2} = \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2(u) \cos^2 t \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}u$$
$$= \int_{-1}^{1} r^2(u) \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t \,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}u$$
$$= \frac{\pi}{2} \int_{-1}^{1} (1 - u^2) \,\mathrm{d}u = \frac{2\pi}{3}.$$

Etwas einfacher wird diese Rechnung später mit Polarkoordinaten 16 . ◂

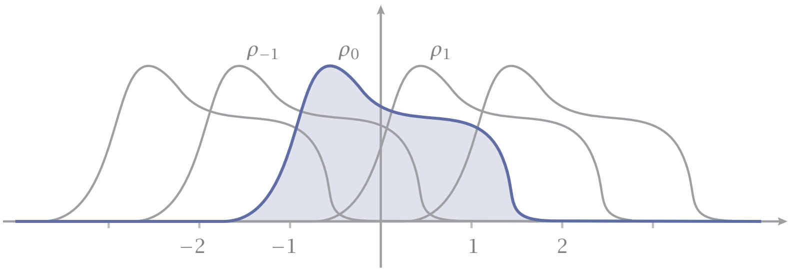
21.2 Zerlegungen der Eins

Um die Transformationsformel für n-dimensionale Integrale wie auch später das Integral für Differenzialformen auf Mannigfaltigkeiten zu definieren, benötigen wir als technisches Hilfsmittel *Zerlegungen der Eins*. Diese erlauben es in vielen Fällen, eine globale Identität auf lokale Identitäten zurückzuführen.

Im Folgenden steht *glatt* für *unendlich oft differenzierbar*.

21.8

Abb 4 Zum Beispiel 6



Definition *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ nicht leer. Eine Zerlegung der Eins auf M ist eine Familie $\mathfrak{T}$ von glatten Funktionen $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger mit folgenden Eigenschaften:*

(z-1) *Für alle $\sigma \in \mathfrak{T}$ gilt* $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$.

(z-2) *Zu jedem Punkt in M existiert eine Umgebung U, so dass die U-Familie*

$$\mathfrak{T}_U := \{\sigma \in \mathfrak{T} : \operatorname{supp} \sigma \cap U \neq \varnothing\}$$

endlich ist.

(z-3) *Für jeden Punkt $x \in M$ gilt* $\sum_{\sigma \in \mathfrak{T}} \sigma(x) = 1$. ⋊

Bemerkungen *a.* Eine Zerlegung der Eins auf M ist auch eine Zerlegung der Eins für jede Teilmenge von M. Somit genügt als Beispiel der $\mathbb{R}^n$ selbst.

b. Für (z-2) sagt man auch, eine Zerlegung der Eins ist *lokal endlich*. Die Summe in (z-3) ist daher in jedem Punkt von M endlich, und das Problem der Konvergenz der Reihe stellt sich nicht.

c. Gelegentlich genügt auch eine stetige Zerlegung der Eins, bestehend aus stetigen Funktionen. Diese kann man aber ohne Mühe zu glatten Funktionen glätten. Es stellt daher keine Einschränkung dar, nur glatte Zerlegungen der Eins zu betrachten. ⊸

5 **Lemma** *Ist $\mathfrak{T}$ eine Zerlegung der Eins auf M und $K \subset M$ kompakt, so ist auch die K-Familie $\mathfrak{T}_K$ endlich.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Nach Voraussetzung gibt es zu jedem Punkt in K eine offene Umgebung U so, dass $\mathfrak{T}_U$ endlich ist. Nach dem Satz von Heine-Borel A-20.2 überdecken bereits endlich viele solche Umgebungen $U_1, .., U_n$ die kompakte Menge K. Wegen

$\mathfrak{T}_K \subset \mathfrak{T}_{U_1} \cup .. \cup \mathfrak{T}_{U_n}$ ist damit auch $\mathfrak{T}_K$ endlich. ⟩⟩⟩⟩⟩

6 ⊳ *Zerlegung der Eins auf* $\mathbb{R}^n$ Wähle eine beliebige nichtnegative glatte Funktion ρ_0 mit der Eigenschaft, dass

$$\rho_0|B_1 > 0, \qquad \rho_0|B_2^c = 0.$$

Für $k \in \mathbb{Z}^n$ sei $\rho_k = \rho_0(\cdot - k)$ die um k verschobene Funktion ρ_0. Dann nehmen auf jeder beschränkten Menge nur endlich viele ρ_k positive Werte an, und die Funktion

$$\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \rho(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \rho_k(x)$$

ist wohldefiniert, positiv und differenzierbar. Die normalisierten Funktionen

$$\sigma_k = \frac{\rho_k}{\rho}, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

bilden dann eine Zerlegung der Eins auf $\mathbb{R}^n$. ◂

Meistens benötigt man jedoch nicht irgendeine Zerlegung, sondern eine, die einer vorgegebenen offenen Überdeckung einer Menge *untergeordnet* ist.

7 **Satz** *Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ enicht leer und $\mathcal{O}$ eine offene Überdeckung von M. Dann existiert eine $\mathcal{O}$ untergeordnete Zerlegung der Eins $\mathcal{T}$ auf M. Das heißt, für jedes $\sigma \in \mathcal{T}$ existiert ein $U \in \mathcal{O}$, so dass* $\operatorname{supp} \sigma \subset U$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Der Beweis erfolgt in vier Schritten.

1. Schritt: M ist kompakt Dann wird M bereits durch endlich viele offene Mengen $U_1, .., U_n$ in $\mathcal{O}$ überdeckt, also $M \subset U \coloneqq U_1 \cup .. \cup U_n$. Dazu – siehe folgendes Lemma 8 – existieren kompakte Mengen $K_i \subset U_i$ derart, dass deren Inneres K_i° die Menge M ebenfalls überdeckt, also

$$M \subset K_1^\circ \cup .. \cup K_n^\circ \subset U$$

gilt. Dazu existieren nichtnegative C^∞-Funktionen ρ_i derart, dass

$$\rho_i|K_i > 0, \qquad \rho_i|U_i^c \equiv 0..$$

Somit gilt $\rho_1 + .. + \rho_n > 0$ auf der kompakten Menge $K_0 \coloneqq K_1 \cup .. \cup K_n$, und damit auch auf einer offenen Umgebung $U_0 \supset K_0$. Dazu existiert noch eine C^∞-Funktion ρ_0 mit

$$\rho_0|K_0 \equiv 0, \qquad \rho_0|U_0^c > 0.$$

Dann gilt $\rho \coloneqq \rho_0 + .. \rho_n > 0$ auf ganz $\mathbb{R}^n$, $\rho|K_0 = \rho_1 + .. + \rho_n$, und die Funktionen

$$\sigma_i \coloneqq \frac{\rho_i}{\rho}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

bilden eine $U_1, .., U_n$ und damit $\mathcal{O}$ untergeordnete Zerlegung der Eins auf K_0 und damit auch auf M.

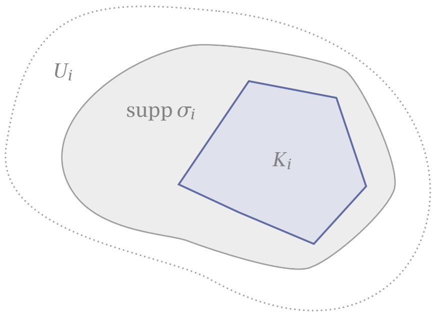


Abb 5
Zum ersten Beweisschritt

2. Schritt: M ist Vereinigung kompakter Mengen M_k Es genügt, eine steigende Folge $(M_k)_{k\geqslant 1}$ kompakter Mengen mit

$$M = \bigcup_{k\geqslant 1} M_k, \qquad M_k \subset M_{k+1}^\circ,$$

zu betrachten. Definiere für $k \geqslant 1$ die offenen ›Ringmengen‹ $\Omega_k \coloneqq M_{k+1}^\circ \setminus M_{k-2}$ und die darin enthaltenen kompakten ›Ringmengen‹

$$K_k = M_k \setminus M_{k-1}^\circ \subset \Omega_k.$$

wobei $M_{-1} \coloneqq M_0 \coloneqq \varnothing$. Dann bildet die Familie

$$\mathcal{O}_k \coloneqq \{U \cap \Omega_k : U \in \mathcal{O}\}$$

eine offene Überdeckung von K_k. Gemäß dem ersten Schritt existiert auf K_k eine $\mathcal{O}_k$ untergeordnete Zerlegung der Eins $\mathcal{S}_k$, die aus endlich vielen Funktionen besteht, welche außerdem sämtlich auf M_{k-2} verschwinden. Innerhalb der Gesamtfamilie $\mathcal{S} \coloneqq \bigcup_{k\geqslant 1} \mathcal{S}_k$ verschwinden somit auf jeder Menge M_k nur endlich viele Funktionen nicht identisch. Die Summe

$$\rho_s = \sum_{\rho\in\mathcal{S}} \rho$$

ist also in jedem Punkt von M *endlich*. Setzen wir

$$\sigma \coloneqq \frac{\rho}{\rho_s}, \qquad \rho \in \mathcal{S},$$

so bilden diese Funktionen eine $\mathcal{O}$ untergeordnete Zerlegung der Eins auf M.

3. Schritt: M ist offen Die Mengen

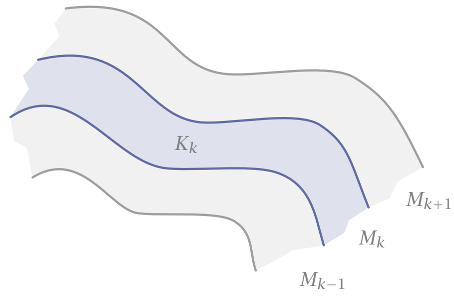
$$M_k \coloneqq \{x \in M : \ |x| \leqslant k \wedge \operatorname{dist}(x, M^c) \geqslant 1/k\}, \qquad k \geqslant 1,$$

bilden eine Ausschöpfung von M durch kompakte Mengen mit $M_k \subset M_{k+1}^\circ$. Also können wir den zweiten Schritt anwenden.

21.11

Abb 6

Die kompakte Menge
$K_k = M_k \setminus M_{k-1}^{\circ}$



4. Schritt: M ist beliebig Die Menge $\Omega \coloneqq \bigcup_{U\in\mathcal{O}} U$ ist offen und enthält M. Eine Zerlegung der Eins auf Ω gemäß dem vorangehenden Schritt ist dann auch eine Zerlegung der Eins auf M. ⟫⟫

Für den Beweis des ersten Schritts benötigen wir noch folgendes

8 **Lemma** *Zu jeder endlichen offenen Überdeckung $U_1, .., U_n$ einer kompakten Menge M existieren kompakte Mengen $K_i \subset U_i$, deren Inneres ebenfalls M überdecken.* ⋊

⟪⟪ Wir konstruieren diese Mengen induktiv wie folgt. Angenommen, wir haben bereits kompakte Mengen $K_1, .., K_{i-1}$, so dass

$$K_1^{\circ} \cup .. \cup K_{i-1}^{\circ} \cup U_i \cup U_{i+1} \cup .. \cup U_n \supset M.$$

Für $i = 1$ entspricht dies der Ausgangssituation, wo wir noch keine kompakte Menge konstruiert haben. Betrachte dann

$$C_i \coloneqq M \setminus (K_1^{\circ} \cup .. \cup K_{i-1}^{\circ} \cup U_{i+1} \cup .. \cup U_n).$$

Diese Menge ist abgeschlossen und in M enthalten, also kompakt. Es gilt auch $C_i \subset U_i$. Dann existiert auch eine kompakte Menge K_i derart, dass

$$C_i \subset K_i^{\circ} \subset K_i \subset U_i.$$

Damit erhalten wir

$$K_1^{\circ} \cup .. \cup K_i^{\circ} \cup U_{i+1} \cup .. \cup U_n \supset M,$$

und wir sind fertig. ⟫⟫

Bemerkungen *a.* Für eine kompakte Menge M existieren also auch endliche Zerlegungen der Eins.

b. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\mathcal{O} = \{\Omega\}$, so kann eine diesbezügliche Zerlegung der Eins trotzdem nicht aus endlich vielen Funktionen bestehen A-7.