18. Vorlesung 16.12.2021

Gen. Differentialformen $\mathbb{R}^n$

$$\omega(x) = \sum_{\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_k} \omega_{\mu_1 \dots \mu_k}(x)\, dx_{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx_{\mu_k}$$

$\Omega^k(U)$ Raum aller C^∞-k-Formen auf $U \subset \mathbb{R}^n$.

Bsp: 1. $k=0$:

$f \in \Omega^0(U)$ ist eine C^∞-Funktion

$f : U \to \mathbb{R}$.

2. Ist $f \in \Omega^0(U)$, dann

$$df : U \to U^*,$$

$$df(x) = \sum_{1 \le \mu \le n} \partial_\mu f(x)\, dx_\mu$$

3. $n-1$ – Formen auf $\mathbb{R}^n$:

$$\eta = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{f_k(x)}_{C^\infty} \, dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \dots \wedge dx_n .$$

$$f : U \hookrightarrow W$$

$$f_* : U \to W , \qquad v \mapsto w = Df(x)\,v$$

Adjungierte Abb

$$f^* : \Lambda^k W \to \Lambda^k U , \qquad \omega \mapsto f^*\omega .$$

Punktweise:

$$(f^*\omega)(x)(v_1, \dots, v_k)$$

$$= \omega(f(x))\,(f_*(x)v_1, \dots, f_*(x)v_k) .$$

Verträglich mit Addition und Dachprodukt:

$$f^*(\omega + \eta) = f^*\omega + f^*\eta$$

$$f^*(\omega \wedge \nu) = f^*\omega \wedge f^*\nu$$

Bemerkung zu $*$:

$$f : U \supset \Omega \longrightarrow W \qquad \text{glatt}$$

Daten

Kovariante Funktion $\Big\{$ $f_* = Df : T\Omega \longrightarrow TW$

$v \longmapsto Df(x) \cdot v$

Kontravariante Funktion $\Big\{$ $f^* :$ $\alpha \in \Omega^k(W)$

$\longrightarrow f^*\alpha \in \Omega^k(U)$

Funktor:

Kovariant: $\quad id_* = id, \quad (f \circ g)_* = f_* \circ g_*$

Kontravariant: $\quad id^* = id, \quad (f \circ g)^* = g^* \circ f^*$

Bsp: Für Formen konkrete Formel:

1. 0-Form g, $\quad f : \Omega \to W$

$$f^* g = g \circ f.$$

2. $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, dx_μ on $\mathbb{R}^m$:

$$f^* dx_\mu = df_\mu, \quad 1 \le \mu \le m :$$

Dem.:

$$\underbrace{(f^* dx_\mu)}(v) = (\underbrace{dx_\mu \circ f})(f_* v)$$
$$= dx_\mu (f_* v)$$
$$= (f_* v)_\mu$$
$$= \underbrace{df_\mu}(v), \quad v \in \mathbb{R}^n$$

3. $f : \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$:

$$f^*(\underbrace{dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n}_{\omega})$$
$$= (\det Df)(dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n)$$

Dem.: $f_* = Df : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Ok,

$$f^*(\omega) = (Df)^* \omega = (\det Df)\, \omega .$$

Bsp: 1. 1-Form

$$\alpha = f\,dx + g\,dy \quad \text{auf } \mathbb{R}^2$$

Dann ist

$$d\alpha = df \wedge dx + dg \wedge dy$$

$$= (f_x\,dx + f_y\,dy) \wedge dx$$

$$+ (g_x\,dx + g_y\,dy) \wedge dy$$

$$= f_y\,dy \wedge dx + g_x\,dx \wedge dy$$

$$= (g_x - f_y)\,dx \wedge dy.$$

2. 1-Form auf $\mathbb{R}^n$:

$$\alpha = \sum_{1\le\mu\le n} \alpha_\mu \, dx_\mu :$$

Dann

$$d\alpha = \sum_{1\le\mu\le n} d\alpha_\mu \wedge dx_\mu$$

$$= \sum_{1\le\mu\le n} \left(\sum_{1\le\lambda\le n} \partial_\lambda \alpha_\mu \cdot dx_\lambda \right) \wedge dx_\mu$$

$$= \sum_{\substack{1\le\mu\le n\\ 1\le\lambda\le n}} \partial_\lambda \alpha_\mu \, dx_\lambda \wedge dx_\mu$$

$$= \sum_{1\le\lambda<\mu\le n} \left(\partial_\lambda \alpha_\mu - \partial_\mu \alpha_\lambda \right) dx_\lambda \wedge dx_\mu .$$

3. 2-Form auf $\mathbb{R}^3$

$$\omega = f_1\, dx_2 \wedge dx_3 + f_2\, dx_3 \wedge dx_1 + f_3\, dx_1 \wedge dx_2 .$$

Dann:

$$\begin{aligned} d\omega &= (\partial_1 f_1\, dx_1) \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &\quad + (\partial_2 f_2\, dx_2) \wedge dx_3 \wedge dx_1 \\ &\quad + (\partial_3 f_3\, dx_3) \wedge dx_1 \wedge dx_2 \\ &= (\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \\ &= (\operatorname{div} f)\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_3 . \\ &= \nabla \cdot f . \end{aligned}$$

Beweis:

(i) $d(\omega + \tilde{\omega}) = d\omega + d\tilde{\omega}$. Einfach

(ii)
$$\omega = f\tilde{\omega}, \qquad \tilde{\omega} = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$$
$$\eta = g\tilde{\eta}, \qquad \tilde{\eta} = dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_l}$$

Dann ist
$$\omega \wedge \eta = (fg) \cdot \tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta}$$

Mit $d(fg) = g\,df + f\,dg$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
d(\omega \wedge \eta) &= d(fg) \wedge \tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta} \\
&= g\,df \wedge \tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta} + f(dg \wedge \tilde{\omega} \wedge \tilde{\eta}) \\
&= (df \wedge \tilde{\omega}) \wedge (g\tilde{\eta}) \\
&\quad + (-1)^k (f\tilde{\omega}) \wedge (dg \wedge \tilde{\eta}) \\
&= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta .
\end{aligned}$$

(iii) Sei

$$\omega = \overset{\textstyle\sum_{\mu}}{\sum_{\mu_1<\mu_2<\dots<\mu_k}} \omega_{\mu_1\dots\mu_k} \underbrace{dx_{\mu_1}\wedge\dots\wedge dx_{\mu_k}}_{(*)}$$

Dann:

$$d\omega = \sum_{\mu}\sum_{1\le\lambda\le n} \partial_\lambda \omega_{\mu_1\dots\mu_k}\, dx_\lambda \wedge (*)$$

und

$$d(d\omega) = \sum_{\mu}\underbrace{\sum_{\substack{1\le\lambda\le n\\ 1\le\kappa\le n}}}_{\kappa=\lambda\ \longrightarrow\ 0} \partial_\kappa\partial_\lambda \omega_{\mu_1\dots\mu_k}\, dx_\kappa\wedge dx_\lambda \wedge (*)$$

Zusammenfassen: Sei $\kappa<\lambda$:

$$\partial_\kappa\partial_\lambda\omega_{\dots}(dx_\kappa\wedge dx_\lambda)\wedge(*) + \partial_\lambda\partial_\kappa\omega_{\dots}(dx_\lambda\wedge dx_\kappa)\wedge(*)$$

$$= \Big(\underbrace{\partial_\kappa\partial_\lambda\omega_{\dots} - \partial_\lambda\partial_\kappa\omega_{\dots}}_{0}\Big)\, dx_\kappa\wedge dx_\lambda\wedge(*)$$

$$\sum_{\kappa<\lambda}(\quad)\ \dots\ = 0.$$

$$\boxed{\text{Also:}\quad d\circ d = 0.}$$

(iv) Für eine 0-Form g:

$$f^*(dg)(v) = (dg \circ f)(f_* v)$$

$$= (Dg \circ f)(Df \cdot v)$$

$$\underset{\text{Kettenregel}}{=} D(g \circ f)(v)$$

$$= D(f^* g)(v)$$

$$= d(f^* g)(v)$$

Also:

$$f^*(dg) = d(f^* g).$$

für 0-Form.

$\blacksquare$

Grundfall: Gelten an ..., für k-Form

Beweis, Dann $(k+1)$-Form:

$$\omega \wedge dx_\lambda$$

Dann:

$$f^*(d(\omega \wedge dx_\lambda))$$

$$= f^*(d\omega \wedge dx_\lambda)$$

$$= f^* d\omega \wedge f^* dx_\lambda$$

$$= d f^*\omega \wedge f^* dx_\lambda$$

$$= \boxed{d f^*\omega \wedge df_\lambda}$$

Ziel:

$$d(f^*(\omega \wedge dx_\lambda))$$

$$= d(f^*\omega \wedge f^* dx_\lambda)$$

$$= d(f^*\omega \wedge df_\lambda)$$

$$= \boxed{d f^*\omega \wedge df_\lambda}$$

gleich!

$d: \Omega^k(U) \longrightarrow \Omega^{k+1}(U), \quad k \geq 0$

mit folgenden Eigenschaften:

(C-1) Differenzialeigenschaft:

$f \in \Omega^0(U)$: df Differential

(C-2) Produktregel: für $\omega \in \Omega^k(U)$:

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$$

(C-3) Komplexeigenschaft: $d \circ d = 0$.

Beweis: Übungsaufgabe.

1-Form $\alpha = \sum_{\mu} \alpha_\mu \, dx_\mu$

Geschlossen: Integrabilitätsbedingung:

$$(*) \quad \partial_\lambda \alpha_\mu = \partial_\mu \alpha_\lambda \, , \quad \lambda < \mu \, .$$

$$d\alpha = \sum_{\lambda<\mu} \left(\partial_\lambda \alpha_\mu - \partial_\mu \alpha_\lambda \right) dx_\lambda \wedge dx_\mu$$

$$= 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad (*)$$

Wegen $d(d\omega) = 0$ ist jede exakte Form auch geschlossen:

$$\omega = d\eta$$

$$\Longrightarrow \quad d\omega = d(d\eta) = 0 .$$

$$\int_{C} d\omega = \int_{\partial C} \omega$$