22.2 Differenzialformen

Eine 1-Form ist eine Abbildung $\alpha\colon V \hookrightarrow V^*$, die jedem Punkt x im Definitionsbereich eine Linearform $\alpha(x)$ in V^* zuordnet. Entsprechendes definieren wir jetzt für k-Formen.

Definition *Eine Differenzialform vom Grad k, kurz k-Form, ist eine Abbildung*

$$\omega : V \hookrightarrow \Lambda^k V, \quad x \mapsto \omega(x),$$

die jedem Punkt im Definitionsbereich eine alternierende k-Form zuordnet. ⋊

Im Standardfall $\mathbb{R}^n$ hat eine k-Form ω somit eine Darstellung [2]

$$\omega(x) = \sum_{1 \leqslant \mu_1 < .. < \mu_k \leqslant n} \omega_{\mu_1 .. \mu_k}(x)\, \mathrm{d}x_{\mu_1} \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_{\mu_k}$$

mit Komponentenfunktionen $\omega_{\mu_1 .. \mu_k}(x) = \omega(x)(e_{\mu_1}, .., e_{\mu_k})$. Eine solche Form heißt *stetig* respektive *von der Klasse C^r*, wenn alle Komponentenfunktionen stetig respektive von der Klasse C^r sind. Die Regularitätseigenschaften von Formen werden hier allerdings keine besondere Rolle spielen. Der Einfachheit nehmen wir an, dass alle *unendlich oft differenzierbar* sind. Mit $\Omega^k(U)$ bezeichnen wir den Raum solcher k-Formen auf einem Gebiet U im $\mathbb{R}^n$.

▹ A. Eine 0-Form $f \in \Omega^0(U)$ ist eine C^∞-Funktion

$$f : U \to \mathbb{R}.$$

B. Ist $f \in \Omega^0(U)$, so ist ihr übliches Differenzial

$$\mathrm{d}f : U \to V^*, \quad \mathrm{d}f(x) = \sum_{1 \leqslant \mu \leqslant n} \partial_\mu f(x)\, \mathrm{d}x_\mu$$

eine 1-Form in $\Omega^1(U)$.

C. Eine $n-1$-Form auf dem $\mathbb{R}^n$ hat die Gestalt

$$\eta = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\, \mathrm{d}x_1 \wedge .. \wedge \mathrm{d}\hat{x}_k \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_n. \quad ◃$$

Transformationsregel

Sei $f\colon V \hookrightarrow W$ eine differenzierbare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen, wobei *differenzierbar* für *unendlich oft differenzierbar* stehen soll. In jedem Punkt ihres Definitionsbereichs definiert ihre Ableitung die *Tangentialabbildung*

$$f_* : V \to W, \quad v \mapsto w = Df(x)v.$$

Diese induziert eine adjungierte Abbildung [3]

$$f^* : \Lambda^k W \to \Lambda^k V, \quad \omega \mapsto f^* \omega$$

der entsprechenden Räume von k-Formen. Verfahren wir so in jedem Punkt, erhalten wir folgende

5 **Transformationsregel** *Sei $U \subset V$ ein Gebiet und $f: U \to W$ differenzierbar. Dann ist*

$$f^* : \Omega^k(W) \to \Omega^k(U), \quad \omega \mapsto \upsilon = f^* \omega$$

definiert durch

$$\upsilon(v_1, .., v_k) = (\omega \circ f)(f_* v_1, .., f_* v_k).$$

⋊

Man nennt $f^* \omega$ den *pull back* von ω oder die durch f *zurückgeholte Form*. Punktweise ist sie gegeben durch

$$(f^* \omega)(x)(v_1, .., v_k) = \omega(f(x))(f_*(x) v_1, .., f_*(x) v_k).$$

Diese Operation vertauscht offensichtlich mit Addition und Multiplikation, also

$$f^*(\omega + \tilde{\omega}) = f^* \omega + f^* \tilde{\omega}, \qquad f^*(\omega \wedge \upsilon) = f^* \omega \wedge f^* \upsilon.$$

Bemerkung Allgemein verwendet man die Bezeichnungen f_* und f^* für sogenannte *kovariante* und *kontravariante Funktoren*, die einer Abbildung f zugeordnet sind und für die gilt

$$id_* = id, \quad (f \circ g)_* = f_* \circ g_*$$

respektive

$$id^* = id, \quad (f \circ g)^* = g^* \circ f^*.$$

Der *push forward* $f_* = Df$ für Tangentialvektoren und der *pull back* f^* für Differenzialformen sind typische Beispiele. ⊸

6 ⊳ A. Für eine 0-Form g ist der pull back die Komposition:

$$f^* g = g \circ f.$$

B. Für $f: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ gilt

$$f^* \mathrm{d}x_\mu = \mathrm{d}f_\mu, \qquad 1 \leqslant \mu \leqslant m,$$

wobei f_μ die μ-te Komponente von f bezeichnet. Denn wegen der Unabhängigkeit von $\mathrm{d}x_\mu$ vom Punkt ist

$$(f^* \mathrm{d}x_\mu)(v) = (\mathrm{d}x_\mu \circ f)(f_* v) = \mathrm{d}x_\mu(f_* v).$$

Der letzte Ausdruck ist gerade die μ-te Komponente des Vektors $f_* v$, also

$$\mathrm{d}x_\mu(f_* v) = (f_* v)_\mu = Df_\mu(v) = \mathrm{d}f_\mu(v).$$

C. Für $f\colon \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ gilt

$$f^*(\mathrm{d}x_1 \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_n) = (\det Df)(\mathrm{d}x_1 \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_n).$$

Denn in jedem Punkt ist $f_* = Df$ eine lineare Transformation des $\mathbb{R}^n$ in sich. Da $\omega = \mathrm{d}x_1 \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_n$ nicht vom Ort abhängt, gilt deshalb $_4$

$$f^*\omega = (Df)^*\omega = (\det Df)\,\omega.$$ ◁

▪ Äußere Ableitung

Die *äußere* oder *Cartansche Ableitung* ordnet einer k-Form eine $k+1$-Form zu. Wir kennen diesen Operator bisher in der Form des Differenzials einer skalaren Funktion, das einer 0-Form eine 1-Form zuordnet. Nun definieren wir ihn für beliebige Formen, wobei wir uns auf den Standardfall beschränken.

Definition *Die äußere Ableitung oder das Differenzial einer k-Form*

$$\omega = \sum_{1 \leqslant \mu_1 < .. < \mu_k \leqslant n} \omega_{\mu_1 .. \mu_k}\, \mathrm{d}x_{\mu_1} \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_{\mu_k}$$

mit $k \geqslant 1$ ist die $k+1$-Form

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{1 \leqslant \mu_1 < .. < \mu_k \leqslant n} \mathrm{d}\omega_{\mu_1 .. \mu_k} \wedge \mathrm{d}x_{\mu_1} \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_{\mu_k}.$$

Das Differenzial einer 0-Form ist ihr übliches Differenzial als Funktion. ⋊

Von jeder Komponentenfunktion wird also das Funktionsdifferenzial gebildet und mit der zugehörigen Basisform durch das Dachprodukt verknüpft. Ausgeschrieben ergibt dies

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{1 \leqslant \mu_1 < .. < \mu_k \leqslant n} \sum_{1 \leqslant \lambda \leqslant n} \partial_\lambda \omega_{\mu_1 .. \mu_k}\, \mathrm{d}x_\lambda \wedge \mathrm{d}x_{\mu_1} \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_{\mu_k}.$$

7 ▷ A. Das Differenzial einer 1-Form $\alpha = f\,\mathrm{d}x + g\,\mathrm{d}y$ auf dem $\mathbb{R}^2$ ist

$$\mathrm{d}\alpha = f_y\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}x + g_x\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = (g_x - f_y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

B. Das Differenzial einer 1-Form $\alpha = \sum_{1 \leqslant \mu \leqslant n} \alpha_\mu\,\mathrm{d}x_\mu$ auf dem $\mathbb{R}^n$ ist

$$\mathrm{d}\alpha = \sum_{1 \leqslant \mu \leqslant n} \sum_{1 \leqslant \lambda \leqslant n} \partial_\lambda \alpha_\mu\,\mathrm{d}x_\lambda \wedge \mathrm{d}x_\mu = \sum_{1 \leqslant \lambda < \mu \leqslant n} (\partial_\lambda \alpha_\mu - \partial_\mu \alpha_\lambda)\,\mathrm{d}x_\lambda \wedge \mathrm{d}x_\mu.$$

c. Das Differenzial von $\omega = f_1\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 + f_2\,\mathrm{d}x_3 \wedge \mathrm{d}x_1 + f_3\,\mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3$ auf dem $\mathbb{R}^3$ ist

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\omega &= (\partial_1 f_1 + \partial_2 f_2 + \partial_3 f_3)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3 \\ &= (\operatorname{div} f)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \mathrm{d}x_2 \wedge \mathrm{d}x_3. \end{aligned}$$

8 **Rechenregeln** *Für k-Formen $\omega, \tilde{\omega}$ und l-Formen η gilt*
(i) $\mathrm{d}(\omega + \tilde{\omega}) = \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}\tilde{\omega}$,
(ii) $\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k\,\omega \wedge \mathrm{d}\eta$,
(iii) $\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = 0$,
(iv) $f^*(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(f^*\omega)$. ⋊

⟨⟨⟨⟨ (i) Das ist einfach.

(ii) Der allgemeine Fall lässt sich aufgrund der Additivität zurückführen auf $\omega = f\tilde{\omega}$ und $\eta = g\tilde{\eta}$, wobei $\tilde{\omega} = \mathrm{d}x_{\mu_1} \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_{\mu_k}$ und $\tilde{\eta} = \mathrm{d}x_{\nu_1} \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_{\nu_l}$. Dann ist

$$\omega \wedge \eta = (fg)\,\hat{\omega} \wedge \hat{\eta},$$

und mit $\mathrm{d}(fg) = g\,\mathrm{d}f + f\,\mathrm{d}g$ erhalten wir definitionsgemäß

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\omega \wedge \eta) &= \mathrm{d}(fg) \wedge \hat{\omega} \wedge \hat{\eta} \\ &= g\,\mathrm{d}f \wedge \hat{\omega} \wedge \hat{\eta} + f\,\mathrm{d}g \wedge \hat{\omega} \wedge \hat{\eta} \\ &= (\mathrm{d}f \wedge \hat{\omega}) \wedge (g\,\hat{\eta}) + (-1)^k (f\hat{\omega}) \wedge (\mathrm{d}g \wedge \hat{\eta}) \\ &= \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\eta. \end{aligned}$$

(iii) Definitionsgemäß ist

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{\mu_1 < .. < \mu_k} \sum_{1 \leqslant \lambda \leqslant n} \partial_\lambda \omega_{\mu_1 .. \mu_k}\,\mathrm{d}x_\lambda \wedge \mathrm{d}x_{\mu_1} \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_{\mu_k}$$

und

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\omega) = \sum_{\mu_1 < .. < \mu_k} \sum_{1 \leqslant \kappa, \lambda \leqslant n} \partial_\kappa \partial_\lambda \omega_{\mu_1 .. \mu_k}\,\mathrm{d}x_\kappa \wedge \mathrm{d}x_\lambda \wedge \mathrm{d}x_{\mu_1} \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_{\mu_k}.$$

In dieser Summe verschwinden alle Terme mit $\kappa = \lambda$. Ansonsten kombinieren sich jeweils zwei Terme zu Null, nämlich

$$\begin{aligned} &\partial_\kappa \partial_\lambda \omega_{\mu_1 .. \mu_k}\,\mathrm{d}x_\kappa \wedge \mathrm{d}x_\lambda \wedge \mathrm{d}x_{\mu_1} \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_{\mu_k} \\ &\quad + \partial_\lambda \partial_\kappa \omega_{\mu_1 .. \mu_k}\,\mathrm{d}x_\lambda \wedge \mathrm{d}x_\kappa \wedge \mathrm{d}x_{\mu_1} \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_{\mu_k} \\ &= \partial_\kappa \partial_\lambda \omega_{\mu_1 .. \mu_k} (\mathrm{d}x_\kappa \wedge \mathrm{d}x_\lambda + \mathrm{d}x_\lambda \wedge \mathrm{d}x_\kappa) \wedge \mathrm{d}x_{\mu_1} \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_{\mu_k} = 0. \end{aligned}$$

Somit ist die gesamte Summe Null.

(iv) Für eine 0-Form g handelt es sich um die Kettenregel, denn

$$\begin{aligned} f^*(\mathrm{d}g)(v) &= (\mathrm{d}g \circ f)(f_* v) \\ &= (Dg \circ f)(Df(v)) \\ &= D(g \circ f)(v) = \mathrm{d}(f^*g)(v). \end{aligned}$$

Wir nehmen jetzt induktiv an, dass die Gleichung bereits für k-Formen verifiziert ist. Es genügt dann, eine $k+1$-Form der Gestalt $\omega \wedge \mathrm{d}x_\lambda$ zu betrachten. Mit der Produktregel (ii) und $\mathrm{d}(\mathrm{d}x_\lambda) = 0$ ist dann

$$\begin{aligned} f^*(\mathrm{d}(\omega \wedge \mathrm{d}x_\lambda)) &= f^*(\mathrm{d}\omega \wedge \mathrm{d}x_\lambda) \\ &= f^*\mathrm{d}\omega \wedge f^*\mathrm{d}x_\lambda \\ &= \mathrm{d}f^*\omega \wedge f^*\mathrm{d}x_\lambda, \end{aligned}$$

wobei die Induktionsannahme beim Übergang zur letzten Zeile zur Anwendung kam. Auf der anderen Seite ist wegen $\mathrm{d}(\mathrm{d}f_\lambda) = 0$ auch

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(f^*(\omega \wedge \mathrm{d}x_\lambda)) &= \mathrm{d}(f^*\omega \wedge f^*\mathrm{d}x_\lambda) \\ &= \mathrm{d}(f^*\omega \wedge \mathrm{d}f_\lambda) \\ &= \mathrm{d}f^*\omega \wedge \mathrm{d}f_\lambda. \end{aligned}$$

Also ist $f^*\mathrm{d}(\omega \wedge \mathrm{d}x_\lambda) = \mathrm{d}f^*(\omega \wedge \mathrm{d}x_\lambda)$, und wir sind fertig. ⟫⟫

Bemerkung Wir haben die äußere Ableitung einer k-Form durch Bezug auf Standardkoordinaten definiert. Dies erscheint etwas willkürlich, und es stellt sich die Frage, ob es nicht auch ohne Koordinaten geht. In der Tat ist eine äußere Ableitung

$$\mathrm{d} : \ \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U), \qquad k \geqslant 0,$$

durch die folgenden drei Eigenschaften vollständig und eindeutig bestimmt:

(c-1) *Differenzialeigenschaft:* Für $f \in \Omega^0(U)$ ist $\mathrm{d}f$ das Differenzial.

(c-2) *Produktregel:* Für $\omega \in \Omega^k(U)$ ist

$$\mathrm{d}(\omega \wedge \eta) = \mathrm{d}\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge \mathrm{d}\eta.$$

(c-3) *Komplexeigenschaft:* Es ist $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$.

Für einen Beweis siehe Kapitel 8 in Jänisch, *Vektoranalysis.* ⊸

▪ Geschlossene und exakte Formen

Definition *Eine Differenzialform ω heißt geschlossen, wenn $\mathrm{d}\omega = 0$. Sie heißt exakt, wenn $\omega = \mathrm{d}\eta$ mit einer weiteren Differenzialform η.* ⋊

Geschlossene 1-Formen $\alpha = \sum \alpha_\mu \,\mathrm{d}x_\mu$ hatten wir bereits mithilfe der Integrabilitätsbedingung 19.10

$$\partial_\lambda \alpha_\mu = \partial_\mu \alpha_\lambda, \qquad 1 \leqslant \lambda, \mu \leqslant n$$

definiert. Dies ist aber äquivalent mit

$$\mathrm{d}\alpha = \sum_{1 \leqslant \lambda < \mu \leqslant n} (\partial_\lambda \alpha_\mu - \partial_\mu \alpha_\lambda)\,\mathrm{d}x_\lambda \wedge \mathrm{d}x_\mu = 0,$$

also der Geschlossenheit von α im Sinne der jetzigen Definition.

Wegen $\mathrm{d} \circ \mathrm{d} = 0$ 8 ist jede exakte Differenzialform auch geschlossen. Die Frage ist, ob umgekehrt jede geschlossene Form auch exakt ist. Für 1-Formen gab das Lemma von Poincaré 19.12 eine positive Antwort auf sternförmigen Gebieten. Tatsächlich gilt dieses Lemma für Differenzialformen beliebigen Grades.

9 **Lemma von Poincaré** *Jede geschlossene Differenzialform auf einem sternförmigen Gebiet ist exakt.* ⋊

⟨⟨⟨⟨⟨ Der Beweis kann beim ersten Lesen übersprungen werden, da wir dieses Ergebnis nur für eine Notiz über Vektorpotentiale ?? benötigen. — Wir ordnen jeder k-Form ω eine $k-1$-Form $I\omega$ so zu, dass $I\omega = 0$ für $\omega = 0$ und

$$\omega = I(\mathrm{d}\omega) + \mathrm{d}(I\omega).$$

Ist ω geschlossen, so ist $I\omega$ eine $k-1$-Form mit $\mathrm{d}(I\omega) = \omega$, und wir sind fertig.

Sei

$$\omega = \sum_{\mu_1 < .. < \mu_k} \omega_{\mu_1 .. \mu_k}\,\mathrm{d}x_{\mu_1} \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_{\mu_k}$$

eine beliebige k-Form. Wir können annehmen, dass ihr Definitionsbereich sternförmig zum Nullpunkt ist. Wir definieren dann

$$(I\omega)(x) = \sum_{\mu_1 < .. < \mu_k} \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \left(\int_0^1 t^{k-1} \omega_{\mu_1 .. \mu_k}(tx)\,\mathrm{d}t \right) x_{\mu_i}\,\mathrm{d}x_{\mu_1} \wedge .. \wedge \mathrm{d}\hat{x}_{\mu_i} \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_{\mu_k},$$

wobei das Dach wie üblich bedeutet, dass dieser Term auszulassen ist.

Nun folgt etwas Rechnerei. Da wir aufgrund der Glattheit der Komponenten unter dem Integral differenzieren dürfen, ist

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(I\omega) = &\sum_{\mu_1<\dots<\mu_k} k\left(\int_0^1 t^{k-1}\omega_{\mu_1\dots\mu_k}(tx)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x_{\mu_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x_{\mu_k}\\
&+\sum_{\mu_1<\dots<\mu_k}\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{n}(-1)^{i-1}\left(\int_0^1 t^k\partial_l\omega_{\mu_1\dots\mu_k}(tx)\,\mathrm{d}t\right)\\
&\qquad x_{\mu_i}\,\mathrm{d}x_l\wedge\mathrm{d}x_{\mu_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}\hat{x}_{\mu_i}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x_{\mu_k}.
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\mathrm{d}\omega = \sum_{\mu_1<\dots<\mu_k}\sum_{l=1}^{n}\partial_l\omega_{\mu_1\dots\mu_k}\,\mathrm{d}x_l\wedge\mathrm{d}x_{\mu_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x_{\mu_k}.$$

Wenden wir hierauf dieselbe Konstruktion an, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
I(\mathrm{d}\omega) = &\sum_{\mu_1<\dots<\mu_k}\sum_{l=1}^{n}\left(\int_0^1 t^k\partial_l\omega_{\mu_1\dots\mu_k}(tx)\,\mathrm{d}t\right)x_l\,\mathrm{d}x_{\mu_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x_{\mu_k}\\
&-\sum_{\mu_1<\dots<\mu_k}\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{i-1}\left(\int_0^1 t^k\partial_l\omega_{\mu_1\dots\mu_k}(tx)\,\mathrm{d}t\right)\\
&\qquad x_{\mu_i}\,\mathrm{d}x_l\wedge\mathrm{d}x_{\mu_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}\hat{x}_{\mu_i}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x_{\mu_k}.
\end{aligned}$$

Addieren wir $\mathrm{d}(I\omega)$ und $I(\mathrm{d}\omega)$, so annullieren sich die dreifachen Summen, und wir erhalten

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}(I\omega)+I(\mathrm{d}\omega)\\
&\quad=\sum_{\mu_1<\dots<\mu_k} k\left(\int_0^1 t^{k-1}\omega_{\mu_1\dots\mu_k}(tx)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x_{\mu_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x_{\mu_k}\\
&\qquad+\sum_{\mu_1<\dots<\mu_k}\sum_{l=1}^{n}\left(\int_0^1 t^k x_l\partial_l\omega_{\mu_1\dots\mu_k}(tx)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x_{\mu_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x_{\mu_k}\\
&\quad=\sum_{\mu_1<\dots<\mu_k}\left(\int_0^1\partial_t\left[t^k\omega_{\mu_1\dots\mu_k}(tx)\right]\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x_{\mu_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x_{\mu_k}\\
&\quad=\sum_{\mu_1<\dots<\mu_k}\omega_{\mu_1\dots\mu_k}\,\mathrm{d}x_{\mu_1}\wedge\dots\wedge\mathrm{d}x_{\mu_k}\\
&\quad=\omega.
\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis vollständig. 》》》

22.16