17. Vorlesung — 15.12.2021

$$\omega : \underbrace{U \times \ldots \times U}_{k} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega(v_1, \ldots, v_k) \in \mathbb{R}$$

Alternierend:

$$\omega(\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots) = -\,\omega(\ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots)$$

$\Lambda^k U$ sind k-Formen.

„alternierend" ist relevant für $k \geq 2$.

$k=1$: $\quad \Lambda^1 U = U^*$

<u>Bsp.</u> 1. $\quad U^* = \Lambda^1 U$

2. Determinante:

$$\det : \underbrace{\mathbb{R}^{n \times n}}_{n\times n \text{ Matrizen}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\det\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix} = \underbrace{\omega(v_1, \ldots, v_n)}_{\text{alternierend}} . \quad (2)$$

$\omega \wedge \eta$ dove ai primi k argomenti,

permutazioni, dei ~~primi~~ [illegible]

$\{1, \ldots, k+l\}$

$$= \underbrace{\{\tau_1, \ldots, \tau_k\}}_{k! \text{ permutazioni}} \cup \underbrace{\{\tau_{k+1}, \ldots, \tau_{k+l}\}}_{l! \text{ permutazioni}}$$

$\frac{1}{k!\, l!}$ =

Beweis:

$$\big((\omega \wedge \eta) \wedge \nu\big)(v_1, \dots, v_{k+l+m})$$

$$= \sum_{\sigma \in P_{k+l,m}} \operatorname{sgn}(\sigma)\,(\omega \wedge \eta)(v_{\sigma 1}, \dots, v_{\sigma k+l})\,\nu(v_{\sigma k+l+1}, \dots)$$

$$= \sum_{\sigma \in P_{k,l,m}} \operatorname{sgn}(\sigma)\,\omega(v_{\sigma 1}, \dots, v_{\sigma k}) \cdot \eta(v_{\sigma k+1}, \dots, v_{\sigma k+l}) \cdot \nu(v_{\sigma k+l+1}, \dots, v_{\sigma k+l+m})$$

Symmetrie in k, l, m

$\vdots$

$$= \big(\omega \wedge (\eta \wedge \nu)\big)(v_1, \dots, v_{k+l+m}).$$

Bsp:

1. $a \in \Lambda^0 U = \mathbb{R}$, $\omega \in \Lambda^k U$:

$$a \wedge \omega = a\omega \in \Lambda^k U$$

Skalar

2. Für 1-Formen gilt:

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 = (-1)^{1\cdot 1}\, \varphi_2 \wedge \varphi_1 = -\varphi_2 \wedge \varphi_1$$

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 = \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_1 = \varphi_3 \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2$$

3. Für jede k-Form mit $k \geq 1$:

$$\omega \wedge \omega = 0.$$

4. $\varphi_1, \varphi_2 \in \Lambda^1 U = \Lambda^*$

$v_1, v_2 \in U$:

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(v_1, v_2)$$

$$= \varphi_1(v_1)\,\varphi_2(v_2) - \varphi_1(v_2)\,\varphi_2(v_1)$$

$$= \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \varphi_2(v_1) \\ \varphi_1(v_2) & \varphi_2(v_2) \end{pmatrix}.$$

5. für 3 Dimensionen:

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3)(v_1, v_2, v_3)$$

$$= \varphi_1(v_1)\,\varphi_2(v_2)\,\varphi_3(v_3)$$
$$+ \varphi_1(v_2)\,\varphi_2(v_3)\,\varphi_3(v_1)$$
$$+ \varphi_1(v_3)\,\varphi_2(v_1)\,\varphi_3(v_2)$$
$$- \varphi_1(v_1)\,\varphi_2(v_3)\,\varphi_3(v_2)$$
$$-$$
$$-$$

zykl. Verfahren → Sarrus

$$= \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \cdots & \varphi_3(v_1) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1(v_3) & \cdots & \varphi_3(v_3) \end{pmatrix}.$$

$v_1, \dots, v_n$ Basis von U

$\omega \in \Lambda^k U$:

Bekannt sind

$$\omega(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) = \omega_{i_1 \dots i_k} \in \mathbb{R}$$

$$1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n .$$

Basiselemente in $\Lambda^k U$:

Duale Basis von $U^* = \Lambda^1 U$: $\varphi_1, \dots, \varphi_n$:

$$\varphi_i(v_j) = \delta_{ij} .$$

Dann

$$(\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k})(v_{i_1}, \dots, v_{i_k}) = 1$$

und $= 0$ sonst.

Basis in $\Lambda^k U$

Standardfall:

$\mathbb{R}^n$, $\quad x_1, \dots, x_n$

$dx_1, \dots, dx_n$ duale Basis

Also

$\Lambda^k \mathbb{R}^n \ni \omega = \sum \omega_{\mu_1 \dots \mu_k} \, dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k}$

Basis:

$0 \le k \le n$:

$B^n_k = \binom{n}{k}$ "n über k"

Anzahl d. Möglichkeiten, k Stück aus n Stück auswählen

$k = 0$: $\quad B^n_0 = \binom{n}{0} = 1$.

$\Lambda^0 U = \mathbb{R}$, $\dim \mathbb{R} = 1$. ✓

$k > n$: $\quad B^n_k = 0$:

$\Lambda^k U = \{0\}$.

Bsp. im Standardfall:

1. $\Lambda^{n-1}\mathbb{R}^n$:

$$\eta = \sum_{k=1}^{n} a_k \, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \dots \wedge dx_n$$

wird weggelassen

2. n-Form:

$$\omega = a \, \underbrace{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n}_{\det([v_1, \dots, v_n])}$$

3.

Lemma: $A^* : \omega^* \to \upsilon^*$

$*$ verträglich mit $\wedge$:

$$A^*(\omega \wedge \upsilon) = (A^*\omega) \wedge (A^*\upsilon)$$

Bew.: Seien $v_1, \dots, v_n$ Basis von V:

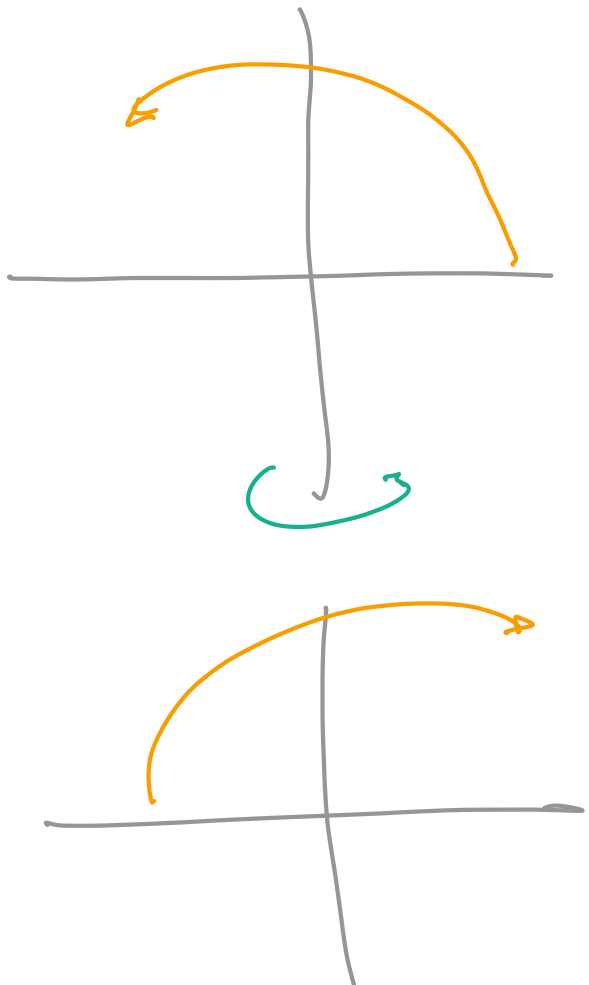
$$(A^*\omega)(v_1, \dots, v_n) = \omega(Av_1, \dots, Av_n) = \alpha \cdot \omega(v_1, \dots, v_n)$$

Sei A lin. Abb. $\Rightarrow$ Basis $v_1, \dots, v_n$ fix
erhalte Matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ & & \vdots \\ a_{1n} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Multilinearität von ω:

$$\omega(Av_1, \dots, Av_n) = \underbrace{\left(\sum \dots \right)}_{\det A} \omega(v_1, \dots, v_n) \quad \square$$



Festgelegt wird eine Or. durch

Angabe $(v_1, \ldots, v_n)$ einer Basis.

Äquivalenzklasse:

$$[v_1, \ldots, v_n]$$

$$-[v_1, \ldots, v_n]$$ entgegengesetzte Or.

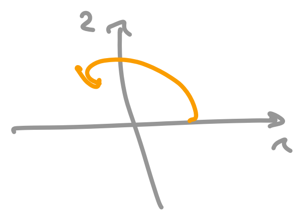
Jede

$$(w_1, \ldots, w_n) \in [v_1, \ldots, v_n]$$

heißt positiv orientiert.

Auf $\mathbb{R}^n$: $(e_1, \ldots, e_n)$ Standardorientierung

$\mathbb{R}^2$: (e_1, e_2)



Proof: Define

$\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

$\varphi x_i = w_i, \quad 1 \le i \le n$

Then

$\omega(\underbrace{w_1, \dots,}_{(1)} w_n) = \omega(\varphi x_1, \dots, \varphi x_n)$

$= \varphi^* \omega(x_1, \dots, x_n)$

$= \det \varphi \cdot \omega(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{(2)}).$

$\det \varphi > 0 \iff$ positively (2),

$\iff$ (1) and (2) have same orientation. $\square$