16. Vorlesung 9. 12. 2021

Bsp: 1. φ Diffeo:

$S = \emptyset$: $\varphi(S) = \emptyset$ ✓

2. φ lineare Abb., singulär:

$\varphi = A$, det $A = 0$:

$S = \Omega$;

$\varphi(S) = \varphi(\Omega) \subset$ Hyperebene,

da A singulär.

Also $\varphi(\Omega)$ Nullmenge.

3. $\varphi = \text{const}$:

$S = \Omega$; $\varphi(S) = \{p\}$ ✓

Beweis: Es genügt: $\Omega = I$ kompaktes Intervall

$I = [a,b]^n$.

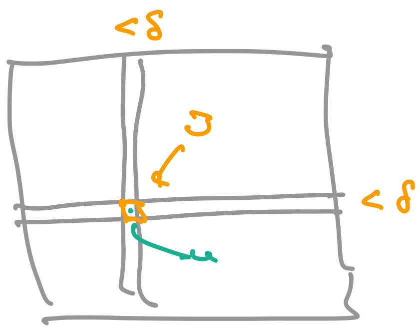
Denn: $\|D\varphi\|$ beschränkt und gleichm. stetig

Das bedeutet: (i) es ex. $M > 0$:

$$|\varphi(u) - \varphi(w)| \le \max \|D\varphi(\cdot)\| \, |u-w|$$
$$\le M \cdot |u-w|, \quad u,w \in I$$

(ii) zu jedem $\varepsilon > 0$ ex. $\delta > 0$:

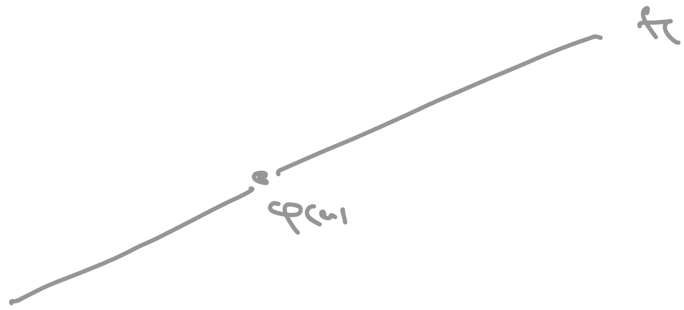
$$\|D\varphi(u) - D\varphi(w)\| < \varepsilon, \quad |u-w| < \delta, \quad u,w \in I.$$



Angenommen, es ex. $u \in J \cap S$: $\det D\varphi(u) = 0$

Dann $D\varphi(u)$ singulär, also ist Bild $D\varphi(u)$

in einer Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^n$ enthalten:



Lemma ... :

$$\varphi(v) = \underbrace{\overbrace{\varphi(u) + D\varphi(u)(v-u)}^{\in T} + \underbrace{E(u,v)}_{}(v-u)}_{}$$

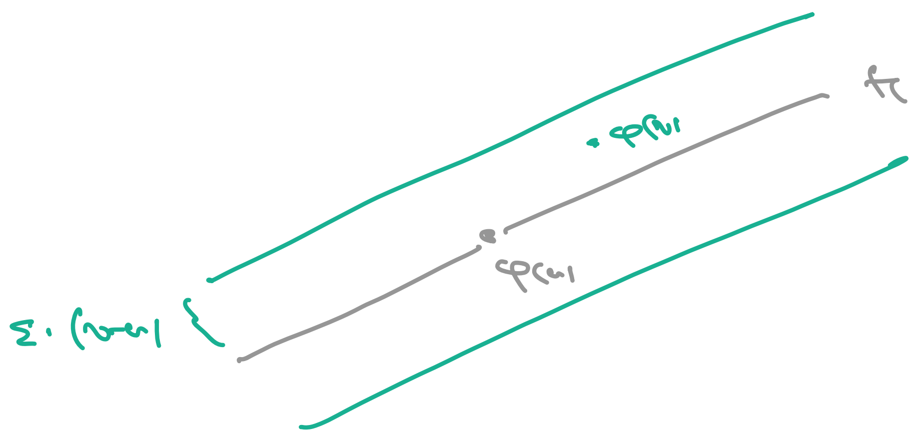
and

$$E(u,v) = \underbrace{\int_0^1 (\overbrace{D\varphi(\ldots) - D\varphi(u)}^{<\varepsilon})\,dt}_{},$$

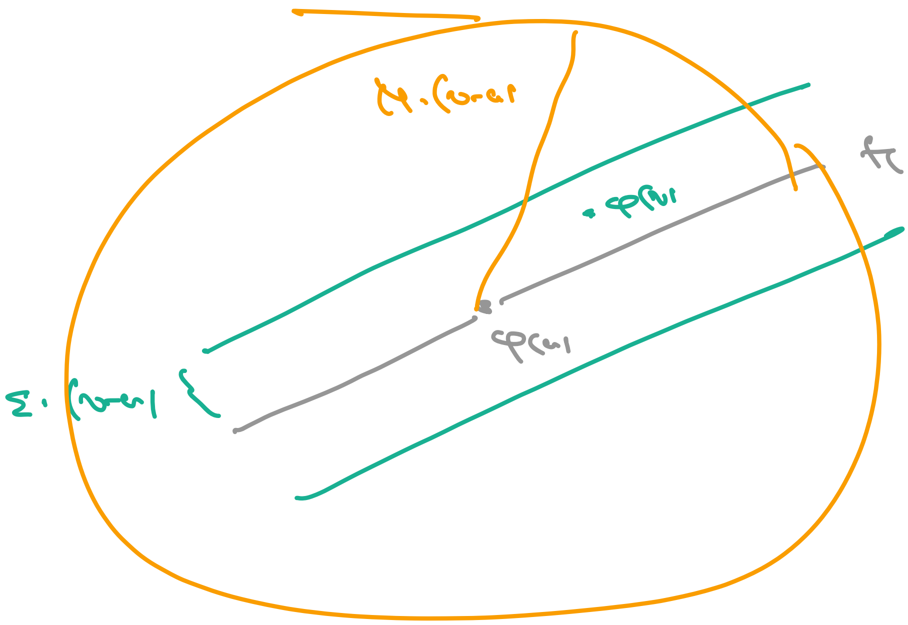
where $\|E(u,v)\| < \varepsilon$, $|u-v| < \delta$
for $u, v \in J$

Also ...:

$\varphi(v)$ lies in an ε-... of T, for ... $v \in J$.



Alle Bilder von J liegen außerhalb in einer Kugel um $\varphi(a)$ mit Radius $M\cdot(\sqrt{n}\,r)$.



Also liegt $\varphi(J)$ in einer Schicht mit Höhe $2\varepsilon(\sqrt{n}\,r)$ und Grundfläche $M\cdot(\sqrt{n}\,r)$:

Also:

$$\boxed{\begin{aligned}\lambda(\varphi(J)) &\le c\cdot 2\varepsilon(\sqrt{n}\,r)^n \\ &\le c\cdot\varepsilon\cdot\lambda(J).\end{aligned}}$$

Summiere jetzt über J:

$$\lambda(\varphi(S)) \le c\,\varepsilon\,\lambda(I).$$

Da $\varepsilon>0$ beliebig .... $\Rightarrow$ $\varphi(S)$ Nullmenge. ∎

<u>Beweis</u>: $\varphi : \Omega \to \varphi(\Omega)$.

Definiere

$$\Omega_0 = \{\det D\varphi = 0\} \subset \Omega$$

abgeschl.

und

$$\int_{\varphi(\Omega \setminus \Omega_0)} f \, dx = \int_{\Omega\setminus\Omega_0} (f\circ\varphi) \underbrace{|\det D\varphi| \, dx}_{=0 \text{ auf } \Omega_0}$$

$\varphi(\Omega_0)$ λ-Nullmenge (Sard)

auf den Rest wende Trafoformel an. $\square$

Beweis: Setze φ außerhalb von B

fort durch id:

$$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\varphi \,|\, \mathbb{R}^n \setminus B^\circ = \mathrm{id}.$$

Dann approximiere φ durch C^∞-Abb ψ:

$$\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\psi \,|\, \mathbb{R}^n \setminus B^\circ = \mathrm{id}.$$

Dafür Lemma:

Beweis von Lemma:

Angenommen, nicht surjektiv:

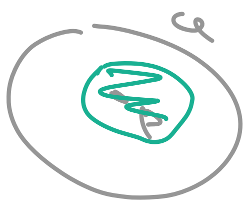
es gibt p ohne Urbild. Dann

$$|p| < 1.$$

Da $\varphi(\mathbb{R})$ abgeschlossen und nicht p enthält:

Es gibt eine Umgebung $U \ni p$ die nicht

in $\varphi(\mathbb{R})$ enthalten ist:



$\varphi(\mathbb{R}^n) \cap U = \emptyset$

Wähle glatte Funktion f: $\operatorname{supp} f \subset U$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda \neq 0.$$

Aber dann folgt mit Transformationsformel:

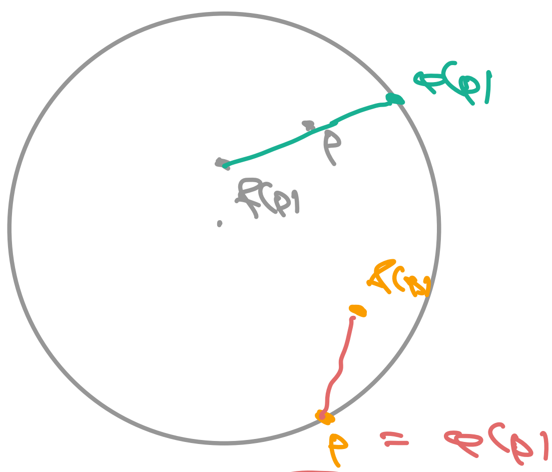
$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\overset{\equiv 0}{(f \circ \varphi)}}_{\varphi(\mathbb{R}^n) \cap U = \emptyset} \det D\varphi \, dx \overset{!}{=} 0$$

Beweis: Angenommen, es gibt ein stetiges f ohne Fixpunkte:

$$f(p) \neq p, \quad p \in B.$$

Definiere stetig

$$\varphi : B \to B, \quad p \mapsto \varphi(p)$$



Dann

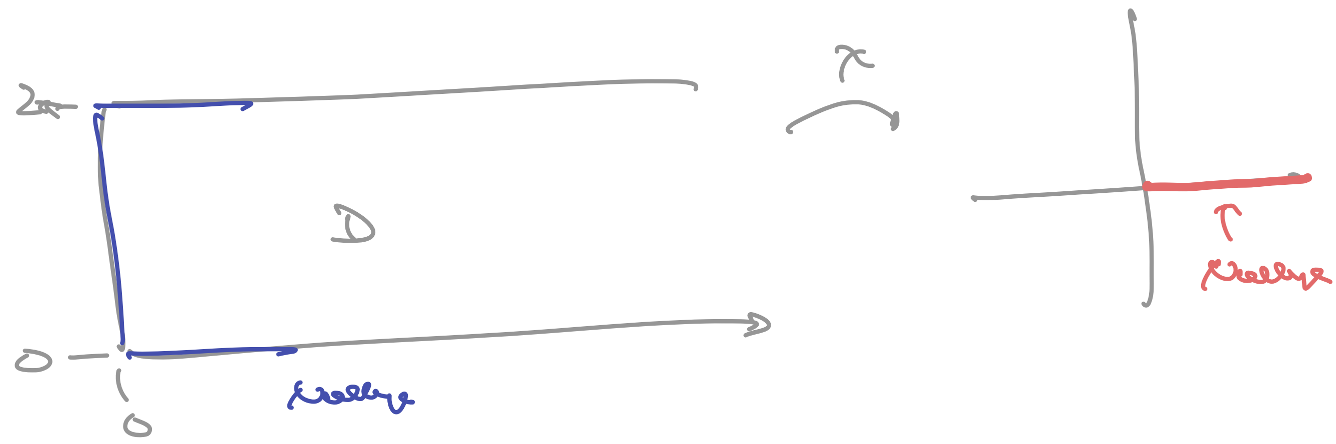
$$\varphi : B \to \partial B \text{ stetig},$$

$$\varphi|\partial B = \mathrm{id}.$$

Dies widerspricht dem Satz.

q.e.d.

$D = (0,\infty) \times (0,2\pi)$



Bsp.:

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\, r\,dr\,d\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^{\infty} r\,e^{-r^2}\,dr$$

$$= -\pi\, e^{-r^2}\Big|_0^{\infty} = \pi.$$

mit Fubini :

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} \, dx \, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx \right)} dy$$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx} \cdot \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} \, dy}$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx \right)^2 \overset{!}{=} \pi$$

$$\Longrightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}.}$$

Beispiel: Volumen der Einheitskugel:

$$\frac{V}{2} = \int_D \sqrt{1-u^2-v^2}\,du\,dv$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\sqrt{1-r^2}\,dr\,d\varphi$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr$$

$$= \frac{2\pi}{3}.$$

$$V = \frac{4\pi}{3}.$$

$\subset \mathbb{R}^3$

Allgemein: $\lambda(B_r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \quad . \quad .$

Bsp.: Volumen → Einheitskugel

$0 \leq r \leq 1$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$0 \leq \theta \leq \pi$:

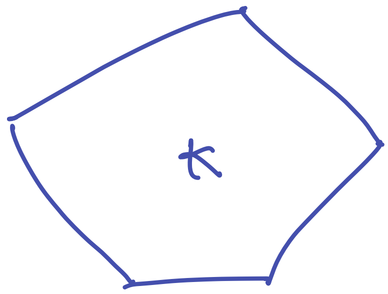
$$V = \int_B 1 \, dx$$

$$= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin\theta \, dr \, d\varphi \, d\theta$$

$$= 2\pi \cdot \underbrace{\int_0^1 r^2 \, dr}_{\frac{1}{3}} \cdot \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta \, d\theta}_{2}$$

$$= \frac{4\pi}{3}.$$

Beispiel:



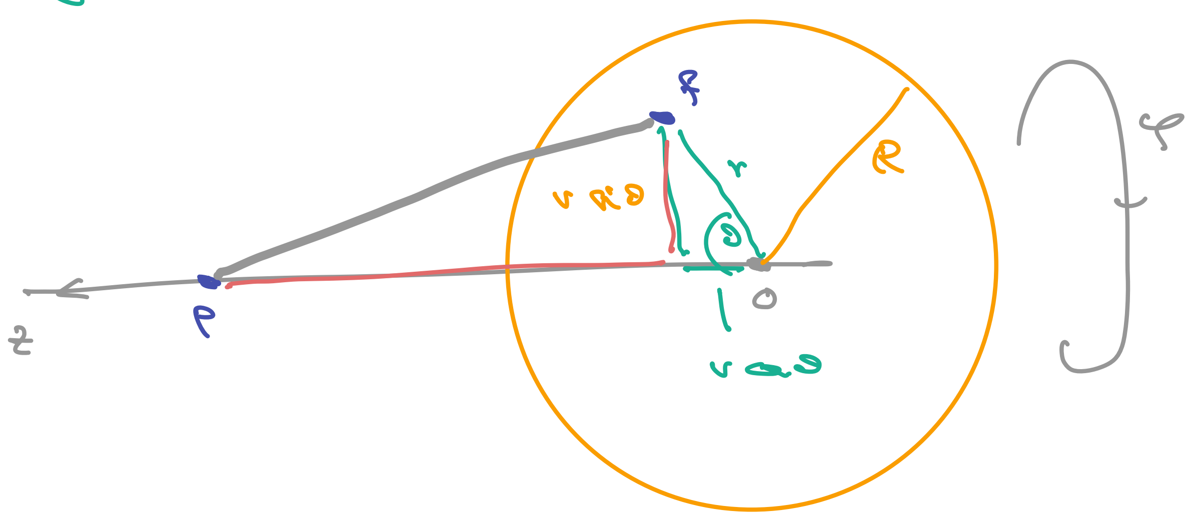
m Dichtefunktion

$$u(p) = \int_K \frac{m(q)}{\|q-p\|}\, dq$$

$$K = \{ \|q\| \le R \}$$

$$m = m(r)$$

Es genügt: $p = (0, 0, z)$



$$\|p-q\|^2 = (z - r\cos\theta)^2 + r^2 \sin^2\theta$$

$$= z^2 - 2zr\cos\theta + r^2$$

$$\|p-q\| = \sqrt{\quad \dots \quad}$$

$$u(p) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \frac{\rho(r)\, r^2 \sin\theta}{\sqrt{z^2 - 2zr\cos\theta + r^2}}\, dr\, d\theta\, d\varphi$$

$$= 2\pi \int_0^{R} \left\{ \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{\sqrt{}}\, d\theta}_{} \right\} \rho(r)\, r^2\, dr$$

Substitution: $-\cos\theta = t$

$dt = \sin\theta \, d\theta$

$-\cos(0) = -1 \,, \quad -\cos(\pi) = 1$

Damit

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{z^2 + 2zrt + r^2}}$$

$$= \frac{1}{zr} \sqrt{z^2 + 2zrt + r^2}\,\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{zr}\left(\sqrt{(z+r)^2} - \sqrt{(z-r)^2}\right)$$

$$= \frac{2}{z}\,.$$

Also:

$$u(p) = \frac{2\pi}{z} \underbrace{\int_0^{R} \rho(r)\, r^2\, dr}_{M}$$

$$= \frac{M}{z}\,.$$

Allgemein:

$$\boxed{u(p) = \frac{M}{|p|}\,.}$$