22.3 Ketten

Wir spezifizieren nun die geometrischen Objekte, über die wir Differenzialformen integrieren. Die Begriffsbildung mag etwas umständlich erscheinen. Tatsächlich handelt es sich nur um einen technischen Zwischenschritt zum allgemeinen Satz von Stokes ??. — Sei $\mathbb{I} := [0,1]$ und damit

$$\mathbb{I}^n = [0,1]^n, \qquad n \geqslant 1.$$

Außerdem sei $\mathbb{I}^0 := \{0\}$.

Definition *Sei $n \geqslant 0$. Der Standard-n-Würfel ist die triviale Abbildung*

$$I^n : \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}^n, \quad I^n(x) = x.$$

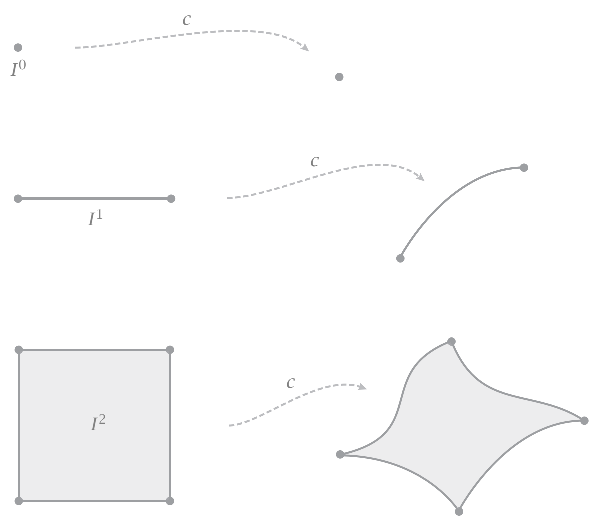
Ein allgemeiner n-Würfel in einem Gebiet $U \subset \mathbb{R}^m$ ist eine stetige Abbildung

$$c : \mathbb{I}^n \to U.$$

Eine n-Kette in U ist eine endliche Linearkombination $\lambda_1 c_1 + .. + \lambda_r c_r$ von n-Würfeln $c_1, .., c_r$ mit ganzzahligen Koeffizienten $\lambda_1, .., \lambda_r$. ⋊

Es ist also $\mathbb{I}^n$ eine Menge und I^n eine Abbildung.

Abb 2 Standard- und allgemeine n-Würfel für $n = 0, 1, 2$



22.18

A. Ein 0-Würfel $c: \{0\} \to U$ ist ein Punkt in U.
B. Ein 1-Würfel $c: [0,1] \to U$ ist eine stetige Kurve in U.
C. Jeder n-Würfel c ist eine n-Kette, wenn wir c mit $1c$ identifizieren.

Ketten treten in natürlicher Weise als *Ränder* von Würfeln auf. Betrachte zunächst den Standardwürfel. Sein Rand ist eine Kette aus $n-1$-Würfeln, die seine Seiten beschreiben und mit Blick auf den Fundamentalsatz mit den geeigneten Vorzeichen versehen sind.

Definition *Für $1 \leqslant i \leqslant n$ und $\alpha \in \{0,1\}$ heißt*

$$I_{i,\alpha}^n : \mathbb{I}^{n-1} \to \mathbb{I}^n, \quad x \mapsto (x_1, .., x_{i-1}, \alpha, x_i, .., x_{n-1})$$

die i, α-Seite von I^n. Die $n-1$-Kette

$$\partial I^n \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} I_{i,\alpha}^n$$

heißt der Rand von I^n. Der Rand einer 0-Kette ist 0. ⋊

Definition *Der Rand eines beliebigen n-Würfels $c: \mathbb{I}^n \to U$ ist*

$$\partial c \coloneqq \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} c_{i,\alpha},$$

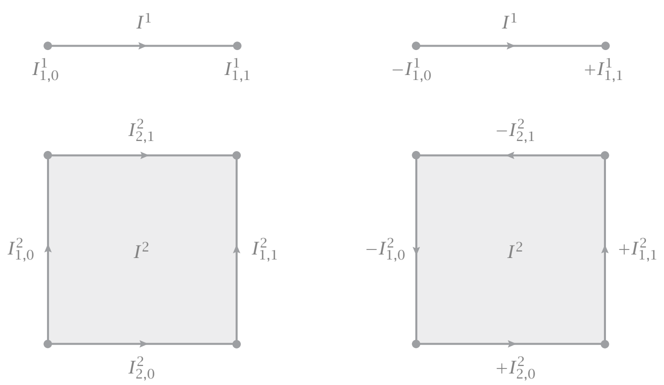
wobei $c_{i,\alpha} \coloneqq c \circ I_{i,\alpha}^n$ die i, α-Seite von c bezeichnet. Entsprechend ist

$$\partial(\lambda_1 c_1 + .. + \lambda_r c_r) \coloneqq \lambda_1 \partial c_1 + .. + \lambda_r \partial c_r$$

der Rand einer allgemeinen n-Kette. ⋊

Der Rand des Randes von I^2 ist 0, da jeder Eckpunkt einmal als Endpunkt einer Seite mit $+1$ und als Anfangspunkt der nächsten Seite mit -1 gewichtet

Abb 3 Seiten und Rand von I^1 und I^2



22.19

wird, in der Summe also den Faktor 0 erhält. Dies gilt ganz allgemein für *jede* Kette:

Satz *Der Randoperator ∂ hat die Komplexeigenschaft*

$$\partial \circ \partial = 0. \qquad \rtimes$$

Für jede n-Kette c gilt also $\partial(\partial c) = 0$.

⟨⟨⟨⟨⟨ Es genügt, einen einzelnen n-Würfel zu betrachten. Was für ihn gilt, gilt dann auch für jede n-Kette.

Betrachte zunächst die j, β-Seite der i, α-Seite von I^n,

$$(I^n_{i,\alpha})_{j,\beta} : \mathbb{I}^{n-2} \to \mathbb{R}^n,$$

wobei wir $i \leqslant j$ annehmen können. Für $x \in \mathbb{I}^{n-2}$ ist definitionsgemäß

$$\begin{aligned} (I^n_{i,\alpha})_{j,\beta}(x) &= I^n_{i,\alpha}(I^{n-1}_{j,\beta}(x)) \\ &= I^n_{i,\alpha}(x_1, .., \beta_j, .., x_{n-2}) \\ &= (x_1, .., \alpha_i, .., \beta_{j+1}, .., x_{n-2}), \end{aligned}$$

wobei die Indizes an α und β angeben, an welchen Positionen die Einträge stehen. Man beachte, dass β wegen $i \leqslant j$ von der j-ten an die $j+1$-te Stelle verschoben wird. Andererseits ist aber auch

$$\begin{aligned} (I^n_{j+1,\beta})_{i,\alpha}(x) &= I^n_{j+1,\beta}(I^{n-1}_{i,\alpha}(x)) \\ &= I^n_{j+1,\beta}(x_1, .., \alpha_i, .., x_{n-2}) \\ &= (x_1, .., \alpha_i, .., \beta_{j+1}, .., x_{n-2}). \end{aligned}$$

Also gilt

$$(I^n_{i,\alpha})_{j,\beta} = (I^n_{j+1,\beta})_{i,\alpha}.$$

Dasselbe gilt dann auch für einen beliebigen n-Würfel c, also

$$(c_{i,\alpha})_{j,\beta} = (c_{j+1,\beta})_{i,\alpha}, \qquad i \leqslant j.$$

In der Randdarstellung

$$\partial(\partial c) = \partial\left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} c_{i,\alpha}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{\alpha,\beta=0}^{1} (-1)^{i+\alpha+j+\beta} (c_{i,\alpha})_{j,\beta}$$

existiert daher zu jedem Summanden genau ein weiterer Summand mit entgegengesetztem Vorzeichen. Die gesamte Summe verschwindet deshalb, so dass

$$\partial(\partial c) = 0. \qquad ⟩⟩⟩⟩⟩$$

22.20

22.4 Der Fundamentalsatz

Jetzt geht es noch darum, Differenzialformen über Würfel zu integrieren. Genauer wird eine n-Form immer über einen n-Würfel integriert, nicht über einen Würfel einer anderen Dimension.

Zunächst wieder einige Definitionen. Ist ω eine n-Form auf $\mathbb{I}^n$, so ist

$$\omega = f \mathrm{d}x_1 \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_n$$

mit einer differenzierbaren [1] Funktion $f : \mathbb{I}^n \to \mathbb{R}$. Wir definieren dann ›klassisch‹

$$\int_{\mathbb{I}^n} \omega = \int_{\mathbb{I}^n} f \mathrm{d}x_1 \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_n \coloneqq \int_{\mathbb{I}^n} f \,\mathrm{d}\lambda_n$$

als das Lebesgueintegral der Koeffizientenfunktion f über $\mathbb{I}^n$ bezüglich des Volumenmaßes $\mathrm{d}\lambda_n$. Das Integral über einen allgemeinen Würfel wird darauf zurückgeführt.

Definition *Sei ω eine stetige n-Form auf einem Gebiet U. Für einen differenzierbaren n-Würfel c in U ist dann*

$$\int_c \omega \coloneqq \int_{\mathbb{I}^n} c^* \omega.$$

Für eine differenzierbare n-Kette $c = \lambda_1 c_1 + .. + \lambda_r c_r$ ist entsprechend

$$\int_c \omega \coloneqq \lambda_1 \int_{c_1} \omega + .. + \lambda_r \int_{c_r} \omega.$$

Für $n = 0$ sei außerdem $\int_c \omega \coloneqq \omega(c(0))$. ⋊

▷ A. Für den Standardwürfel I^n und $\omega = f \,\mathrm{d}x_1 \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_n$ ist dies wieder die vorher getroffene Vereinbarung:

$$\begin{aligned} \int_{I^n} \omega &= \int_{I^n} f \mathrm{d}x_1 \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_n \\ &= \int_{\mathbb{I}^n} (I^n)^* (f \mathrm{d}x_1 \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_n) \\ &= \int_{\mathbb{I}^n} f \mathrm{d}x_1 \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_n = \int_{\mathbb{I}^n} f \,\mathrm{d}\lambda_n. \end{aligned}$$

B. Im Fall $n = 1$ handelt es sich um das bekannte Integral einer 1-Form

$$\alpha = \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_i \,\mathrm{d}x_i$$

[1] Stetig würde hier auch genügen.

entlang einer Kurve $c\colon \mathbb{I} \to U$:

$$\int_c \alpha = \int_{\mathbb{I}} c^*\alpha = \int_{\mathbb{I}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(c(t))\dot{c}_i(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{I}} \langle \alpha \circ c, \dot{c} \rangle \,\mathrm{d}t.$$

c. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Für jeden stetig differenzierbaren 1-Würfel $c\colon \mathbb{I} \to [a,b]$ gilt dann

$$\int_c f\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{I}} c^*(f\,\mathrm{d}x) = \int_0^1 (f \circ c)c'\,\mathrm{d}t = \int_{c(0)}^{c(1)} f\,\mathrm{d}t$$

aufgrund der Substitutionsregel.

Wir haben jetzt alles beisammen, um den Satz von Stokes für Ketten zu formulieren und auch zu beweisen.

10 **Fundamentalsatz (Satz von Stokes)** *Ist ω eine differenzierbare $n-1$-Form auf einem Gebiet U und c eine differenzierbare n-Kette in U, so gilt*

$$\int_c \mathrm{d}\omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Zuerst betrachten wir eine $n-1$-Form auf dem Standardwürfel. Eine solche Form hat im $\mathbb{R}^n$ die Basisdarstellung

$$\omega = \sum_{\mu=1}^{n} f_\mu \omega_\mu, \qquad \omega_\mu \coloneqq \mathrm{d}x_1 \wedge .. \wedge \mathrm{d}\hat{x}_\mu \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_n,$$

wobei das Dach bedeutet, dass dieser Term *auszulassen* ist. Aufgrund der Linearität der Integrale können wir uns weiter auf eine solche Form

$$\omega = f\omega_\mu$$

beschränken. Dessen Integral über $I^n_{i,\alpha}$ verschwindet für $i \neq \mu$, weil $\mathrm{d}x_i$ verschwindet, wenn die i-te Koordinate konstant ist. Für $i = \mu$ erhalten wir

$$\int_{I^n_{\mu,\alpha}} f\omega_\mu = \int_{\mathbb{I}^{n-1}} (I^n_{\mu,\alpha})^*(f\omega_\mu) = \int_{\mathbb{I}^{n-1}} f(.., \alpha_\mu, ..)\,\mathrm{d}\lambda_{n-1}.$$

Summieren wir über alle Seiten von I^n, so leisten also nur die beiden μ-Seiten einen Beitrag, so dass

$$\begin{aligned}\int_{\partial I^n} f\omega_\mu &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=0}^{1} (-1)^{i+\alpha} \int_{I^n_{i,\alpha}} f\omega_\mu \\ &= (-1)^{\mu+1}\int_{I^n_{\mu,1}} f\omega_\mu + (-1)^{\mu}\int_{I^n_{\mu,0}} f\omega_\mu \\ &= (-1)^{\mu-1}\int_{\mathbb{I}^{n-1}} [f(.., 1_\mu, ..) - f(.., 0_\mu, ..)]\,\mathrm{d}\lambda_{n-1}.\end{aligned}$$

Aufgrund des Fundamentalsatzes der Differenzial- und Integralrechnung *einer* Variablen ist

$$f(\,..\,,1_\mu,\,..\,) - f(\,..\,,0_\mu,\,..\,) = \int_{\mathbb{I}^1} \partial_\mu f \,\mathrm{d}\lambda_1,$$

wobei nur in der μ-ten Koordinate integriert wird. Zusammen mit dem Satz von Fubini ergibt sich somit

$$\int_{\partial I^n} f\omega_\mu = (-1)^{\mu-1} \int_{\mathbb{I}^n} \partial_\mu f \,\mathrm{d}\lambda_n = (-1)^{\mu-1} \int_{I^n} \partial_\mu f \mathrm{d}x_1 \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_n.$$

Nun bemerken wir noch, dass

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(f\omega_\mu) &= \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge .. \wedge \mathrm{d}\hat{x}_\mu \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_n \\ &= \partial_\mu f \,\mathrm{d}x_\mu \wedge \mathrm{d}x_1 \wedge .. \wedge \mathrm{d}\hat{x}_\mu \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_n \\ &= (-1)^{\mu-1}\, \partial_\mu f \mathrm{d}x_1 \wedge .. \wedge \mathrm{d}x_n. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\int_{\partial I^n} f\omega_\mu = \int_{I^n} \mathrm{d}(f\omega_\mu).$$

Der Satz von Stokes ist damit für den Standardwürfel bewiesen.

Für einen allgemeinen n-Würfel c ist mit dem eben Bewiesenen und der Definition des Randes von I^n

$$\begin{aligned} \int_c \mathrm{d}\omega = \int_{I^n} c^*(\mathrm{d}\omega) &= \int_{I^n} \mathrm{d}(c^*\omega) \\ &= \int_{\partial I^n} c^*\omega = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} \int_{I^n_{i,\alpha}} c^*\omega. \end{aligned}$$

Für das letzte Integral erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_{I^n_{i,\alpha}} c^*\omega &= \int_{\mathbb{I}^{n-1}} (I^n_{i,\alpha})^* c^*\omega \\ &= \int_{\mathbb{I}^{n-1}} (c \circ I^n_{i,\alpha})^*\omega = \int_{\mathbb{I}^{n-1}} c^*_{i,\alpha}\omega = \int_{c_{i,\alpha}} \omega. \end{aligned}$$

Also ist

$$\int_c \mathrm{d}\omega = \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=0}^1 (-1)^{i+\alpha} \int_{c_{i,\alpha}} \omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Der Satz von Stokes ist damit auch für einen allgemeinen n-Würfel bewiesen.

Für eine beliebige n-Kette $c = \lambda_1 c_1 + .. + \lambda_r c_r$ ist dann alles klar:

$$\int_c \mathrm{d}\omega = \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} \lambda_i \int_{c_i} \mathrm{d}\omega = \sum_{1 \leqslant i \leqslant r} \lambda_i \int_{\partial c_i} \omega = \int_{\partial c} \omega.$$

Damit ist der Satz von Stokes im $\mathbb{R}^n$ vollständig bewiesen. ⟩⟩⟩⟩⟩

22.23

Der vorangehende Beweis ist wenig mehr als eine elementare Rechnung. Dies liegt aber daran, dass alles Wesentliche sich bereits in den Definitionen der zentralen Begriffe findet. Dies ist überhaupt ein Merkmal guter Definitionen: Wichtige Sätze lassen sich mit ihnen konzise formulieren und oft auch beweisen. Nichtsdestotrotz hat der Satz von Stokes weit reichende Konsequenzen und Anwendungen, von denen wir allerdings hier nur wenige andeuten werden.