15. Vorlesung 8.12.2021

Beweis: Zur Konstruktion:

Angenommen, wir haben kompakte Mengen

$$K_1, \dots, K_{i-1}$$

so dass

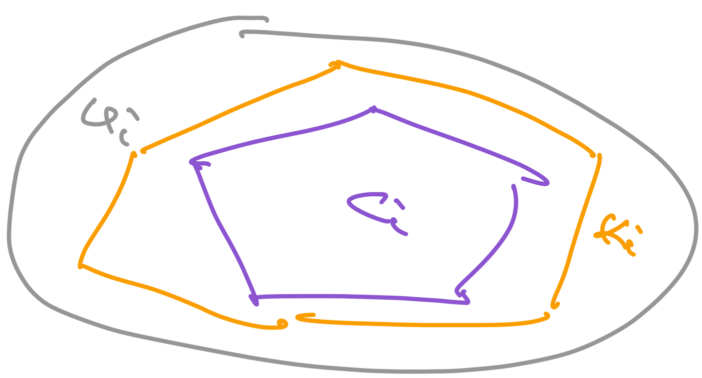
$$\underbrace{K_1^0 \cup \dots \cup K_{i-1}^0} \cup U_i \cup \overbrace{U_{i+1} \cup \dots \cup U_n} \supset K.$$

Für $i=1$: Annahme = Voraussetzung.

Betrachte dann

$$C_i := \underbrace{\underbrace{K}_{\text{kompakt}} \setminus (\underbrace{K_1^0 \cup \dots \cup K_{i-1}^0 \cup U_{i+1} \cup \dots \cup U_n}_{\text{offen}})}_{\text{kompakt}}$$

Es gilt dann $C_i \subset U_i$.



$$C_i \subset K_i^0 \subset \underbrace{K_i}_{\text{kompakt}} \subset U_i$$

Damit gilt:

$$K_1^\circ \cup \dots \cup K_{i-1}^\circ \cup K_i^\circ \cup C_{i+1} \cup \dots \cup C_n \supset M.$$

$\square$

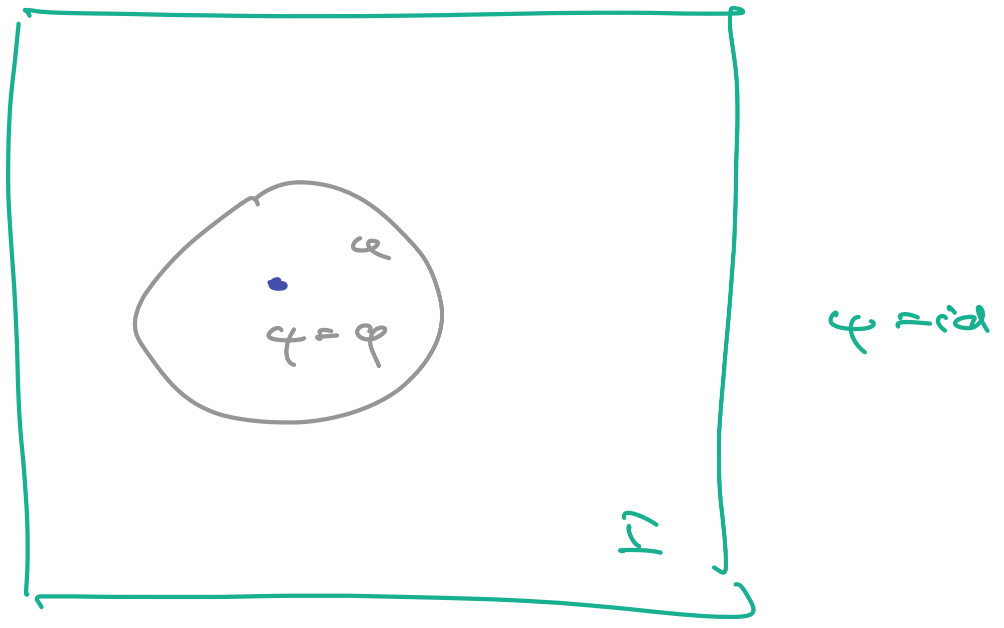
Bem.:

1. Aus i. Schritt: Ist M kompakt, kann man stets auch eine endliche Zerlegung der Eins.

2. Ist Ω offen, $\Theta = \{\Omega\}$.

3. Sei Ω offen, Θ Familie aller offenen Teilmengen von Ω. Dann gilt:

$$\sum_{\sigma \in \Theta} \sigma(x) = \chi_\Omega .$$



ω
ψ = φ
ψ = id

$U \subset \Omega$:

$$\varphi(U) \subset \varphi(\Omega),$$

$\varphi(U)$ offen

Also nur noch Compakta :

$\rightsquigarrow$ offene Überdeckung von Ω und $\varphi(U)$

$\rightsquigarrow$ untergeordnete Zerlegung der Eins $\mathcal{T}$

Dann gilt :

$$f = \sum_{\sigma \in \mathcal{T}} \sigma f$$

Angenommen, es gilt :

$$\int_{\varphi(\Omega)} (\sigma f)\, d\lambda = \int_{\Omega} (\sigma f) \circ \varphi \, |\det D\varphi| \, d\lambda$$

Dann folgt : $\sum_{\sigma \in \mathcal{T}}$

f $\qquad$ f

Weiter umformen :

Für jedes $\sigma \in \mathcal{T}$: $\operatorname{supp} \sigma \subset \varphi(U)$.

Dann : $\int_{\varphi(\Omega)} (\sigma f)\, d\lambda = \int_{\varphi(U)} \sigma f \, d\lambda = \boxed{\int_{\mathbb{R}^n} \sigma f \, d\lambda}$.

$$\int_{\Omega} \underbrace{(\sigma f)\circ\varphi}_{\text{supp } \subset U^c \text{ compact}} \det D\varphi \, dx$$

$$= \int_{U_2} (\sigma f)\circ\varphi_2 \det D\varphi \, dx$$

$$= \int_{U} (\sigma f)\circ\psi \det D\psi \, dx$$

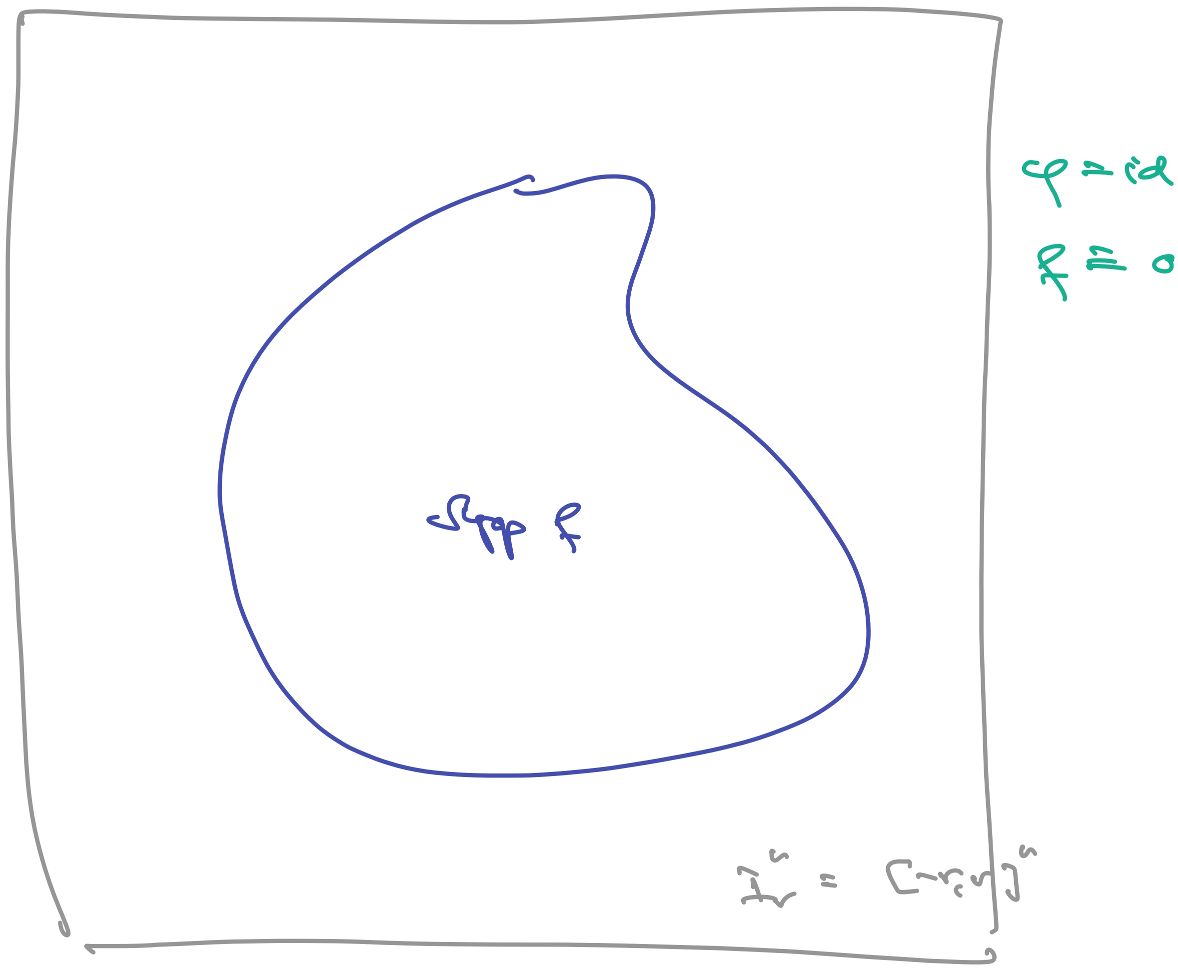
da $\psi(U)$ disjunkt zu $\psi(U^c)$

$$\boxed{= \int_{\mathbb{R}^n} (\sigma f)\circ\psi \det D\psi \, dx}$$

$$\boxed{\overset{!}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \sigma f \, dx.}$$

$\sigma f \rightsquigarrow f$?

$\psi \rightsquigarrow \varphi$?



$\varphi = \mathrm{id}$
$f \equiv 0$
$\operatorname{supp} f$
$I_r^n = [-r,r]^n$

Def

$$g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{x_1} f(t, x_2, \ldots, x_n)\, dt$$

Dann gilt:

$$\partial_1 g = f.$$

Kettenregel:

$$\nabla (g \circ \varphi)$$

$$= \begin{pmatrix} \vdots \\ \partial_j (g \circ \varphi) \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \partial_i g \circ \varphi \cdot \partial_j \varphi_i \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \partial_i g \circ \varphi \cdot \underbrace{\nabla \varphi_i}_{\text{Spaltenvektor}}$$

Also:

$$\boxed{\nabla (g \circ \varphi) = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i g \circ \varphi) \cdot \nabla \varphi_i}$$

$i=1$

Daraus folgt:

$$\det (\nabla (g \circ \varphi), \nabla \varphi_2, \ldots, \nabla \varphi_n)$$

$$= \det ((\partial_1 g \circ \varphi) \nabla \varphi_1, \nabla \varphi_2, \ldots, \nabla \varphi_n)$$

$$= (\partial_1 g \circ \varphi) \cdot \det D\varphi .$$

Beweis:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f\circ\varphi)\det D\varphi\,dx$$

$$= \int_{I_r^n} (f\circ\varphi)\det D\varphi\,dx$$

$$= \int_{I_r^n} (\partial_1 g\circ\varphi)\det D\varphi\,dx$$

s.o.

$$= \int_{I_r^n} \det(\nabla(g\circ\varphi), \nabla\varphi_2, \dots, \nabla\varphi_n)\,dx$$

$I_r^n = (-r,r)^n$

Entwickle det

erste → nach Spalte:

$$= \int_{I_r^n} \sum_{i=1}^n \partial_i(g\circ\varphi)\cdot\psi_i\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{I_r^{n-1}} \left(\int_{I_r} \partial_i(g\circ\varphi)\cdot\psi_i\,dx_i\right) dx_{n-1}$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{I_r^{n-1}} (g\circ\varphi)\,\psi_i\Big|_{-r}^{r}\,dx_{n-1}$$

$$- \int_{I_r^{n-1}} \left(\int_{I_r} (g\circ\varphi)\,\partial_i\psi_i\,dx_i\right) dx_{n-1}$$

$$= \qquad - \int_{I_r^n} (g\circ\varphi)(\partial_1\psi_1 + \dots + \partial_n\psi_n)\,dx$$

$$\boxed{\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (f\circ\varphi) \det D\varphi \, dx &= \sum_{i=1}^{n} \int_{I_r^{n-1}} (g\circ\varphi)\, \varphi_i \Big|_{-r}^{r} dx_{n-1} \\ &\quad - \int_{I_r^n} (g\circ\varphi)\underbrace{(\partial_1\varphi_1 + \dots + \partial_n \varphi_n)} dx_n\end{aligned}}$$

Für: C^2 Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gilt (Ü)

$$\underbrace{\qquad} = 0 .$$

Da φ ~~außerhalb~~ $I_r^n = \mathrm{id}$:

$$\varphi_2 = \dots = \varphi_n = 0 \quad \text{auf } \partial I_r^n$$

$$\varphi_1 = I$$

$$\underbrace{(g\circ\varphi)\,\varphi_1 \Big|_{-r}^{r} = g \Big|_{-r}^{r} = g(r,\cdot)}$$

Zusammen:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f\circ\varphi) \det D\varphi \, dx = \int_{I_r^{n-1}} \underline{g(r,\cdot)}\, dx_{n-1}$$

$$= \int_{I_r^{n-1}} \left(\int_{I_r} f \, dx_n \right) dx_{n-1}$$

$$= \int_{I_r^n} f \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \, dx .$$

$\blacksquare$

Bedingung:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \leq 0 & \cdots & \boxed{a_{1j}} & \\ \vdots & & & \\ \end{pmatrix}$$

[illegible] Spalte 0

Drag: i Spur

– $a_{11} \geq 0$ [illegible] A [illegible].

– [illegible] Gauss-Eliminationsschritt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots \\ 0 & & \\ \vdots & & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$

[illegible] A [illegible].

Gewollt ist:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Jetzt noch

$a_{11} \rightsquigarrow 1$

$\vdots$

$a_{nn} \rightsquigarrow 1$.

Beweis: Betrachte φ um 0,

$\varphi(0) = 0$.

Dann:

$$\varphi = A + \tilde{\varphi}, \quad A = D\varphi(0)$$

$\tilde{\varphi}$ Taylor-Glied Ord:

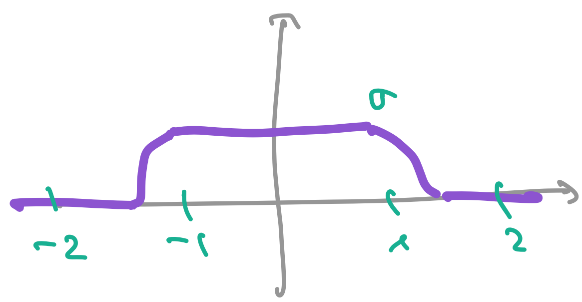
$$\tilde{\varphi} = o(\|x\|).$$

Sei $A \neq 0$: $\Rightarrow$ $\exists\, m > 0$:

$$m\|x\| \leq \|Ax\| \leq \frac{1}{m}\|x\|.$$

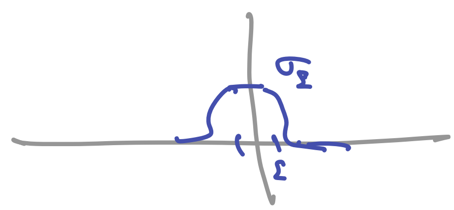
1. Schritt: Abschneiden von $\tilde{\varphi}$.

Abschneidefunktion $\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$



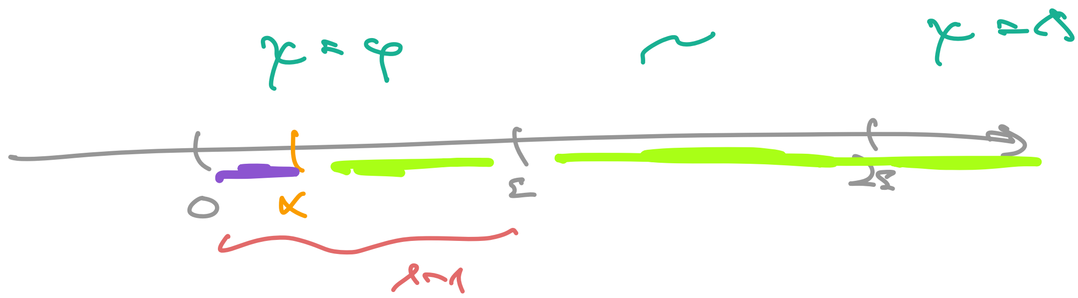
$\sigma_\varepsilon = \sigma \circ \varepsilon$

$\sigma_\varepsilon(x) = \sigma(\varepsilon x)$



Setze nun?

$$\chi = \lambda + \sigma_\varepsilon \hat{\varphi} .$$



Für $0 < \alpha < \varepsilon$

$$\|\chi\|_{B_\alpha} \le \frac{1}{m}\alpha + o(\alpha) \le \frac{2}{m}\alpha .$$

Für $x \in B_{2\varepsilon} \setminus B_\varepsilon$:

$$|\chi(x)| \ge m\varepsilon - o(\varepsilon) \ge \frac{m\varepsilon}{2}$$

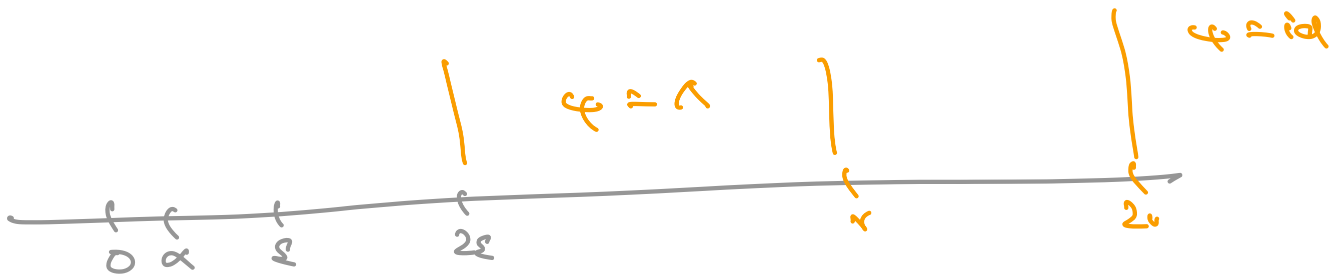
Für α hinreichend klein: $\alpha < \frac{m^2\varepsilon}{4}$:

$\chi(B_\alpha)$ und $\chi(B_\varepsilon^c)$ sind disjunkt.

Da außerdem $\chi|_{B_\varepsilon} = \varphi$ lokaler Diffeo gilt sogar

$$\boxed{\chi(B_\alpha) \cap \chi(B_\alpha^c) = \emptyset .}$$

2. Schritt: Deformiere A zu Id außerhalb B_r, in linearen Abb.



Sei $A(t)$ mit $0 \le t \le 1$ Deformation mit

$$A(0) = Id, \quad A(1) = A.$$

Damit sei

$$L_r := A \circ \sigma_r : \quad L_r(x) = A(\sigma_r(x)) \cdot x$$

Es gilt:

$$L_r | B_r = A(1) = A$$

$$L_r | B^c_{2r} = A(0) = Id.$$

Setze damit

$$\boxed{\varphi = L_r + \sigma_\varepsilon \hat{\varphi}.}$$

Dim. di φ:

$$\varphi(B_\Sigma = C_v(B_\Sigma + \sigma_\Sigma \hat{\varphi}(B_\Sigma$$
$$= \lambda + \hat{\varphi} = \varphi$$

$$\psi(B_r = C_r(B_r + \dots$$
$$= \lambda + \sigma_\Sigma \hat{\varphi} = \psi.$$

$$\psi(B_{2v}^c = \mathrm{id}$$

[illegible]: per $\alpha(H)$ regole?

$$\psi(B_r^c) \cap \psi(B_\alpha) = \emptyset$$

Ex $B_r \setminus B_\alpha$ [illegible] [illegible] : dB :

[illegible] ~~[illegible]~~ :

$$\psi(B_\alpha) \cap \psi(B_\alpha^c) = \emptyset.$$

$\blacksquare$