

## 21.4 Der Satz von Sard

In der Transformationsformel können wir tatsächlich auf die Bedingung verzichten, dass die Jacobideterminante nirgends verschwindet. Es genügt, dass die Abbildung stetig differenzierbar und bijektiv ist. Dies gründet sich auf dem nächsten Satz, der auch in anderen Zusammenhängen nützlich ist.

13 **Satz von Sard** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar und

$$S = \{\det D\varphi = 0\} \subset \Omega.$$

Dann ist  $\varphi(S)$  eine  $\lambda$ -Nullmenge. Mit anderen Worten, die Menge der kritischen Werte einer stetig differenzierbaren Abbildung ist eine Nullmenge. ✕

► A. Ist  $\varphi$  ein Diffeomorphismus, so ist  $S = \emptyset$  und damit auch  $\varphi(S) = \emptyset$  eine Nullmenge.

B. Ist  $\varphi$  eine singuläre lineare Abbildung, so ist  $S = \Omega$ . Aber  $\varphi(S)$  ist enthalten in einer Hyperebene und deshalb eine  $\lambda$ -Nullmenge.

C. Ist  $\varphi$  eine konstante Abbildung, so ist ebenfalls  $S = \Omega$ . Aber  $\varphi(S)$  ist eine 1-Punkt-Menge und damit eine  $\lambda$ -Nullmenge. ◀

Während die kritischen Werte einer  $C^1$ -Abbildung eine Nullmenge bilden, kann ihr gesamter Definitionsbereich aus kritischen Punkten bestehen.

⟨⟨⟨⟨ *Beweis des Satzes von Sard* Es genügt, die Aussage für ein kompaktes  $n$ -Intervall  $I$  in  $\Omega$  zu beweisen. Die allgemeine Behauptung folgt dann durch Überdecken einer beliebigen offenen Menge durch abzählbar viele solche Intervalle und der Bemerkung, dass die abzählbare Vereinigung von Nullmengen wieder eine Nullmenge ist. Auf einem solchen kompakten Intervall  $I$  ist  $\|D\varphi\|$  beschränkt und gleichmäßig stetig<sub>7.32</sub>. Es gibt also ein  $M > 0$  derart, dass

$$|\varphi(v) - \varphi(u)| \leq \max_{z \in [u, v]} \|D\varphi(z)\| |v - u| \leq M |v - u|,$$

und zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\delta > 0$  derart, dass

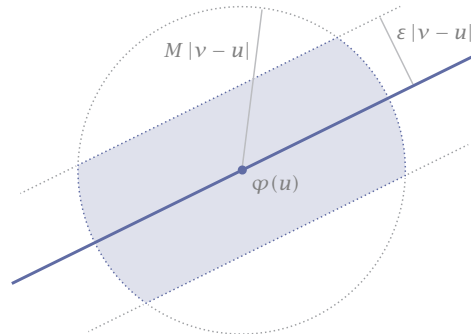
$$\|D\varphi(v) - D\varphi(u)\| < \varepsilon, \quad |v - u| < \delta,$$

jeweils für alle  $u, v \in I$ .

Wir unterteilen nun jede Seite von  $I$  in  $m$  gleich lange Intervalle und wählen dabei  $m$  so groß, dass die Seitenlängen der  $m^n$  entstehenden Teilintervalle kleiner als  $\delta$  sind. Angenommen, in einem dieser kleinen Intervalle  $J$  liegt ein kritischer Punkt  $u$ . Dann ist  $\det D\varphi(u) = 0$ , also  $D\varphi(u)$  eine lineare Abbildung in

Abb 9

Zum Satz von Sard



eine *Hyperebene*  $H$ . Aufgrund des Lemmas von Hadamard<sup>14.15</sup> gilt andererseits

$$\varphi(v) = \varphi(u) + D\varphi(u)(v - u) + E(u, v)(v - u)$$

mit

$$E(u, v) = \int_0^1 (D\varphi(u + t(v - u)) - D\varphi(u)) dt,$$

wobei  $\|E(u, v)\| < \varepsilon$  für  $|u - v| < \delta$ . Das bedeutet, dass sich  $\varphi(v)$  auf  $J$  von der Hyperebene  $H$  um weniger als

$$|E(u, v)(v - u)| \leq \varepsilon |v - u|$$

entfernt. Gleichzeitig liegen alle Bilder in einer Kugel um  $u$  mit Radius kleiner als  $M|v - u|$ . Somit liegt das gesamte Bild  $\varphi(J)$  in einem Zylinder mit Höhe  $2\varepsilon|v - u|$  und Basisradius  $M|v - u|$ . Für das Volumen gilt also

$$\lambda(\varphi(J)) \leq c\varepsilon |v - u|^n \leq c\varepsilon \lambda(J).$$

Summieren wir über alle solchen kleinen Intervalle  $J$ , die einen kritischen Punkt enthalten, so folgt

$$\lambda(\varphi(S)) \leq c\varepsilon \lambda(I).$$

Da  $\varepsilon > 0$  beliebig war, muss  $\varphi(S)$  eine Nullmenge sein.  $\gggg$

Daraus ergibt sich folgende

- 14 Allgemeine Transformationsformel** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $\varphi$  eine bijektive, stetig differenzierbare Abbildung von  $\Omega$  auf die offene Menge  $\varphi(\Omega)$ . Ist  $f$  auf  $\varphi(\Omega)$  integrierbar, so gilt

$$\int_{\varphi(\Omega)} f d\lambda = \int_{\Omega} (f \circ \varphi) |\det D\varphi| d\lambda. \quad \times$$

$\llll$  Auf der abgeschlossenen Menge  $\Omega_0 = \{\det D\varphi = 0\} \subset \Omega$  verschwindet das rechts stehende Integral, da dort der Integrand verschwindet. Das links

stehende Integral über  $\varphi(\Omega_0)$  verschwindet ebenfalls aufgrund des Satzes von Sard<sub>13</sub>. Auf dem offenen Komplement  $\Omega \setminus \Omega_0$  ist  $\varphi$  ein Diffeomorphismus, und Anwendung der Transformationsformel<sub>9</sub> ergibt die Behauptung.  $\ggg$

*Bemerkung* Tatsächlich längst sich auch die Bedingung der Bijektivität abschwächen. Es genügt, dass der *Abbildungsgrad* von  $\varphi: \Omega \rightarrow \varphi(\Omega)$  gerade 1 ist.  $\rightarrow$

## 21.5

### Anwendungen der Transformationsformel

#### ■ Der Zwischenwertsatz im $\mathbb{R}^n$

An der lokalen Transformationsformel<sub>11</sub> fällt auf, dass die Abbildung  $\varphi$  weder als injektiv noch als surjektiv vorausgesetzt wird. Die Surjektivität lässt sich jedoch leicht zeigen. Dazu betrachten wir der Einfachheit halber die abgeschlossene Einheitskugel  $\mathbb{B} = \mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ .

**Lemma** Sei  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar mit  $\varphi|_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}} = id$ . Dann ist  $\varphi$  surjektiv.  $\times$

$\llll$  Angenommen, es gibt einen Punkt  $p$  ohne Urbild. Dann ist  $\|p\| < 1$ , da andernfalls  $p$  ein Urbild hat. Da  $\varphi(\mathbb{B})$  abgeschlossen ist und  $p$  nicht enthält, existiert auch eine offene Umgebung  $U$  um  $p$ , die nicht im Bild von  $\varphi$  liegt. Wähle eine stetige Funktion  $f$  mit Träger in  $U$  und

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda \neq 0.$$

Aufgrund der lokalen Transformationsformel<sub>11</sub> ist aber

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \varphi) \det D\varphi \, d\lambda = 0,$$

da nach Konstruktion  $f \circ \varphi \equiv 0$ . Somit erhalten wir einen Widerspruch.  $\gggg$

Aus diesem Lemma folgt der

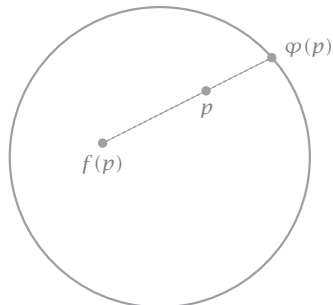
**15 Zwischenwertsatz im  $\mathbb{R}^n$**  Sei  $\varphi: \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig mit  $\varphi|_{\partial\mathbb{B}} = id$ . Dann nimmt  $\varphi$  jeden Wert in  $\mathbb{B}$  an. Es gilt also

$$\varphi(\mathbb{B}) \supset \mathbb{B}. \quad \times$$

$\llll$  Setze  $\varphi$  außerhalb von  $\mathbb{B}$  stetig durch  $id$  fort und approximiere diese Abbildung durch stetig differenzierbare Abbildungen  $\psi$  mit  $\psi|_{\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{B}} = id$ .

Abb 10

Konstruktion der  
Abbildung  $\varphi$



Aufgrund des letzten Lemmas sind diese Abbildungen surjektiv, überdecken also auch  $\mathbb{B}$ . Diese Eigenschaft bleibt im Grenzübergang  $\psi \rightarrow \varphi$  erhalten.  $\gggg$

#### ■ Der Brouwersche Fixpunktsatz

Neben dem Banachschen Fixpunktsatz ist dies einer der fundamentalen Fixpunktsätze der Analysis.

**Brouwerscher Fixpunktsatz** *Jede stetige Selbstabbildung der abgeschlossenen Einheitskugel  $\mathbb{B}$  hat mindestens einen Fixpunkt.*  $\times$

Über die Bildmenge  $\varphi(\mathbb{B})$  wird nichts angenommen, außer dass sie in  $\mathbb{B}$  liegt. Zum Beispiel kann  $\varphi$  eine konstante Abbildung sein mit Bildpunkt in  $\mathbb{B}$ . Diese hat offensichtlich einen Fixpunkt.

$\llll$  Angenommen, es gibt eine solche Abbildung ohne Fixpunkt. Dann können wir eine Abbildung

$$\varphi : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}, \quad p \mapsto \varphi(p)$$

definieren, die jedem Punkt  $p \in \mathbb{B}$  den Schnittpunkt des Halbstrahls von  $f(p)$  durch  $p$  mit der Einheitssphäre zuordnet – siehe Abbildung 10. Da  $f$  keinen Fixpunkt hat, ist dieser Strahl und damit der Bildpunkt für jedes  $p \in \mathbb{B}$  wohldefiniert und definiert eine stetige Abbildung. Offensichtlich gilt

$$\varphi(\mathbb{B}) \subset \partial\mathbb{B}, \quad \varphi|_{\partial\mathbb{B}} = id.$$

Das ist aber aufgrund des Zwischenwertsatzes <sub>15</sub> nicht möglich.  $\gggg$

### ■ Polarkoordinaten

Diese sind definiert durch <sup>18.1</sup>

$$\chi: \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}.$$

Sie bilden  $D = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$  diffeomorph auf die Ebene abzüglich der Halbgeraden  $[0, \infty)$  ab. Da diese bezüglich des Flächenmaßes eine Nullmenge bildet, fällt dies für das Integral über  $\mathbb{R}^2$  nicht ins Gewicht. Dasselbe gilt für den Rand von  $D$ . Wegen  $\det D\chi = r$  gilt für jede auf  $\mathbb{R}^2$  integrierbare Funktion  $f$  deshalb

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \, dx \, dy &= \int_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, dr \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, dr \, d\varphi. \end{aligned}$$

Hierbei halten wir uns an die Vereinbarung, dass Mehrfachintegrale ›von innen nach außen‹ zu lesen sind.

- 16 ▶ Polarkoordinaten bieten sich natürlich vor allem bei rotationssymmetrischen Funktionen an. Zum Beispiel wird

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty r e^{-r^2} \, dr \, d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^\infty r e^{-r^2} \, dr \\ &= -\pi e^{-r^2} \Big|_0^\infty = \pi. \end{aligned}$$

Andererseits ist aufgrund des Satzes von Fubini

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy &= e^{-x^2} \int_{-\infty}^\infty \left( \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} \, dy \right) dx \\ &= \left( \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \, dx \right) \left( \int_{-\infty}^\infty e^{-y^2} \, dy \right) = \left( \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \, dx \right)^2. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}.$$

Dieses Ergebnis ist mit eindimensionaler Argumentation nur recht aufwändig zu erreichen. ◀

► **Volumen der Einheitskugel** <sub>4</sub> Mit Polarkoordinaten ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{V}{2} &= \int_{\mathbb{D}} \sqrt{1-u^2-v^2} \, d\lambda = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\sqrt{1-r^2} \, dr \, d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^1 r\sqrt{1-r^2} \, dr \\ &= \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

Das Volumen einer Kugel vom Radius  $r$  ist dementsprechend  $4\pi r^3/3$ . ◀

### ■ Zylinderkoordinaten

Diese sind definiert durch

$$\chi: \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \zeta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ \zeta \end{pmatrix}$$

und bilden  $D = (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$  diffeomorph auf den  $\mathbb{R}^3$  abzüglich der Halbebene  $[0, \infty) \times \{0\} \times \mathbb{R}$  ab. Diese bildet bezüglich des Volumenmaßes eine Nullmenge und fällt für das Integral über  $\mathbb{R}^3$  nicht ins Gewicht. Dasselbe gilt für den Rand von  $D$ . Wegen  $\det D\chi = r$  gilt für deshalb

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, \zeta) r \, dr \, d\varphi \, d\zeta. \end{aligned}$$

### ■ Kugelkoordinaten

Diese sind definiert durch <sub>18.1</sub>

$$\chi: \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix}$$

mit  $0 < r < \infty$ ,  $0 < \varphi < 2\pi$  und  $0 < \theta < \pi$ . Mit der Jacobideterminante

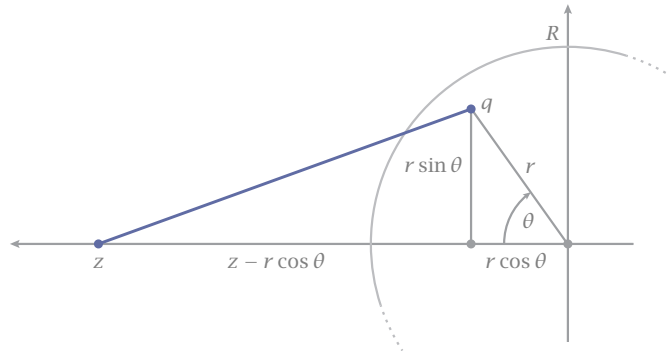
$$\det D\chi = r^2 \sin \theta$$

gilt für jede auf  $\mathbb{R}^3$  integrierbare Funktion  $f$  deshalb

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r \cos \varphi \sin \theta, \dots, r \cos \theta) r^2 \sin \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta. \end{aligned}$$

Abb 11

Zum Potential einer Kugel



► **Volumen der Einheitskugel** Auf  $D = (0, 1) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$  parametrisieren Kugelkoordinaten die Einheitskugel  $\mathbb{B}$  bis auf eine Nullmenge. Für deren Volumen  $V$  erhalten wir demnach mit Fubini, wie zuvor,

$$\begin{aligned} V &= \int_{\mathbb{B}} 1 \, d\lambda = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 \sin \theta \, dr \, d\varphi \, d\theta \\ &= 2\pi \int_0^\pi r^2 \, dr \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

► **Gravitationspotential einer Kugel** Ein kompakter, dreidimensionaler Körper  $K$  mit stetiger Dichtefunktion  $m: K \rightarrow \mathbb{R}$  erzeugt, bis auf einen Normierungsfaktor, in einem Punkt  $p$  das Gravitationspotential

$$u(p) = \int_K \frac{m(q)}{\|q - p\|} \, dq.$$

Wir betrachten den Fall einer Kugel  $K = \{\|q\| \leq R\}$  mit einer rotationssymmetrischen Dichtefunktion  $m = m(r)$ . Aus Symmetriegründen genügt es hier, einen Punkt  $p = (0, 0, z)$  zu betrachten. Bezüglich Kugelkoordinaten in  $K$  ist dann

$$\|q - p\|^2 = z^2 - 2zr \cos \theta + r^2,$$

wie man Abbildung 11 entnimmt. Somit gilt

$$\begin{aligned} u(p) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{m(r)r^2 \sin \theta}{\sqrt{z^2 - 2zr \cos \theta + r^2}} \, dr \, d\theta \, d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^R \left\{ \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{\sqrt{z^2 - 2zr \cos \theta + r^2}} \, d\theta \right\} m(r)r^2 \, dr. \end{aligned}$$

Mithilfe der Substitution  $-\cos \theta = t$  wird das innere Integral zu

$$\int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{z^2 + 2zrt + r^2}} = \frac{1}{zr} \sqrt{z^2 + 2zrt + r^2} \Big|_{-1}^1 = \frac{2}{z}.$$

Also gilt

$$u(p) = \frac{2\pi}{z} \int_0^R m(r)r^2 \, dr.$$

Eine Rechnung wie im vorangehenden Beispiel zeigt aber, dass

$$2\pi \int_0^R m(r)r^2 \, dr = M$$

gerade die Gesamtmasse der Kugel  $K$  darstellt. Also gilt

$$u(p) = \frac{M}{\|p\|}.$$

Das Potential der Kugel verhält sich also gerade so, als wäre die gesamte Masse im Mittelpunkt konzentriert. ◀