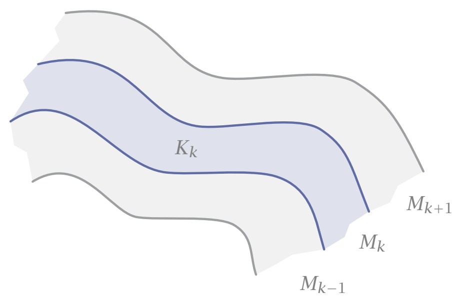
Abb 6

Die kompakte Menge $K_k = M_k \setminus M_{k-1}^\circ$



4. Schritt: M ist beliebig Die Menge $\Omega \coloneqq \bigcup_{U \in \mathcal{O}} U$ ist offen und enthält M. Eine Zerlegung der Eins auf Ω gemäß dem vorangehenden Schritt ist dann auch eine Zerlegung der Eins auf M. ⟫⟫

Für den Beweis des ersten Schritts benötigen wir noch folgendes

8 **Lemma** *Zu jeder endlichen offenen Überdeckung $U_1, .., U_n$ einer kompakten Menge M existieren kompakte Mengen $K_i \subset U_i$, deren Inneres ebenfalls M überdecken.* ⋊

⟪⟪ Wir konstruieren diese Mengen induktiv wie folgt. Angenommen, wir haben bereits kompakte Mengen $K_1, .., K_{i-1}$, so dass

$$K_1^\circ \cup .. \cup K_{i-1}^\circ \cup U_i \cup U_{i+1} \cup .. \cup U_n \supset M.$$

Für $i = 1$ entspricht dies der Ausgangssituation, wo wir noch keine kompakte Menge konstruiert haben. Betrachte dann

$$C_i \coloneqq M \setminus (K_1^\circ \cup .. \cup K_{i-1}^\circ \cup U_{i+1} \cup .. \cup U_n).$$

Diese Menge ist abgeschlossen und in M enthalten, also kompakt. Es gilt auch $C_i \subset U_i$. Dann existiert auch eine kompakte Menge K_i derart, dass

$$C_i \subset K_i^\circ \subset K_i \subset U_i.$$

Damit erhalten wir

$$K_1^\circ \cup .. \cup K_i^\circ \cup U_{i+1} \cup .. \cup U_n \supset M,$$

und wir sind fertig. ⟫⟫

Bemerkungen *a.* Für eine kompakte Menge M existieren also auch endliche Zerlegungen der Eins.

b. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\mathcal{O} = \{\Omega\}$, so kann eine diesbezügliche Zerlegung der Eins trotzdem nicht aus endlich vielen Funktionen bestehen $_{\text{A-7}}$.

21.3 Die Transformationsformel

Ein wesentliches Hilfsmittel der eindimensionalen Integrationstheorie ist die Substitutionsregel. Ist φ stetig differenzierbar auf dem Intervall $I = [a,b]$ und f stetig auf dem Bildintervall $\varphi(I)$, so gilt bekanntlich 10.18

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\varphi(s))\varphi'(s)\,\mathrm{d}s.$$

Dies ergibt sich unmittelbar aus dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung. Hierbei ist es nicht einmal erforderlich, dass φ die Orientierung des Intervalls I erhält oder I bijektiv auf $\varphi(I)$ abbildet.

In dieser Allgemeinheit werden wir die Substitutionsregel *nicht* für das höherdimensionale Integral formulieren. Wir setzen zumindest voraus, dass φ *bijektiv* ist. Auf einem Intervall ist φ dann notwendigerweise monoton. Die beiden möglichen Fälle der Substitutionsregel – entweder positive oder negative Ableitung – lassen sich dann zusammenfassen zu

$$\int_{\varphi(I)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_I f(\varphi(s))\,|\varphi'(s)|\,\mathrm{d}s.$$

Hierbei wird das linke Integral immer vom linken zum rechten Endpunkt des Intervalls $\varphi(I)$ gebildet, unabhängig davon, wie I auf $\varphi(I)$ abgebildet wird.

In dieser Form verallgemeinern wir die Substitutionsregel auf höhere Dimensionen. Man beachte, dass sie sich nur auf das Volumenmaß λ bezieht.

9 **Transformationsformel** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und φ ein Diffeomorphismus von Ω auf die offene Menge $\varphi(\Omega)$. Ist f auf $\varphi(\Omega)$ integrierbar, so gilt*

$$\int_{\varphi(\Omega)} f\,\mathrm{d}\lambda = \int_\Omega (f\circ\varphi)\,|\det D\varphi|\,\mathrm{d}\lambda.$$

Insbesondere existiert das rechts stehende Integral. ⋊

Ist $(f\circ\varphi)\,|\det D\varphi|$ integrierbar, so folgt durch Anwendung der Formel mit φ^{-1} umgekehrt auch die Integrierbarkeit von f. Beide Annahmen sind also äquivalent.

Wir beweisen die Transformationsformel für den Fall, dass die Determinante von φ überall positiv ist. Der andere Fall lässt sich mithilfe der Reflexion einer Koordinate auf diesen zurückführen A-10. Der erste Schritt besteht in der Reduktion auf ein lokales Problem mithilfe einer Zerlegung der Eins und einer Adaption der Transformation φ gemäß dem folgenden Lemma, das wir im Anschluss beweisen werden.

10 **Lokalisierungslemma** *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein lokaler Diffeomorphismus mit positiver Jacobideterminante. Dann existiert zu jedem Punkt in Ω eine Umgebung $U \subset \Omega$ und eine stetig differenzierbare Abbildung $\psi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ derart, dass*

$$\psi|U = \varphi, \qquad \psi|I^{\mathrm{c}} = id,$$

für ein hinreichend großes Intervall I, sowie $\psi(U) \cap \psi(U^{\mathrm{c}}) = \varnothing$. ⋊

Das Bild jeder dieser offenen Mengen U unter dem Diffeomorphismus φ ist eine *offene* Menge in $\varphi(\Omega)$, und ihre Gesamtheit bildet eine offene Überdeckung von $\varphi(\Omega)$. Sei $\mathcal{T}$ eine ihr untergeordnete Zerlegung der Eins $_7$. Dann gilt

$$f = \sum_{\sigma \in \mathcal{T}} \sigma f.$$

Gilt nun für jedes σ die lokalisierte Transformationsformel

$$\int_{\varphi(\Omega)} (\sigma f)\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\Omega} (\sigma f) \circ \varphi \,\det D\varphi \,\mathrm{d}\lambda.$$

so folgt durch Summieren über $\sigma \in \mathcal{T}$ daraus die allgemeine Transformationsformel $_9$.

Die lokalisierte Formel schreiben wir noch weiter um. Aufgrund der Wahl von $\mathcal{T}$ ist der Träger eines jeden $\sigma \in \mathcal{T}$ in einer offenen Menge $\varphi(U)$ enthalten, auf die das Lokalisierungslemma zutrifft. Somit ist einerseits

$$\int_{\varphi(\Omega)} \sigma f \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\varphi(U)} \sigma f \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} \sigma f \,\mathrm{d}\lambda.$$

Andererseits gilt mit der Abbildung ψ des Lokalisierungslemmas

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} (\sigma f) \circ \varphi \,\det D\varphi \,\mathrm{d}\lambda &= \int_{U} (\sigma f) \circ \varphi \,\det D\varphi \,\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{U} (\sigma f) \circ \psi \,\det D\psi \,\mathrm{d}\lambda,\end{aligned}$$

da $(\sigma f) \circ \varphi$ auf U^{c} verschwindet und ψ auf U mit φ übereinstimmt. Da $\psi(U^{\mathrm{c}})$ von $\psi(U)$ disjunkt ist, gilt weiter

$$\int_{U} (\sigma f) \circ \varphi \,\det D\varphi \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} (\sigma f) \circ \psi \,\det D\psi \,\mathrm{d}\lambda.$$

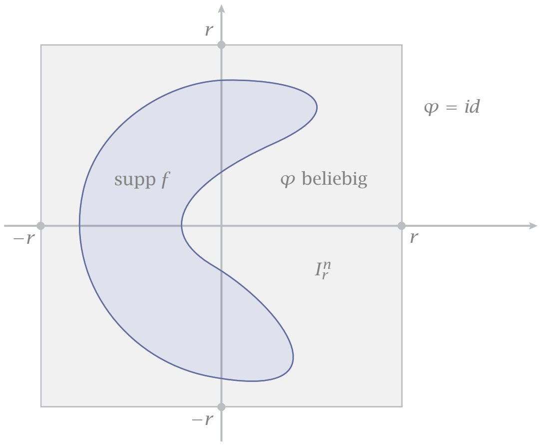
Die allgemeine Transformationsformel reduziert sich damit auf folgendem Satz, wobei wir wieder φ statt ψ schreiben.

11 **Lokale Transformationsformel** *Sei $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $\varphi = id$ außerhalb eines Intervalls I. Dann gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \varphi) \det D\varphi \,\mathrm{d}\lambda$$

Abb 7

Zum Beweis der lokalen Transformationsformel



für jede Funktion $f \in \mathcal{L}^n(\lambda)$ mit kompaktem Träger. ⋊

⟪⟪ Wir können $f \in C^1$ und $\varphi \in C^2$ annehmen. Durch einen Approximationsprozess folgt dann die Behauptung für den allgemeinen Fall.

Definiere $g \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) = \int_{-\infty}^{x_1} f(t, x_2, .., x_n) \, \mathrm{d}t.$$

Wegen der Kompaktheit des Trägers von f ist diese Funktion in jedem Punkt wohldefiniert, und es gilt $\partial_1 g = f$. Somit ist g ebenfalls stetig differenzierbar. Also ist

$$\nabla(g \circ \varphi) = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i g \circ \varphi) \nabla \varphi_i,$$

wobei $\nabla = (\partial_1, .., \partial_n)^\top$. Aufgrund der Multilinearität und Antisymmetrie der Determinante ist weiter

$$\begin{aligned} &\det(\nabla(g \circ \varphi), \nabla\varphi_2, .., \nabla\varphi_n) \\ &\quad = \det((\partial_1 g \circ \varphi)\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2 .., \nabla\varphi_n) \\ &\quad = (\partial_1 g \circ \varphi) \det D\varphi. \end{aligned}$$

Wählen wir nun das Intervall $I^n = I_r^n$ mit $I_r = [-r, r]$ so groß, dass $f \equiv 0$ und $\varphi = id$ auf dem Komplement von I^n, so gilt mit $f = \partial_1 g$ also

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (f\circ\varphi)\det D\varphi\,\mathrm{d}\lambda &= \int_{I^n} (f\circ\varphi)\det D\varphi\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{I^n} (\partial_1 g\circ\varphi)\det D\varphi\,\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{I^n} \det(\nabla(g\circ\varphi),\nabla\varphi_2,..,\nabla\varphi_n)\,\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

Wir entwickeln nun die letzte Determinante nach der ersten Spalte und bezeichnen die zugehörigen Unterdeterminanten einschießlich ihres Vorzeichenfaktors mit M_i. Mit Fubini und partieller Integration wird das letzte Integral zu

$$\begin{aligned}&\int_{I^n} \sum_{i=1}^n \partial_i(g\circ\varphi)M_i\,\mathrm{d}\lambda \\ &\quad= \sum_{i=1}^n \int_{I_r^{n-1}}\int_{I_r} \partial_i(g\circ\varphi)M_i\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_{n-1} \\ &\quad= \sum_{i=1}^n \left\{\int_{I_r^{n-1}} (g\circ\varphi)M_i\Big|_{-r}^{r}\mathrm{d}\lambda_{n-1} - \int_{I_r^{n-1}}\int_{I_r}(g\circ\varphi)\partial_i M_i\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_{n-1}\right\} \\ &\quad= \sum_{i=1}^n \int_{I_r^{n-1}} (g\circ\varphi)M_i\Big|_{-r}^{r}\mathrm{d}\lambda_{n-1} - \int_{I^n}(g\circ\varphi)(\partial_1 M_1+..+\partial_n M_n)\,\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

Für eine C^2-Abbildung $\varphi\colon\mathbb{R}^n\hookrightarrow\mathbb{R}^n$ gilt aber A-11

$$\partial_1 M_1+..+\partial_n M_n\equiv 0,$$

das letzte Integral verschwindet also. Da $\varphi = id$ außerhalb von I^n, verschwinden auch die Unterdeterminanten $M_2,..,M_n$ auf dem Rand von I^n. während

$$(g\circ\varphi)M_1\Big|_{-r}^{r} = g\Big|_{-r}^{r} = g(r,\cdot).$$

Zusammen genommen erhalten wir also mit Fubini und der Definition von g

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}(f\circ\varphi)\det D\varphi\,\mathrm{d}\lambda &= \int_{I_r^{n-1}} g(r,\cdot)\,\mathrm{d}\lambda_{n-1} \\ &= \int_{I_r^{n-1}}\int_{I_r} f\,\mathrm{d}\lambda_1\,\mathrm{d}\lambda_{n-1} = \int_{I^n} f\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f\,\mathrm{d}\lambda.\end{aligned}$$

Genau das wollten wir beweisen. ⟫⟫⟫

▪ Beweis des Lokalisierungslemmas

Es fehlt noch der Beweis des Lokalisierungslemmas. Dazu benötigen wir folgendes Ergebnis aus der linearen Algebra.

12 **Deformationslemma** *Jede reelle Matrix A mit positiver Determinante kann so in die Identitätsmatrix defomiert werden, dass alle Determinanten entlang dieser Deformation zwischen $\det A$ und 1 liegen.* ⋊

⟪⟪ Betrachte die erste Spalte von A. Falls $a_{11} \leqslant 0$, so gibt es immer eine zweite Spalte in A, so dass die ersten Komponenten dieser beiden Spalten nicht gleichzeitig Null sind. Durch eine starre Drehung in der von beiden Spalten aufgespannten Ebene können wir erreichen, dass $a_{11} > 0$, während sich die Determinante der Matrix nicht ändert.

Ist nun $a_{11} > 0$, so können wir durch eine kontinuierliche Version des Gaußschen Eliminationsprozesses erreichen, dass sämtliche übrigen Komponenten der ersten Spalte und Zeile verschwinden. Auch hierbei ändert sich die Determinante der Matrix nicht.

Verfahren wir nun induktiv, so deformieren wir A in eine Diagonalmatrix mit positiven Komponenten, ohne die Determinante zu beeinflussen. Deformation der Diagonalkomponenten zu 1 führt dann zum Ziel.

Jeder einzelne Deformationsschritt kann durch eine stetige Kurve von Matrizen beschrieben werden. Durch entsprechende Parametrisierung wird die gesamte Familie auch glatt. ⟫⟫

⟪⟪ *Beweis des Lokalisierungslemmas* Betrachte einen lokalen Diffeomorphismus φ um 0 mit $\varphi(0) = 0$. Setzen wir $\Lambda = D\varphi(0)$, so ist

$$\varphi = \Lambda + \hat{\varphi}, \qquad \hat{\varphi} = o(\|x\|).$$

Wegen der Umkehrbarkeit von Λ gilt außerdem

$$m\|x\| \leqslant \|\Lambda x\| \leqslant m^{-1}\|x\|$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit einer hinreichend kleinen Konstanten $m > 0$.

Zuerst eliminieren wir die Nichtlinearität $\hat{\varphi}$ außerhalb einer kleinen Umgebung von 0. Wähle dazu eine beliebige *Abschneidefunktion* σ, also eine glatte Funktion $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to [0,1]$ mit $\sigma|B_1 \equiv 1$ und $\sigma|B_2^{\mathsf{c}} \equiv 0$, und setze

$$\chi = \Lambda + \sigma_\varepsilon\hat{\varphi}, \qquad \sigma_\varepsilon = \sigma \circ \varepsilon^{-1}.$$

Für $0 < \alpha < \varepsilon$ und ε hinreichend klein gilt dann

$$\|\chi\|_{B_\alpha} \leqslant m^{-1}\alpha + \|\hat{\varphi}\|_{B_\alpha} \leqslant 2m^{-1}\alpha,$$

während

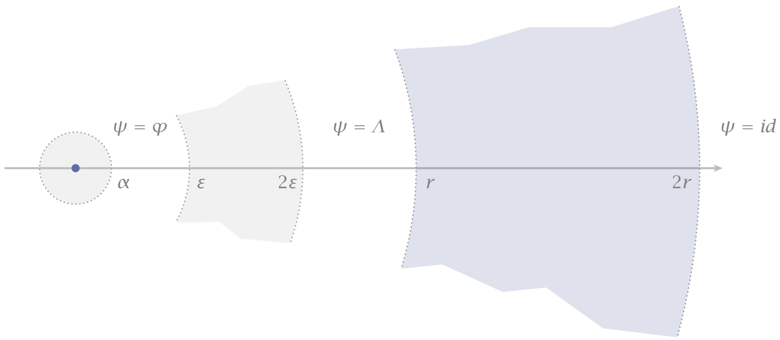
$$\|\chi\|_{B_{2\varepsilon}\setminus B_\varepsilon} \geqslant m\varepsilon - \|\hat{\varphi}\|_{B_{2\varepsilon}\setminus B_\varepsilon} \geqslant m\varepsilon/2.$$

Für $\alpha < m^2\varepsilon/4$ ist also $\|\chi\|_{B_\alpha} < \|\chi\|_{B_\varepsilon^{\mathsf{c}}}$, so dass die Mengen $\chi(B_\alpha)$ und $\chi(B_\varepsilon^{\mathsf{c}})$ disjunkt sind. Da außerdem $\chi|B_\varepsilon = \varphi$ injektiv ist, gilt sogar

$$\chi(B_\alpha) \cap \chi(B_\alpha^{\mathsf{c}}) = \emptyset.$$

Damit ist der erste Schritt abgeschlossen.

Abb 8 Zum Beweis des Lokalisierungslemmas



Im zweiten Schritt deformieren wir Λ außerhalb einer großen Kugel zur Identität. Sei dazu $\Lambda(t)$ mit $0 \leqslant t \leqslant 1$ eine Deformation [12] von Λ mit $\Lambda(0) = \mathrm{Id}$ und $\Lambda(1) = \Lambda$. Für

$$L_r = \Lambda \circ \sigma_r, \qquad L_r(x) = \Lambda(\sigma_r(x))x,$$

gilt dann

$$L_r|B_r = \Lambda(0) = \Lambda, \qquad L_r|B_{2r}^{\mathsf{c}} = \Lambda(1) = id.$$

Setzen wir also

$$\psi = L_r + \sigma_\varepsilon \hat{\varphi},$$

so ist

$$\psi|B_\varepsilon = \chi|B_\varepsilon = \varphi, \qquad \psi|B_r = \chi, \qquad \psi|B_{2r}^{\mathsf{c}} = id.$$

Da außerdem $\Lambda(t)$ für $0 \leqslant t \leqslant 1$ regulär ist, ist $\psi(B_r^{\mathsf{c}})$ für hinreichend große r disjunkt von B_α. Somit gilt auch noch

$$\psi(B_\alpha) \cap \psi(B_\alpha^{\mathsf{c}}) = \varnothing.$$

Somit erfüllt ψ alle Behauptungen des Lokalisierungslemmas mit $U = B_\alpha$. ⟫⟫⟫