22

Der Fundamentalsatz im $\mathbb{R}^n$

Für eindimensionale Integrale gilt bekanntlich

$$\int_a^b f = F\Big|_a^b$$

mit einer Stammfunktion F von f. Man erhält das Integral einer Funktion f über ein *Intervall* also durch Auswertung einer Stammfunktion F über dessen *Rand*. Sucht man nach etwas Ähnlichem in höheren Dimensionen, so steht man vor der Aufgabe, Integrale über Kurven, Flächen und allgemeinere Mannigfaltigkeiten zu betrachten.

Dabei stellt sich nicht nur das Problem, *wie* man integrieren soll, sondern auch *was*. Es ist möglich, Funktionen oder Vektorfelder über Mannigfaltigkeiten zu integrieren, doch erfordert dies in jedem einzelnen Fall eine eigene Herangehensweise. Statt dessen hat sich als einheitlicher Zugang der Kalkül der *Differenzialformen* etabliert. Dies sind die *natürlichen* Objekte, die über Mannigfaltigkeiten integriert werden.

Beim ersten Kennenlernen wirkt dieser Kalkül wie eine Ansammlung abstrakter und willkürlicher Definitionen. Der Lohn dieser Mühen ist aber ein einheitlicher Zugang zu den fundamentalen Integralsätzen von Green, Gauß und Stokes in zwei und drei Dimensionen. Sie alle sind unmittelbare Folgen eines allgemeinen Satzes über den Zusammenhang zwischen Integralen über Mannigfaltigkeiten und deren Rand, der ebenfalls nach Stokes benannt ist und besagt, dass

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Der klassische Fundamentalsatz in dieser Schreibweise lautet

$$\int_{[a,b]} \mathrm{d}f = \int_{\partial[a,b]} f.$$

22.1

22.1 Etwas multilineare Algebra

Für die Integration entlang Kurven betrachteten wir 1-Formen $\alpha\colon V \hookrightarrow V^*$, die jedem Punkt im Definitionsbereich in V eine Linearform im Dualraum V^* zuordnet. Dieses Konzept erweitern wir jetzt auf *alternierende* k-lineare Funktionen.

Alternierende Formen

Definition *Eine alternierende k-Form, wobei $k \geqslant 1$, auf einem reellen Vektorraum V ist eine k-lineare Abbildung*

$$\omega : V^k \to \mathbb{R},$$

die bei Vertauschung von je zwei Argumenten das Vorzeichen wechselt. Der Raum aller solchen Abbildungen wird mit $\Lambda^k V$ bezeichnet. Für $k = 0$ sei $\Lambda^0 V \coloneqq \mathbb{R}$. ⋊

Für beliebige $1 \leqslant i < j \leqslant k$ gilt also

$$\omega(..,v_i,..,v_j,..) = -\omega(..,v_j,..,v_i,..).$$

Diese Eigenschaft bleibt unter Linearkombinationen erhalten, $\Lambda^k V$ bildet also einen linearen Vektorraum. Sie ist allerdings erst für $k \geqslant 2$ relevant, denn für $0 \leqslant k \leqslant 1$ gibt es keine Argumente, die man vertauschen könnte.

A. Jedes Element des Dualraums V^* ist eine alternierende 1-Form. Es ist also $V^* = \Lambda^1 V$.

B. Die *Determinante* $\det\colon \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$, aufgefasst als n-lineare Form in den Spalten einer $n \times n$-Matrix, ist eine alternierende n-Form.

Lemma *Für eine k-lineare Form ω sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) *Die Form ω ist alternierend.*

(ii) *Es gilt $\omega(v_1,..,v_k) = 0$, wenn zwei Argumente gleich sind.*

(iii) *Es gilt $\omega(v_1,..,v_k) = 0$, wenn die Argumente linear abhängig sind.*

(iv) *Für jede Permutation τ von $(1,..,k)$ gilt*

$$\omega(v_{\tau_1},..,v_{\tau_k}) = \operatorname{sgn}(\tau)\omega(v_1,..,v_k),$$

wobei $\operatorname{sgn}(\tau)$ das Signum der Permutation τ bezeichnet. ⋊

⟨⟨⟨⟨ (i) ⇒ (ii) Sind zwei Argumente gleich, so ist nach Vertauschung

$$\omega(..,v,..,v,..) = -\omega(..,v,..,v,..)$$

und damit Null.

(ii) ⇒ (iii) Ist zum Beispiel $v_1 = \alpha_2 v_2 + .. + \alpha_k v_k$, so folgt aus der Multilinearität von ω und (ii)

$$\omega(v_1, .., v_k) = \sum_{2 \leqslant i \leqslant k} \alpha_i \omega(v_i, v_2, .., v_n) = 0.$$

(iii) ⇒ (i) Es gilt dann

$$\omega(.., v_i + v_j, .., v_i + v_j, ..) = 0.$$

Von den vier aufgrund der Linearität resultierenden Summanden verschwinden die beiden mit gleichen Argumenten, und es bleibt

$$\omega(.., v_i, .., v_j, ..) + \omega(.., v_j, .., v_i, ..) = 0.$$

Also ist ω alternierend.

(i) ⇔ (iv) Dies folgt aus der Definition von $\operatorname{sgn}(\tau)$. ⟫⟫

Aufgrund dieses Lemmas ist auf einem Vektorraum der Dimension n jede k-Form mit $k > n$ identisch Null. Es ist also

$$\Lambda^k V = \{0\}, \qquad k > \dim V.$$

▪ Dachprodukt

Wir benötigen ein Produkt, dass aus einer k-Form und einer l-Form eine $k + l$-Form bildet. Im Prinzip ist dies kein Problem, da beide Formen zusammen linear in $k + l$ Argumenten sind. Wir müssen aber sicherstellen, dass das Ergebnis auch in allen Argumenten alternierend ist.

Definition *Ist $\omega \in \Lambda^k V$ und $\eta \in \Lambda^l V$, so heißt die durch*

$$(\omega \wedge \eta)(v_1, .., v_{k+l}) \coloneqq \frac{1}{k!\,l!} \sum_{\tau \in \mathcal{P}_{k+l}} \operatorname{sgn}(\tau)\, \omega(v_{\tau_1}, .., v_{\tau_k})\, \eta(v_{\tau_{k+1}}, .., v_{\tau_{k+l}})$$

definierte alternierende $k+l$-Form das äußere Produkt oder Dachprodukt von ω und η, wobei $\mathcal{P}_{k+l}$ die Gruppe aller Permutationen von $k + l$ Elementen bezeichnet. Dies kann auch geschrieben werden als

$$(\omega \wedge \eta)(v_1, .., v_{k+l}) = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k,l}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \omega(v_{\sigma_1}, .., v_{\sigma_k})\, \eta(v_{\sigma_{k+1}}, .., v_{\sigma_{k+l}}),$$

wobei $\mathcal{P}_{k,l}$ nur diejenigen Permutationen in $\mathcal{P}_{k+l}$ umfasst, wo die ersten k und die letzten l Elemente monoton steigend angeordnet sind. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Die Form $\omega \wedge \eta$ ist linear in jedem Argument, da es ω und η sind. Durch Summation über alle möglichen Permutationen τ und Multiplikation mit $\operatorname{sgn}(\tau)$ wird sichergestellt, dass das Ergebnis wieder alternierend in *allen Argumenten* ist. Dabei treten viele Summanden mehrmals auf, und zwar immer dann, wenn verschiedene Permutationen *dieselbe Zerlegung*

$$\{1,..,k+l\} = \{\tau_1,..,\tau_k\} \cup \{\tau_{k+1},..,\tau_{k+l}\}$$

bewirken. Deren Anzahl ist genau $k!l!$, denn so viele Permutationen der ersten und zweiten Teilmenge unter sich gibt es. Die Division mit diesem Faktor korrigiert also diesen Überschuss. In der zweiten Formulierung tritt dieser Überschuss nicht auf. ⟩⟩⟩⟩⟩

1 **Lemma** *Das Dachprodukt ist assoziativ, linear in beiden Faktoren, und antikommutativ. Genauer gilt*

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{kl}\eta \wedge \omega, \qquad \omega \in \Lambda^k V, \quad \eta \in \Lambda^l V. \qquad \rtimes$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Linearität und Antikommutativität folgen direkt aus der Definition. Um die Assoziativität zu verifizieren, bemerken wir, dass

$$\begin{aligned} &((\omega \wedge \eta) \wedge \upsilon)(v_1,..,v_{k+l+m}) \\ &\quad = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k+l,m}} \operatorname{sgn}(\sigma)(\omega \wedge \eta)(v_{\sigma_1},..,v_{\sigma_{k+l}})\upsilon(v_{\sigma_{k+l+1}},..,v_{\sigma_{k+l+m}}) \\ &\quad = \sum_{\sigma \in \mathcal{P}_{k,l,m}} \operatorname{sgn}(\sigma)\omega(v_{\sigma_1},..,v_{\sigma_k})\eta(v_{\sigma_{k+1}},..,v_{\sigma_{k+l}})\upsilon(v_{\sigma_{k+l+1}},..,v_{\sigma_{k+l+m}}). \end{aligned}$$

Genau zu derselben Darstellung gelangen wir aber für

$$(\omega \wedge (\eta \wedge \upsilon))(v_1,..,v_{k+l+m}.$$

Also sind beide Ausdrücke äquivalent. ⟩⟩⟩⟩⟩

▷ A. Für $a \in \Lambda^0 V = \mathbb{R}$ und $\omega \in \Lambda^k V$ ist

$$a \wedge \omega = a\omega \in \Lambda^k V$$

das übliche Produkt von ω mit dem Skalar a.

B. Für 1-Formen gilt

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 = -\varphi_2 \wedge \varphi_1,$$

$$\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 = \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_1 = \varphi_3 \wedge \varphi_1 \wedge \varphi_2.$$

C. Für jede k-Form ω mit $k \geqslant 1$ gilt

$$\omega \wedge \omega = 0.$$

D. Für $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*$ und $v_1, v_2 \in V$ ist

$$(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(v_1, v_2) = \varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2) - \varphi_1(v_2)\varphi_2(v_1)$$
$$= \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \varphi_2(v_1) \\ \varphi_1(v_2) & \varphi_2(v_2) \end{pmatrix}.$$

E. Für $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in V^*$ und $v_1, v_2, v_3 \in V$ ist

$$\begin{aligned}(\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3)&(v_1, v_2, v_3) \\ &= \varphi_1(v_1)\varphi_2(v_2)\varphi_3(v_3) + .. + \varphi_1(v_3)\varphi_2(v_1)\varphi_3(v_2) \\ &\quad - \varphi_1(v_1)\varphi_2(v_3)\varphi_3(v_2) - .. - \varphi_1(v_2)\varphi_l(v_1)\varphi_3(v_3) \\ &= \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \varphi_2(v_1) & \varphi_3(v_1) \\ \varphi_1(v_2) & \varphi_2(v_2) & \varphi_3(v_2) \\ \varphi_1(v_3) & \varphi_2(v_3) & \varphi_3(v_3) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

■ Basisdarstellungen

Eine allgemeine k-lineare Form ω auf V ist bereits eindeutig durch ihre Werte auf allen möglichen Kombinationen von Vektoren einer Basis $v_1, .., v_n$ von V definiert, also durch ihre *Komponenten*

$$\omega_{\mu_1..\mu_k} := \omega(v_{\mu_1}, .., v_{\mu_k}). \qquad 1 \leqslant \mu_1, .., \mu_k \leqslant n.$$

Ist die Form *alternierend*, so reicht bereits die Kenntnis der Komponenten mit

$$1 \leqslant \mu_1 < \mu_2 < .. < \mu_k \leqslant n,$$

denn alle anderen ergeben sich hieraus durch Permutationen der Indizes oder sind Null. Die zugehörigen Basisvektoren sind die Dachprodukte $\varphi_{\mu_1} \wedge .. \wedge \varphi_{\mu_k}$ gebildet aus der zu $v_1, .., v_n$ dualen Basis $\varphi_1, .., \varphi_n$. Denn es ist

$$(\varphi_{\mu_1} \wedge .. \wedge \varphi_{\mu_k})(v_{\mu_1}, .., v_{\mu_k}) = 1,$$

während diese Form auf allen anderen Kombinationen von Basisvektoren verschwindet, die keine Permutation dieser Argumente darstellen.

2 **Satz** *Ist $v_1, .., v_n$ eine Basis von V und $\varphi_1, .., \varphi_n$ die dazu duale Basis von V^*, so besitzt jede alternierende k-Form ω auf V die eindeutige Darstellung*

$$\omega = \sum_{1 \leqslant \mu_1 < .. < \mu_k \leqslant n} \omega_{\mu_1..\mu_k} \varphi_{\mu_1} \wedge .. \wedge \varphi_{\mu_k}$$

mit den Komponenten $\omega_{\mu_1..\mu_k} = \omega(v_{\mu_1}, .., v_{\mu_k})$. ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Wir haben bereits bemerkt, dass jede Form durch ihre Werte für Argumente $v_{\mu_1}, .., v_{\mu_k}$ mit $1 \leqslant \mu_1 < .. < \mu_k \leqslant n$ bestimmt ist und deshalb eine Darstellung der angegebenen Gestalt hat. Außerdem ergibt Anwenden auf $v_{\mu_1}, .., v_{\mu_k}$, dass ω nur dann die Nullform ist, wenn alle Komponenten verschwinden. Daher ist die Darstellung auch eindeutig. ⟩⟩⟩⟩⟩

Korollar *Ist* $\dim V = n$, *so gilt*

$$\dim \Lambda^k V = B_k^n \coloneqq \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}, \qquad k \geqslant 0.$$

⟨⟨⟨⟨⟨ Ist $1 \leqslant k \leqslant n$, so gibt es genau B_k^n Möglichkeiten, k Elemente aus einer Menge mit n Elementen auszuwählen, ohne dass es auf die Reihenfolge ankommt. Somit gibt es ebensoviele Basisvektoren von $\Lambda^k V$. Dies ist auch für $k = 0$ korrekt, denn nach Vereinbarung ist $\Lambda^0 V = \mathbb{R}$, und dieser Raum hat die Dimension 1. Es stimmt auch für $k > n$, denn dann ist $\Lambda^k V = \{0\}$, und dieser Raum hat die Dimension 0. ⟩⟩⟩⟩⟩

Im Standardfall $\mathbb{R}^n$ bezeichnet bekanntlich $\mathrm{d}x_1, .., \mathrm{d}x_n$ die duale Basis zur Standardbasis $e_1, .., e_n$. Eine alternierende k-Form hat somit eine eindeutige Darstellung

$$\omega = \sum_{1 \leqslant \mu_1 < .. < \mu_k \leqslant n} \omega_{\mu_1 .. \mu_k} \, \mathrm{d}x_{\mu_1} \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_{\mu_k}.$$

A. Jede alternierende $n-1$-Form hat die Gestalt

$$\eta = \sum_{k=1}^{n} a_k \, \mathrm{d}x_1 \wedge .. \wedge \mathrm{d}\hat{x}_k \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_n,$$

wobei ˆ bedeutet, dass dieser Term auszulassen ist.

B. Jede alternierende n-Form hat die Gestalt

$$\omega = a \, \mathrm{d}x_1 \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_n, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

C. Insbesondere ist $\mathrm{d}x_1 \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_n$ gerade die Determinante, aufgefasst als n-lineare Form in den Spalten einer $n \times n$-Matrix.

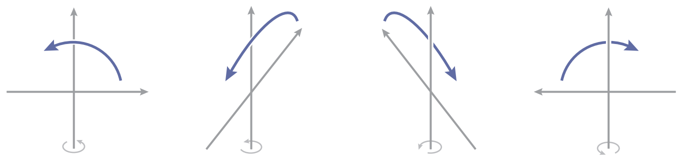
Adjungierte Abbildung

Eine lineare Abbildung $A \colon V \to W$ zwischen zwei Vektorräumen induziert in natürlicher Weise eine lineare Abbildung zwischen den zugehörigen Räumen alternierender Formen, und zwar in umgekehrter Richtung.

3 **Definition** *Die durch eine lineare Abbildung* $A \colon V \to W$ *induzierte adjungierte Abbildung*

$$A^* : \ \Lambda^k W \to \Lambda^k V, \quad \omega \mapsto A^*\omega$$

Abb 1 Uhrzeigersinn von ›vorne‹ und ›hinten‹



ist definiert durch

$$(A^*\omega)(v_1, .., v_k) \coloneqq \omega(Av_1, .., Av_k). \quad \rtimes$$

Für $k = 1$ ist dies die adjungierte Abbildung $A^* : W^* \to V^*$ zwischen den Dualräumen. Aus der Definition ist ersichtlich, dass A^* mit dem Dachprodukt vertauscht: $A^*(\omega \wedge \upsilon) = (A^*\omega) \wedge (A^*\upsilon)$. Für n-Formen gilt außerdem folgendes

4 **Lemma** *Ist V ein Vektorraum der Dimension n und $A: V \to V$ linear, so ist*

$$A^* : \Lambda^n V \to \Lambda^n V, \quad A^*\omega = (\det A)\,\omega$$

genau die Multiplikation mit dem skalaren Faktor $\det A$. $\rtimes$

⟨⟨⟨⟨⟨ Ist $v_1, .., v_n$ irgendeine Basis von V, so ist $A^*\omega$ bestimmt durch

$$(A^*\omega)(v_1, .., v_n) = \omega(Av_1, .., Av_n) = \alpha\omega(v_1, .., v_n)$$

mit einer gewissen reellen Zahl α. Stellen wir A bezüglich dieser Basis durch eine $n \times n$-Matrix (A_{kl}) dar, so geht der mittlere Ausdruck aufgrund der alternierenden Multilinearität von ω über in ein Vielfaches von $\omega(v_1, .., v_n)$, wobei der skalare Faktor genau durch die alternierende Summe dargestellt wird, die die Determinante von (A_{kl}) definiert. ⟩⟩⟩⟩⟩

Bemerkung Man kann die Determinante einer Abbildung $A: V \to V$ auch durch die Gleichung $A^*\omega = (\det A)\,\omega$ koordinatenfrei *definieren*. Dann ist zu zeigen, dass sie mit der entsprechenden alternierenden Summe in den Komponenten einer Matrixdarstellung von A übereinstimmt. ⊸

▪ Orientierung

Für den Satz von Stokes benötigen wir noch den Begriff der *Orientierung* eines Vektorraumes. Für das eindimensionale Integral bereitet dieser Begriff keine Mühe. Aufgrund der Anordnung der reellen Zahlen ist ein Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ immer ›von a nach b‹ orientiert. Die umgekehrte Richtung ist die dazu entgegengesetzte Orientierung.

Wie ist aber eine Ebene orientiert? Der mathematisch positive Orientierungssinn ist vereinbarungsgemäß gegen den Uhrzeigersinn gerichtet. Doch dies ist keine *Definition* der Orientierung, da sie für sich genommen *sinnlos* ist. Was sich aus der einen Betrachtungsrichtung *gegen* den Uhrzeigersinn bewegt, bewegt sich aus der entgegengesetzten Betrachtungsrichtung *mit* dem Uhrzeigersinn $_{\text{Abb 1}}$. Vielmehr kann man nur dann von einem Uhrzeigersinn sprechen, wenn man sich auf eine vorgegebene Orientierung beziehen kann. — Wir lösen dieses kleine Problemchen, indem wir nicht definieren, was *die* Orientierung eines Vektorraums eigentlich ist, sondern indem wir erklären, wann zwei Basen *dieselbe* Orientierung repräsentieren.

Definition *Zwei Basen* $(v_1, .., v_n)$ *und* $(w_1, .., w_n)$ *eines reellen Vektorraums heißen* *gleichorientiert*, *geschrieben*

$$(v_1, .., v_n) \sim (w_1, .., w_n),$$

wenn die Determinante der linearen Transformation Φ *mit* $\Phi v_i = w_i$ *für* $1 \leqslant i \leqslant n$ *positiv ist.* ⋊

Aufgrund der Rechenregeln für die Determinante definiert dies eine *Äquivalenzrelation* auf der Menge aller Basen eines Vektorraumes. Und da die Determinante eines Isomorphismus genau zwei Vorzeichen annehmen kann, definiert diese Äquivalenzrelation genau zwei Äquivalenzklassen, die die beiden *Orientierungen* des Vektorraums genannt werden.

Festgelegt wird eine Orientierung also zum Beispiel durch die Angabe einer Basis $(v_1, .., v_n)$. Da es in diesem Fall auf die Reihenfolge der Basisvektoren ankommt, verwenden wir hier die Tupelschreibweise. Die zugehörige Äquivalenzklasse und damit Orientierung von V bezeichnen wir mit

$$[v_1, .., v_n].$$

Jede andere Basis $(w_1, .., w_n) \in [v_1, .., v_n]$ heißt dann *positiv orientiert*, alle anderen Basen heißen *negativ orientiert*. Die negative Orientierung wird auch mit $-[v_1, .., v_n]$ bezeichnet.

Auf dem Standardraum $\mathbb{R}^n$ mit der Standardbasis $(e_1, .., e_n)$ ist die übliche Orientierung natürlich $[e_1, .., e_n]$. Insbesondere ist dies die übliche Orientierung der Ebene, wenn wir von einer Drehung gegen den Uhrzeigersinn sprechen. Anschaulich gesprochen wird dabei der Vektor e_1 auf dem kürzeren Weg in die Richtung des Vektors e_2 gedreht.

Lemma *Sei* $n = \dim V$ *und* $\omega \in \Lambda^n V$ *nicht die Nullform. Dann sind zwei Basen* $(v_1, .., v_n)$ *und* $(w_1, .., w_n)$ *von* V *gleich orientiert genau dann, wenn* $\omega(v_1, .., v_n)$ *und* $\omega(w_1, .., w_n)$ *dasselbe Vorzeichen haben.* ⋊

22.8

⟨⟨⟨⟨⟨ Ist $\Phi\colon V \to V$ definiert durch $\Phi v_i = w_i$ für $1 \leqslant i \leqslant n$, so ist [4]

$$\begin{aligned} \omega(w_1, .., w_n) &= \omega(\Phi v_1, .., \Phi v_n) \\ &= \Phi^* \omega(v_1, .., v_n) \\ &= \det \Phi \, \omega(v_1, .., v_n). \end{aligned}$$

Somit ist $\det \Phi > 0$ genau dann, wenn $\omega(v_1, .., v_n)$ und $\omega(w_1, .., w_n)$ dasselbe Vorzeichen haben. ⟩⟩⟩⟩⟩

Für die Anschauung nützlich ist folgende *topologische Charakterisierung* einer Orientierung, die sich aus dem Deformationslemma [21.11] ergibt.

Lemma *Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum mit Orientierung $[v_1, .., v_n]$. Dann sind diejenigen Basen $(w_1, .., w_n)$ positiv orientiert, die sich als Basis stetig in $(v_1, .., v_n)$ überführen lassen. Das heißt, es gibt eine stetige Familie von Isomorphismen*

$$\Phi_t : V \to V, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

so dass $\Phi_0 = id$ und $\Phi_1 v_i = w_i$ für $1 \leqslant i \leqslant n$. ⋊

Gemäß unserer Definition besitzt der triviale Vektorraum $\{0\}$ nur eine *einzige* Orientierung, da es überhaupt keine Basis von $\{0\}$ gibt. Dies ist aber für unseren Gebrauch nicht sinnvoll. Daher treffen wir noch folgende

Vereinbarung *Der triviale Vektorraum $\{0\}$ besitzt die beiden Orientierungen $+1$ und -1.* ⋊